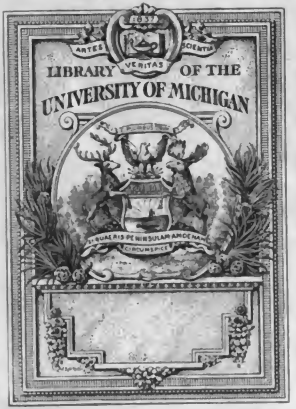
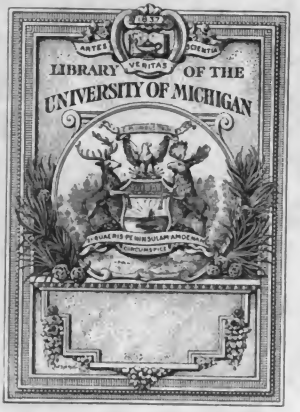
Archiv der Mathematik und Physik

Digitized by Google


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN

QA
1
A67
v.1


ARTES
VERITAS
VIRTUS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN

QA
1
A67
v.1

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE IN BERLIN. **W. FRANZ MEYER** IN KÖNIGSBERG I. PR. **E. JAHNKE** IN BERLIN.

ERSTER BAND.

MIT EINEM BILDNIS REINHOLD HOPPES IN LICHTDRUCK
UND 6 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

Digitized by Google

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Digitized by Google

Q 29 Jei 2 Fr. 2 m.

Vorwort.

Indem wir den ersten Band des neugestalteten Archivs der Mathematik und Physik hiermit der Öffentlichkeit übergeben, können wir nicht umhin, unseren Mitarbeitern den Ausdruck unseres Dankes zu übermitteln. Hervorragende Mathematiker der Gegenwart haben uns die Früchte ihrer Untersuchungen zum Abdruck gesandt; neben Nord- und Süddeutschland haben sich England, Frankreich, Japan und Österreich beteiligt, fast sämtliche Gebiete der Mathematik sind vertreten: Algebra, Arithmetik und Analysis, analytische, darstellende und synthetische Geometrie, Kinematik, Dynamik und mathematische Physik. Mit Genugthuung verzeichnen wir die Thatsache, dafs Charles Hermite unserer Zeitschrift ein besonderes Interesse entgegengebracht hat: seine letzte Arbeit ziert den vorliegenden Band.

Wir ergreifen diese Gelegenheit, um auch an dieser Stelle auf einige Ergänzungen hinzuweisen, die unser Programm inzwischen erfahren hat.

Eine derselben liegt nach der *physikalischen* Seite hin. Aufser mathematisch-physikalischen Untersuchungen, die auch schon früher in dieser Zeitschrift vertreten waren, sind wir gern bereit, solche Arbeiten aufzunehmen, welche im Vordergrund stehende Fragen der experimentellen Physik von neuen Gesichtspunkten aus beleuchten. Von dieser Art bietet der vorliegende Band zwei Abhandlungen. Für die nächsten Hefte sind wir in der Lage, unseren Lesern weitere Beiträge aus der Feder bekannter Physiker in Aussicht zu stellen.

Andere Ergänzungen beziehen sich auf die Rubrik „Vermischte Mitteilungen“. Hier haben wir, vielfach geäufserten Wünschen entsprechend, einen *„Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“* eingerichtet, wo die aus dem Leserkreis einlaufenden Berichtigungen und Ergänzungen zu den erschienenen Heften der Encyklopädie Platz finden sollen.

Selbstverständlich werden wir gern bereit sein, diesen Sprechsaal auch auf andere Erscheinungen der mathematischen und physikalischen

239241

Digitized by Google

Litteratur auszudehnen, falls uns diesbezügliche Wünsche geäufsert werden sollten.

In der Rubrik „Aufgaben und Lehrsätze“ wollen wir nicht blofs Aufgaben und Lehrsätze geben, deren Lösungen *im Archiv* zum Abdruck gelangen, auch Probleme mit näherer Angabe der Behandlung (sujets d'étude) sollen gestellt werden als Gegenstand längerer, selbständiger Arbeiten. Ein Beispiel dieser Art findet sich unter den Aufgaben dieses Bandes. Ebenso sollen in Zukunft die Preisfragen von Akademieen und gelehrten Gesellschaften an dieser Stelle mitgeteilt werden.

Alle diese Veränderungen wären nicht möglich gewesen ohne die weite Umsicht und das thatkräftige Interesse, welches die Verlagsfirma B. G. Teubner dem Archiv entgegengebracht hat.

E. Lampe. W. F. Meyer. E. Jahnke.

Digitized by Google

Inhalt.

	Seite
Zur Einführung	1—3
Appell, Paul. Sur une suite de polynômes ayant toutes leurs racines réelles	69—71
Caspary*), Ferdinand. Zur neueren Dreiecksgeometrie . . . 143—158,	269—288
Cwojdziński, Kasimierz. Der Lotpunkt, ein neuer merkwürdiger Punkt des Dreiecks	175—180
Darboux, Gaston. Sur les transformations conformes de l'espace à trois dimensions	34—37
Gleichen, Alexander. Über die Helligkeit der Sehorgane bei Menschen und Tieren, insbesondere bei den Knochenfischen	238—245
Greenhill, Alfred George. Applications of the elliptic integral of the third kind	72—76
Gundelfinger, Siegmund. Über die analytische Darstellung zweier Dreiecke, die auf 6 Arten perspektivisch liegen	252—254
— Über Ausartungen von Kreisen in Punktepaare	255—256
Haentzschel, Emil. Über die Reduktion des elliptischen Integrals erster Gattung auf die Weierstraſssche Normalform mit Hülfe einer Hermiteschen Substitution	118—123
Hayashi, T. An Expression of the Number of Primes lying between two given Integers	246—247
— On some Theorems concerning with Prime Numbers	248—251
Hensel, Kurt. Über einige Verallgemeinerungen des Fermatschen und des Wilsonschen Satzes	319—322
Hermite, Charles. Extrait d'une Lettre à M. E. Jahnke	20—21
— Sur une équation transcendante	22—26
Hilbert, David. Mathematische Probleme . . . . . 44—63,	213—237
Jahnke, Eugen. Bemerkungen zur Notiz von Herrn stud. K. Cwojdziński	181—183
— Charles Hermite	184—186
Jolles, Stanislaus. Die Beziehungen der Zentralellipse eines ebenen Flächenstückes zu seinem imaginären Bilde	91—98
Kommerell, V. Ein Satz über geodätische Linien	116—117
Krause, Martin. Zur Theorie der Thetafunktionen zweier veränderlicher Gröſsen	64—68
Laisant, Charles Ange. Polygones semi-réguliers dans l'ellipse	257—261

*) Nach Abschluſs des Bandes geht uns die traurige Kunde zu, daſs Ferdinand Caspary am 15. Juli nach langem Leiden in Berlin einem Herzschlag erlegen ist. Die Red.

Digitized by Google

	Seite
Lampe, Emil. Nachruf auf Reinhold Hoppe	4—19
— Auszüge aus zwei Briefen an F. Richelot von S. Aronhold	38—43
Landau, Edmund. Über einen zahlentheoretischen Satz	138—142
Lemoine, Émile. Principes de la Géométrografie ou Art des constructions géométriques	99—115, 323—341
Lummer, Otto. Über die Giltigkeit des Draperschen Gesetzes	77—90
Müller, Richard. Isophoten und Isophengen, insbesondere auf den Flächen zweiter Ordnung	166—174
d'Ocagne, Maurice. Étude élémentaire du conoïde de Plücker	159—165
Picard, Émile. Sur la résolution de certaines équations à deux variables à l'aide de fonctions rationnelles et sur un théorème de M. Noether	209—212
Pringsheim, Ernst. Über die Strahlung der Gase	289—309
Ripert, L. Sur quelques nouveaux théorèmes relatifs au triangle	310—318
Schafheitlin, Paul. Über die Nullstellen der Besselschen Funktionen zweiter Art	133—137
Schlesinger, Ludwig. Über die partiellen Differentialgleichungen, denen Hermitesche Formen genügen	262—268
Steinitz, Ernst. Die Geraden der Reyeschen Konfiguration	124—132
Weingarten, Julius. Über die geometrischen Bedingungen, denen die Unstetigkeiten der Derivierten eines Systems dreier stetigen Funktionen des Ortes unterworfen sind, und ihre Bedeutung in der Theorie der Wirbelbewegung	27—33

Rezensionen.*)

Alexandroff, J. Problèmes de géométrie élémentaire groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution	191
Bochow, K. Grundsätze und Schemata für den Rechenunterricht	189
Brückner, J. M. Geschichtliche Bemerkungen zur Aufzählung der Vielflache	187
Burkhardt, H. Funktionentheoretische Vorlesungen II. Von **M. Krause**	197
Deter, J. Mathematisches Formelbuch für höhere Unterrichtsanstalten	195
Duporcq, E. Premiers principes de géométrie moderne	196
Föppl, A. Vorlesungen über technische Mechanik. Von **J. Weingarten**	342—352
— — Entgegnung auf das Referat des Herrn Weingarten. Von **A. Föppl**	352—357
Foth, R. Anfangsgründe der Zahlen- und Raumgrößen-Lehre	191
Gaufs, F. G. Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln	192
— Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Handtafel für Dezimalteilung des Quadranten	192
Glaser. Stereometrie	195
Hartl, H. Aufgabensammlung aus der Arithmetik und Algebra	188
Herrmann, R. Elementarmethodische Behandlung der Logarithmen und ihrer Anwendungen	191
Hessenberg, G. Ebene und sphärische Trigonometrie	195
Hilbert, D. Grundlagen der Geometrie. Von **R. Fricke**	357
Holzmüller, G. Elemente der Stereometrie I. Von **R. Fricke**	365
Kober, G. Die Grundgebilde der neueren Geometrie I	188

*) Wo nicht anders angegeben, von **E. Jahnke.**

Digitized by Google

Seite

Kötter, Fritz. Bemerkungen zu F. Klein's und A. Sommerfeld's Buch: Über die Theorie des Kreisels 199
Korn, A. Lehrbuch der Potentialtheorie 201
Lengauer, Jos. Geometrische Wahrscheinlichkeitsprobleme. Von **M. Cantor** 198
Močnik-Spielmann. Geometrische Anschauungslehre I, II 189
— Lehrbuch der Arithmetik 189
— Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 189
Muth, P. Theorie und Anwendung der Elementarteiler. Von **E. Netto** . . 201
Niemeyer, R. Die Zahlenkunst II. Von **M. Cantor** 199
Pascal, E. Die Variationsrechnung. Von **R. Fricke** 360
Poincaré, H. Théorie du potentiel newtonien 200
Raydt, H. Lehrbuch der Elementarmathematik 193
Reinhertz, C. Geodäsie 196
Riemann, B. Vorlesungen über elliptische Funktionen. Herausgegeben von H. Stahl. Von **R. Fricke** 362
Rohrbach, C. Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln 193
Rudert, E. Grundlagen zu einer Geometrie der Kugel nach Grassmann . 190
Särchinger, E. und Estel, V. Aufgabensammlung für den Rechenunterricht 194
Schubert, H. Elementare Arithmetik und Algebra. Von **R. Fricke** . . . 364
Schwering, K. Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten 190
— 100 Aufgaben aus der niederen Geometrie 190
Stolz, O. Grundzüge der Differential- und Integralrechnung III. Von **R. Fricke** 363
Tannenberg, W. de. Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différentiel. Von **R. Fricke** 361
Volkmann, P. Einführung in das Studium der theoretischen Physik. Von **F. Pockels** 366
Wiechert, E. Grundlagen der Elektrodynamik. Von **R. Fricke** 359
Wrobel, E. Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra 188

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze 1—10, 11—25. Von **E. N. Barisien, E. Czuber, E. Jahnke, Ed. Janisch, St. Jolles, A. Kneser, C. A. Laisant, E. Lampe, E. Lemoine, W. Fr. Meyer** . . . . . 204—207, 368—374
2. Anfragen 1—3. Von **E. Lampe** und **W. Veltmann** 208, 373
3. Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. **A. Loewy, L. Saalschütz, A. Schoenflies** 374

Digitized by Google

Berichtigungen.

S. 71 ist in der Definitionsgleichung für $P_{2m,\,2n}$ die Potenz x^{m+n} durch $x^m y^n$ zu ersetzen.

„ 73 ist in Gl. (8) der Buchstabe Q durch R zu ersetzen.

„ 121 ist in Gl. (10) der Nenner durch $(R(x))^{1/2}$ zu ersetzen.

„ 171 letzte Zeile ist t_2 durch t_2' zu ersetzen.

„ 173, Anm. 1) sind in der vierten Zeile Q_1''' durch Q_1, G_2''' durch G_1, T_1''' durch T_1' zu ersetzen.

„ 176 ist die Gleichung $F_1 + F_2 \equiv F_2$ durch $F_1 + F_2 + F_3 \equiv 0$ zu ersetzen.

„ 180 sind in der ersten Gl. (18) x_2, y_2 durch x_3 bzw. y_3, in der zweiten x_3, y_3 durch x_2 bzw. y_2 zu ersetzen.

„ 181, Zeile 1 ist IV durch VI zu ersetzen.

„ 184, Zeile 9 ist 25. XII. durch 24. XII. zu ersetzen.

„ 185, Zeile 8 ist Exponentialfunktion durch „Zahl e“ zu ersetzen.

„ 207 in Aufgabe 7, 7° ist anstelle von 6° zu lesen 5°.

„ 207 sind in Aufgabe 10 die Nenner $2q$ der Argumente durch 2^q zu ersetzen.

Digitized by Google

Digitized by Google

Reinh. Hoppe

Verlag von B. G. Teubner, Leipzig

Druck von Römmler & Jonas, Dresden

Digitized by Google

Zur E[illegible]

Das Archiv der Mathematik und [illegible] Grunert, der vor seiner Berufung auf den [illegible] zu Greifswald zwölf Jahre lang Gymnasialdi[illegible] Rücksicht auf die Bedürfnisse der Le[illegible] [illegible] ins Leben gerufen worden [illegible] [illegible] de mathematiques pures et [illegible] [illegible] Weise seit 1840 [illegible] Neue Grunerts Tode [illegible] Mathematiker wie als [illegible] [illegible] anvertraut; [illegible] [illegible] Tode beendet, im Archiv [illegible] [illegible] welche durch die 53 unter Grunert [illegible] [illegible] und durch den Titel vorgezeichnet war.

Indem wir drei Unterzeichnete uns zur gemeinsamen H[illegible] Archivs verpflichtet haben, wollen wir seinen historisch entst[illegible] [illegible]akter nicht ändern, sondern vielmehr versuchen, ihn schärfer [illegible] [illegible].

Nachdem die Zeitschrift für Ma[illegible]tik und Physik [illegible] [illegible] [illegible] Charakter gehabt [illegible] die Pflege der [illegible] [illegible]tik in den Vordergrund [illegible] hat, bleibt das Archiv das [illegible] Organ in Deutschland, welches sich nicht blofs die Erweiterung [illegible] mathematischen Erkenntnis, sondern auch die Verbreitung der [illegible] mathematischen Forschung als Ziel steckt.

[illegible] unter Grunert und Hoppe wurde so manche wichtige [illegible] Entdeckung durch das Archiv zur allgemeinen Kenntnis [illegible] wir erinnern nur an die grundlegenden Seydewitz[illegible] [illegible] Untersuchungen aus der sphärischen Geometrie und an die [illegible] Arbeiten von Imschenetzky über die Theorie der par[illegible] Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Auch wir werden [illegible] wenn die jetzigen Mathematiker dem Archiv die Früchte [illegible] zur Veröffentlichung [illegible] wollen.

[illegible] 1

Digitized by Google

Digitized by Google

Zur Einführung.

Das Archiv der Mathematik und Physik ist 1841 von J. A. Grunert, der vor seiner Berufung auf den Lehrstuhl der Universität zu Greifswald zwölf Jahre lang Gymnasiallehrer gewesen war, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer der höheren Unterrichtsanstalten ins Leben gerufen worden, nachdem in Frankreich die Annales de mathématiques pures et appliquées von Gergonne in ähnlicher vorbildlicher Weise seit 1810 anregend und befruchtend gewirkt hatten. Nach Grunerts Tode (1872) wurde die Leitung des Archivs dem als Mathematiker wie als Philosoph gleich verdienten Professor R. Hoppe zu Berlin anvertraut; derselbe hat sich bis zu seinem im Juni dieses Jahres erfolgten Tode bemüht, im Archiv diejenige Richtung inne zu halten, welche durch die 53 unter Grunert erschienenen Bände gegeben und durch den Titel vorgezeichnet war.

Indem wir drei Unterzeichnete uns zur gemeinsamen Herausgabe des Archivs vereinigt haben, wollen wir seinen historisch entstandenen Charakter nicht ändern, sondern vielmehr versuchen, ihn schärfer auszuprägen.

Nachdem die Zeitschrift für Mathematik und Physik (Schlömilch) den bisherigen Charakter geändert und die Pflege der angewandten Mathematik in den Vordergrund gerückt hat, bleibt das Archiv das einzige Organ in Deutschland, welches sich nicht blofs die Erweiterung der mathematischen Erkenntnis, sondern auch die Verbreitung der Resultate mathematischer Forschung als Ziel steckt.

Schon unter Grunert und Hoppe wurde so manche wichtige wissenschaftliche Entdeckung durch das Archiv zur allgemeinen Kenntnis gebracht; — wir erinnern nur an die grundlegenden Seydewitzschen Untersuchungen aus der synthetischen Geometrie und an die bedeutenden Arbeiten von Imschenetzky über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Auch wir werden uns freuen, wenn die jetzigen Mathematiker dem Archiv die Früchte ihrer Forschung zur Veröffentlichung übergeben wollen.

Digitized by Google

Zur Fesselung eines gröfseren Leserkreises sollen aber auch solche Aufsätze eingerückt werden, welche die Kenntnisnahme und das Verständnis der neueren mathematischen Anschauungen und Entdeckungen vermitteln.

Da ferner der mathematische Unterricht an den Hochschulen (Universitäten, technischen Hochschulen u. s. w.) und an den Mittelschulen (Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen u. s. w.) von den Ergebnissen der Forschung beeinflufst wird, so werden wir gern Artikel bringen, welche bezügliche Fragen in wissenschaftlicher Weise beleuchten. Doch wollen wir hierbei sogleich bemerken, dafs lediglich pädagogische, den Mittelschulunterricht betreffende Gegenstände ausgeschlossen bleiben, weil für diese in den Zeitschriften für Unterricht besondere Organe bestehen.

Die Erweiterung des Programms auf die Berücksichtigung der Bedürfnisse des Hochschulunterrichts ist durch die Erwägung veranlafst worden, dafs die ähnliche Ziele verfolgenden Nouvelles Annales in Frankreich und das Giornale di Matematiche in Italien ihre Blüte gerade dem Umstande zu verdanken haben, dafs sie die studierende Jugend zu ihren eifrigsten Lesern zählen und sehr früh zur Mitarbeit zulassen.

Auch wir erachten es für die Erziehung eines fröhlich schaffenden mathematischen Nachwuchses für ersprieſslich, wenn dem auf der Hochschule sich ausbildenden Jünglinge Anregung und Gelegenheit gegeben wird, eine Zeitschrift seiner Wissenschaft mit Interesse zu lesen und in ihr mit eigenen Arbeiten vor die Öffentlichkeit zu treten.

Um zu selbständigen Arbeiten anzuregen, werden wir Aufgaben zu stellen versuchen, die dem Stoffe des Hochschulunterrichts entnommen sind, und bitten die Herren Kollegen um reichliche Mitteilung solcher Aufgaben, von denen ja jeder Lehrer eine gewisse Anzahl für seine besonderen Zwecke auszubilden pflegt. Die Namen der Einsender richtiger Lösungen sollen in den nächsten Heften veröffentlicht werden. Bearbeitungen, welche sich durch Originalität und Eleganz der Darstellung auszeichnen, sollen, soweit der Platz verfügbar ist, zum Abdruck gelangen. Auch für die Beantwortung von Anfragen werden wir versuchsweise eine Rubrik einrichten.

Einen wesentlichen Bestandteil des Archivs hat immer der litterarische Bericht gebildet, bestehend in Rezensionen neuerschienener Schriften. Derselbe wird in etwas abgeänderter Form beibehalten werden, und wir werden danach streben, durch Heranziehung geeigneter Kräfte, welche das zur Besprechung kommende Gebiet beherrschen, eine möglichst sachgemäfse Beurteilung in kurz gefafsten Artikeln

Digitized by Google

herbeizuführen. Da die Zeitschrift für Mathematik und Physik (Schlömilch) von jetzt an auch in ihrer historisch-litterarischen Abteilung sich auf die angewandte Mathematik einschränkt, wird dieser Teil des Archivs für die mathematische Lesewelt eine erhöhte Wichtigkeit erhalten.

Wenn wir so dem unserer Leitung übergebenen Archiv neues Leben einzuflößen beabsichtigen, so verhehlen wir uns bei der Übernahme unserer neuen Pflichten nicht, dafs viele Schwierigkeiten zu überwinden sind; wir hoffen indessen, dafs uns die Mathematiker der verschiedensten Richtungen, mögen sie mehr produktiv oder mehr rezeptiv wirken, nach Kräften unterstützen werden. Indem wir durch die Mannigfaltigkeit der Gaben den verschiedenen Geschmacksrichtungen gerecht zu werden versuchen, wollen wir vor allem die Langweiligkeit und die Kleinigkeitskrämerei aus dem Archiv verbannen, weil sie das Interesse töten.

In dem Bewufstsein, dafs ein einzelner Herausgeber nicht imstande ist, alle in Betracht zu ziehenden Gesichtspunkte zu übersehen, sind wir drei, die wir einzeln der Lehrerschaft einer Universität, einer technischen Hochschule und einer Oberrealschule angehören, zusammengetreten, um aus den besonderen Erfahrungen heraus alles beizutragen, das Archiv aus seiner im neunzehnten Jahrhundert ausgebildeten Gestalt in diejenige umzuwandeln, welche das zwanzigste mit seinen neuen Aufgaben fordert, und deren Lebensfähigkeit in dem Kampfe um das Dasein zu erproben ist.

Den uns erwachsenden Aufgaben sehen wir um so hoffnungsfreudiger entgegen, als wir überzeugt sind, dafs die Verlagsfirma B. G. Teubner, in deren Besitz das Archiv übergegangen ist, sowohl den Willen als auch die Kraft hat, alle zweckdienlichen Einrichtungen aufs beste zu treffen.

Als geschäftsführender Redakteur wird der mitunterzeichnete Dr. Jahnke wirken; an ihn oder an die Verlagshandlung bitten wir besonders die zu besprechenden Druckschriften einzusenden.

Dezember 1900.

Dr. **E. Lampe**,
Geheimer Regierungsrat,
Professor der Königl. Techn. Hochschule
Berlin W. 35, Kurfürstenstrafse 139.

Dr. **W. Fr. Meyer**,
Professor der Universität Königsberg i. Pr.
Mitteltragheim 51.

Dr. **E. Jahnke**,
Oberlehrer der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule
Berlin W. 15, Pariserstrafse 55.

Digitized by Google

Nachruf für Reinhold Hoppe.

Von E. Lampe in Berlin.

Aus den Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft II, p. 183—201.

Mit einem Bildnis R. Hoppes in Lichtdruck.

Ernst Reinhold (Reginhald) Eduard Hoppe wurde zu Naumburg an der Saale am 18. November 1816 geboren als Sohn des Dompredigers Ernst August Dankegott Hoppe und seiner Ehefrau Friederike Wilhelmine, geb. Nitzsch, der Schwester des Theologen Karl Immanuel Nitzsch; er gehörte also von väterlicher und von mütterlicher Seite her bekannten und hochgeachteten Gelehrtenfamilien an. Unter den elf grofs gezogenen Kindern des Pfarrhauses war er das sechste, von den vier Brüdern der dritte. Sein um vier Jahre älterer Bruder Karl war der Gründer der bekannten Maschinenbauanstalt und Eisengiefserei zu Berlin; der um zwei Jahre ältere Bruder Ernst war Oberförster, und der um neun Jahre jüngere Bruder Felix Hoppe-Seyler Chemiker und Physiologe, Professor an der Universität Strafsburg. Zweimal wechselte die Familie noch ihren Wohnsitz; bald nach der Geburt des kleinen Reinhold zum Superintendenten in Freiburg an der Unstrut befördert, siedelte der Vater nach dieser Stadt über, später, am Anfange der dreifsiger Jahre, in gleicher Stellung nach Eisleben. Dort starb jedoch bald nach dem Einzuge in die neue Stadt die Mutter (19. Febr. 1832), einige Jahre darauf der Vater (10. Okt. 1835); mit neunzehn Jahren war Reinhold also des Vaters und der Mutter beraubt. Zuerst auf dem Gymnasium in Eisleben vorgebildet, genofs er später der Wohlthat des Unterrichtes auf der Landesschule Pforta, und zuletzt besuchte er das Gymnasium in Greifswald, wo seine an den dortigen Superintendenten und Prof. Karl Vogt vermählte Schwester Laura lebte. Mit dem Zeugnis der Reife des Greifswalder Gymnasiums vom 30. August 1838 versehen, bezog der zweiundzwanzigjährige Abiturient zunächst die Universität Kiel auf

Digitized by Google

zwei Semester; die beiden folgenden Semester studierte er in Greifswald, die letzten drei in Berlin, wo er am 24. März 1842 sein Abgangszeugnis nahm. Die Neigung zur Beschäftigung mit der Mathematik soll bei ihm früh durch seinen älteren Bruder Karl geweckt sein, der ihn schon in seinem zehnten Lebensjahre in die Geheimnisse der Quadrat- und Kubikwurzelausziehung einweihte.

Nach der Beendigung der Studienzeit wandte sich Reinhold Hoppe der Lehrthätigkeit zu. Das Probejahr erledigte er am Gymnasium zu Greifswald von Michaelis 1842 bis 1843. Von Ostern 1846 bis Michaelis 1849 nahm er eine Stelle als Lehrer an der Erziehungsanstalt zu Keilhau an, in welcher die Froebelschen Grundsätze der Erziehung zur Anwendung gebracht wurden. Von Michaelis 1849 bis 1853 versuchte er sich als Lehrer am Köllnischen Realgymnasium zu Berlin, das zu jener Zeit unter dem Direktor August in hoher Blüte stand. Während dieser Zeit erwarb er sich an der Universität Halle den Doktorhut am 25. November 1850. Da seiner Unterrichtsarbeit der wünschenswerte Erfolg nicht entsprach, aufserdem seine Forschernatur nach einer freieren Thätigkeit drängte, habilitierte er sich 1853 als Privatdozent für Mathematik an der Berliner Universität. Noch einmal vertauschte er den Hörsaal der Universität mit den Klassen eines Gymnasiums, als er von Ostern 1858 bis 1859 eine Lehrstelle am Gymnasium zu Glogau übernahm. Aber auch dieses Mal versagte seine Natur gegenüber den Ansprüchen der Schule, und so kehrte er denn 1859 an die Berliner Universität zurück und gehörte ihr von da an ohne Unterbrechung als Privatdozent bis zu seinem Tode im Sommer 1900 an. Schon bei seiner Habilitation im Jahre 1853 hatte er sich um die Lehrbefugnis für Philosophie beworben, ohne sie aber zu erlangen. Ein zweites Gesuch vom Jahre 1870 hatte keinen besseren Erfolg; seinem im Jahre 1871 erneuten Antrage wurde dann endlich auf energische Befürwortung von Trendelenburg Folge gegeben. Den Charakter als Professor erhielt er 1870. — Nach dem Tode Grunerts 1872 wurde ihm die Redaktion des Archivs der Mathematik und Physik anvertraut, eine Thätigkeit, die ihm hohe Befriedigung gewährte, weil dadurch seine Existenz in mehr als einer Beziehung einen Halt gewann, und weil er damit die Gelegenheit erhielt, in einer seiner Natur zusagenden Art durch Öffnung des reichen Schatzes seines Wissens nach aufsen zu wirken. Die Pflichten dieser Schriftleitung hat er bis zu seinem Tode am 7. Juni 1900 im Alter von 83½ Jahren treu erfüllt. Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala gehörte er als ordentliches Mitglied an. Dies sind die Daten für den Gang seines Lebens.

Digitized by Google

Die wissenschaftliche Produktion des Verschiedenen, die sich über einen Zeitraum von 55 Jahren erstreckt, ist eine überaus reiche und vielseitige gewesen. Er war eben nicht ein einseitiger Mathematiker, sondern sein Geist umspannte neben allen Gebieten der Mathematik die Physik, die Philosophie, die Sprachforschung und suchte Erholung in der Ausübung der Musik; endlich versenkte er sich als echter Sohn eines evangelischen Pfarrhauses philosophisch in die letzten Fragen der Beziehungen des Menschen zu Gott. Was alle seine Schriften kennzeichnet, ist die Selbständigkeit und Ehrlichkeit seines Denkens; überall leuchtet ein abgeschlossenes, fertiges Wesen hervor, das in sich Genüge gefunden hat. Mag der Leser sich auch nicht mit ihm in Übereinstimmung befinden, so nötigt der tiefe Ernst, mit dem alle Fragen behandelt sind, Achtung vor einem Geiste ab, der nach langer und unablässiger Gedankenarbeit eine in sich ruhige und befriedigte Klarheit errungen hat und im Besitze einer nicht mehr zu erschütternden Überzeugung eine oft schneidende Kritik übt.

Gehen wir zunächst auf die mathematischen Schriften ein, so erregt die blofse Anzahl derselben Bewunderung. Im Archiv der Mathematik hat Hoppe rund 200 Originalartikel veröffentlicht; dazu treten etwa 50 mathematische Aufsätze in anderen Zeitschriften, ferner vier selbständig erschienene Arbeiten. Wenn man auch aus den Veröffentlichungen im Archiv viele kleinere Notizen aussondert, die augenscheinlich häufig zur Füllung eines Heftes geschrieben sind und den Vorlesungsheften entnommen sein mögen, so bleiben immer noch genug übrig, deren Inhalt in der einen oder anderen Hinsicht beachtungswert, ja bedeutend ist, und auch jene kleineren Artikel tragen in vielen Wendungen das Gepräge eines ursprünglich schaffenden Geistes. Allerdings ist, besonders in der späteren Zeit, nicht immer hinreichend darauf Rücksicht genommen, ob die nämlichen Gedanken nicht auch schon von anderen Forschern oder gar vom Schreiber selbst ausgesprochen waren. Bei den Arbeiten, die dem höheren Alter Hoppes angehören, liegt es nahe, eine Entschuldigung für ein derartiges Verfahren in zunehmender Gedächtnisschwäche zu suchen; doch dürfte der tiefere Grund anderswo liegen. Nachdem er bis gegen sein vierzigstes Lebensjahr hin gearbeitet hatte, um einen festen Standpunkt in seinen wissenschaftlichen Anschauungen zu gewinnen, beschränkte er sich von dieser Zeit an im wesentlichen darauf, seine eigenen Forschungen anzustellen, und er berücksichtigte dabei kaum noch die grofsen Entdeckungen, die in der zweiten Hälfte des Jahrhunderts von anderen Forschern gemacht wurden. Hauptsächlich durch das Studium der Arbeiten Jacobis herangebildet, blieb er auf diesem Boden stehen,

Digitized by Google

und sogar der ihm sehr wohl gesinnte Dirichlet machte ihm bezüglich einer seiner Arbeiten über Hydrodynamik schon 1853 den Vorwurf, der Verfasser besitze keine vollständige Kenntnis von den zahlreichen in der letzten Zeit über die Integration der Laplaceschen Differentialgleichung unternommenen Arbeiten. Indem er sich so früh schon in seine Gedanken einspann, bewahrheitete er den vom alten Goethe zur Abwehr geschriebenen Ausspruch: „Eilt aber die Raupe sich einzuspinnen, nicht kann sie mehr Blättern Geschmack abgewinnen.“ Als Einsiedler der Wissenschaft lebend, kümmerte er sich um die Vorgänge auf dem Gebiete seiner Hauptwissenschaft zuletzt so wenig, dafs ihm die Namen mancher der berühmtesten zeitgenössischen Mathematiker ganz fremd blieben.

Die ersten Untersuchungen Hoppes beziehen sich auf die Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten und sind unter diesem Titel in einem Buche 1845 von dem damals neunundzwanzigjährigen jungen Mathematiker veröffentlicht worden. Sowohl im Journal für die reine und angewandte Mathematik als auch in den Mathematischen Annalen hat er unter demselben Titel zur Ergänzung kleinere Aufsätze erscheinen lassen. Noch heute gilt jenes Buch als eine wertvolle und tüchtige Monographie über den Gegenstand. Mit dieser Veröffentlichung begann Hoppe also die Reihe seiner Arbeiten aus dem Gebiete der Infinitesimalrechnung sowie der Differentialgleichungen, von denen bei seiner Habilitation in Berlin schon einige gedruckt vorlagen. Auf Dirichlet hatten diese Erstlingsarbeiten von Hoppe einen günstigen Eindruck gemacht: er erkannte mehrere gute Gedanken in ihnen an, die zum Teil mit Geschick und nicht ohne Eleganz durchgeführt wären, und selbst in der oben erwähnten, minder gelungenen Arbeit über Hydrodynamik erblickte er die Hand eines in den Methoden der Analysis geübten Gelehrten.

Mit den Grundlagen der Differential- und der Integralrechnung beschäftigen sich mehrere Aufsätze der Jahre 1871 bis 1873. Als die beiden Fundamentalsätze bezeichnet er die Aussagen: „Unendlich klein *ist* eine Variable, wenn sie beliebig klein *werden* kann. Zwei Konstanten, die von einer Variable unendlich wenig differieren, sind einander gleich.“ Hiermit hofft er, wie in einem Selbstreferate ausgesprochen wird, die Jahrhunderte lang schwebende Frage über die Möglichkeit einer exakten Bestimmung des Unendlichen zum Abschlufs gebracht zu haben. Eine zusammenfassende Darstellung des ersten Teiles der Infinitesimalrechnung lieferte er in dem „Lehrbuch der Differentialrechnung und der Reihentheorie“ (1865), das, wie alle Erzeugnisse der Hoppeschen Muse, knapp geschrieben ist, sich daher zur Einführung für be-

Digitized by Google

queme Anfänger nicht recht eignet und aus diesem Grunde nicht die Verbreitung gefunden hat, welche es verdient.

Von den übrigen hierher gehörigen Abhandlungen wollen wir noch den instruktiven Aufsatz nennen: „Erste Sätze von den bestimmten Integralen, unabhängig vom Differentialbegriff entwickelt“ (1877). Ferner sei aus denjenigen Artikeln, welche den Differentialgleichungen gewidmet sind, eine Notiz im Journal für Mathematik Bd. 58 (1861) erwähnt betreffs einer gewissen partiellen Differentialgleichung, die von Hrn. Fuchs in demselben Bande mit Benutzung eines Poissonschen Resultates behandelt war. Hoppe zeigte, dafs die betreffende Abhandlung Poissons gerade für den benutzten Fall einen Fehler enthielt, der deshalb in die Fuchssche Arbeit eingegangen war; nach einem Verfahren, das den Irrtum Poissons vermied, entwickelte er dann die richtige Lösung.

Wenn wir uns mit der vorstehenden kurzen Besprechung einzelner Untersuchungen Hoppes aus der Analysis begnügen müssen, so wollen wir doch hinzufügen, dafs er gelegentlich auch Fragen aus der Algebra, der Zahlentheorie, der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelte und sich mit speziellen Funktionen, wie der Gammafunktion und den elliptischen Transcendenten, beschäftigte. An dieser Stelle müssen wir auch der separat erschienenen Tafel zur dreifsigstelligen logarithmischen Rechnung vom Jahre 1876 gedenken.

Wenden wir uns nun zur Geometrie, zu demjenigen Gebiete, dem Hoppe in seinen Forschungen wohl den gröfsten Platz eingeräumt hat. Sowohl die analytische Geometrie im allgemeinen, als auch besonders derjenige Teil, den man jetzt als Differentialgeometrie bezeichnet, sind bevorzugte Gegenstände seiner Untersuchungen geblieben. Dagegen hat er sich für die moderne synthetische Geometrie offenbar nie begeistern können; dies ist um so auffälliger, als Steiner zu der Zeit, als Hoppe in Berlin studierte, eine grofse Anziehung auf die jungen Berliner Mathematiker ausübte. Gerade diese Beeinflussung der Denkweise dürfte der im eigenen Denken schon erstarkte junge Hoppe jedoch abgelehnt haben.

Aus der Fülle der in den Hoppeschen bezüglichen Abhandlungen niedergelegten Gedanken können wir nur einige hervorheben. In den „Prinzipien zur Flächentheorie“, die ursprünglich im Archiv der Mathematik (1876) veröffentlicht wurden, später den zweiten Teil des Lehrbuches der analytischen Geometrie (1880) bildeten, werden neben den drei Fundamentalgröfsen erster Ordnung von Gaufs als Fundamentalgröfsen zweiter Ordnung diejenigen drei Ausdrücke ganz allgemein angewandt, die zwar Brioschi[1]) schon benutzt hatte, die aber

1) F. Brioschi, Annali di Matematica (2) 1, p. 1. 1867.

Digitized by Google

Hoppe deshalb ganz allgemein einzuführen erklärt, weil die theoretisch wichtigen geometrischen Eigenschaften und Bedingungen im einfachsten Konnex mit den Werten und Relationen jener sechs Gröfsen stehen. In dieser Beziehung hat sich einer der besten Kenner dieses Gebietes, Hr. Knoblauch, in seiner Abhandlung über Fundamentalgröfsen in der Flächentheorie und in seinem Buche „Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen" diesem Gebrauche angeschlossen.

Eine Reihe von Arbeiten dieser Theorie ist ferner dem Problem des dreifach orthogonalen Flächensystems gewidmet, für dessen Lösung Hoppe einen Weg ausfindig machte, der in manchen Fällen zum Ziele führt. So konnte er nach seinem Verfahren die allgemeinste Lösung der Aufgabe durchführen[1]), orthogonale Flächensysteme zu finden, bei denen die eine Flächenschar aus Flächen zweiter Ordnung besteht; er traf in dem Resultate seiner Rechnung mit Schläfli zusammen, der zwei Jahre vorher dasselbe Thema in einer besonderen Arbeit behandelt hatte.[2])

In der Kurventheorie wählte Hoppe zwei Variabeln, die der Kurve selbst eigentümlich angehören und vom Koordinatensystem unabhängig sind, den Krümmungswinkel τ und den Torsionswinkel ϑ, d. h. diejenigen Winkel, deren Differentiale die Winkel zweier aufeinander folgenden Tangenten und Schmiegungsebenen sind. Die analytische Behandlung geometrischer Gebilde mit Hilfe derartiger Gröfsen bezeichnet man jetzt als „geometria intrinseca"; Hoppe nennt die Gleichung $f(\tau, \vartheta) = 0$ zwischen jenen beiden Winkeln die spezifische Gleichung der Kurve und zeigt, wie man aus ihr die Eigenschaften der Kurve herleiten kann. Diese interessante Leistung ist ihm offenbar als die wichtigste seiner Entdeckungen vorgekommen; denn in den von ihm herrührenden Notizen für das Verzeichnis der Lehrer an den deutschen Hochschulen führt er als bemerkenswert einzig seine Auffindung neuer Prinzipien der Kurventheorie mit Anwendung des Krümmungs- und Torsionswinkels als unabhängiger Variabeln an.

Neben denjenigen Abhandlungen, die in das Gebiet der krummen Oberflächen und der Raumkurven fallen, wollen wir aus der grofsen Zahl von Aufsätzen geometrischen Inhalts eine andere Gruppe hervorheben, die der mehrdimensionalen oder, wie Hoppe besser deutsch sagt, der mehrdehnigen Geometrie angehört. Die betreffenden Speku-

1) R. Hoppe, Archiv der Math. 58, p. 37. 1875.
2) L. Schläfli, Journ. für Math. 76, p. 76. 1873.

Digitized by Google

lationen sagten seinen philosophisch-mathematischen Neigungen besonders zu. Unser geläufiges Raumsystem von drei Dehnungen bezeichnet er als ein instinktiv geschaffenes, zur objektiven Gestaltung der Sinnesempfindungen gerade ausreichendes und notwendiges Werk unseres Verstandes, welches durch Übung in fertige Anschauung überging. Nur weil der zwingende Anlafs zur Einführung von mehr Dimensionen fehlte, empfinden wir wegen Mangels an Übung Schwierigkeit im Vorstellen derselben. Ein ursprünglich begrifflicher Unterschied der verschiedenen Raumsysteme existiert für ihn nicht, wie denn auch die Formeln der analytischen Geometrie oft durch einfache Vermehrung der Koordinatenzahl auf die Geometrie eines Raumes von mehr als drei Dimensionen hinleiten. Der Nutzen solcher mehrdimensionalen Untersuchungen besteht nach seiner Ansicht darin, dafs durch dieselben die Erkenntnis des gesetzmäfsigen Fortschrittes von zwei zu drei Dimensionen gefördert wird. Unter den ersten Arbeiten dieser Richtung stofsen wir auf die „Gleichung der Kurve eines Bandes mit unauflösbarem Knoten nebst Auflösung in vierter Dimension" (1879). Dieser Titel weckt die Erinnerung an jene Epoche, in der Zöllner als Ritter für den Taschenspieler Slade auftrat, dessen Auflösung eines Knotens in einem in sich geschlossenen Faden als experimenteller Beweis für die reale Existenz der vierten Dimension gelten sollte. Als Frucht der in den Nachsitzungen der Physikalischen Gesellschaft gegebenen Vorführungen ähnlicher Kunststücke ist die Anregung anzusehen, welche Hoppe zur Abfassung jener Abhandlung dabei erhielt.

Wir wollen die der Geometrie zuzurechnenden Artikel nicht verlassen, ohne auf die zahlreichen Notizen hinzuweisen, in denen der gelehrte Redakteur des Archivs durch Behandlung von zum Teil pädagogischen Fragen aus der elementaren Mathematik der durch den Titel seiner Zeitschrift vorgeschriebenen Richtung Rechnung trug, die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten zu berücksichtigen. Endlich sollen auch diejenigen Arbeiten nicht vergessen werden, in denen der geschickte Analyst die Ergebnisse der höheren Rechnungsarten und der Funktionentheorie, unter anderem der Theorie der elliptischen Transcendenten, auf Probleme der Geometrie anwendet.

In der analytischen Mechanik, zu der wir jetzt übergehen, hängen viele Betrachtungen so eng mit der Theorie der krummen Oberflächen und der Raumkurven zusammen, dafs die Beschäftigung mit den letzteren von selbst auf die verwandten Untersuchungen in der Mechanik führt. Deshalb wechseln auch bei Hoppe mit den geometrischen Abhandlungen die mechanischen während der ganzen Periode seines

Digitized by Google

Schaffens ab. Doch ist ein Unterschied bemerkbar. Während Hoppe in der Geometrie neben einer überraschenden Zahl von einzelnen speziellen Fragen in seinen gröfseren Arbeiten gewisse prinzipielle Überlegungen von allgemeinerer Bedeutung vertieft und dadurch zur Aufstellung neuer Methoden fortschreitet, bleibt er in der Mechanik bei der Behandlung einer Reihe einzelner Aufgaben aus den verschiedensten Teilen dieser Wissenschaft stehen. Die Kinematik, die Statik und die Dynamik des einzelnen Massenpunktes oder des starren Körpers, die Hydrostatik und die Hydrodynamik liefern ihm Anlafs, entweder neue Aufgaben mannigfacher Art zu lösen, oder die Lösungen alter bekannter Probleme auf seine Weise durchzuarbeiten und zu vereinfachen. Wir erwähnen von der letzteren Gattung die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt, den freien Fall eines Massenpunktes mit Rücksicht auf die Drehung der Erde, den Foucaultschen Pendelversuch. Zu der ersteren gehören aus der frühesten Periode seiner Arbeiten der Ausdruck des Trägheitsmomentes eines körperlichen Polyeders für eine beliebige Axe und das körperliche Raumpendel bei konstanter Rotation nebst Anwendung auf die Stabilität des Kreisels (1855); die Stabilität schwimmender Körper (1846) und der Widerstand der Flüssigkeiten gegen die Bewegung fester Körper (1854). Die Abhandlungen über das Dreikörperproblem und die Ausdehnung der Keplerschen Gesetze, über das Wälzen von Cylindern auf Horizontalebenen, über die Schwingungen des Bifilarpendels und verschiedene andere hierher gehörige Arbeiten erschienen zur Zeit der lebhaftesten Produktion, als Hoppe eben das sechzigste Lebensjahr überschritten hatte. Überall zeigt er sich als gewandter Beherrscher der Rechnung, der die Bedingungen der Aufgabe rasch in Gleichungen umzusetzen und aus diesen letzteren fafsbare Ergebnisse zu folgern versteht. Viele elegante Wendungen der Rechnung und hübsche Schlufsweisen sind in diesen Untersuchungen enthalten, die wegen der allzu knappen Redaktion wohl wenig gelesen sind.

Der mathematischen Physik gehört endlich eine Gruppe von Arbeiten Hoppes an, die zwar nicht zahlreich sind, aber zu den bedeutenderen unter seinen Veröffentlichungen gezählt werden müssen. Mehrere Abhandlungen beziehen sich auf die Elastizitätstheorie: die Biegung prismatischer Stäbe (1847), die Vibrationen einer Saite mit Rücksicht auf den Biegungswiderstand (1870), die Deformation einer zwischen zwei parallelen Ebenen zusammengedrückten Kugel (1871), die Biegung eines Ringes durch gleichmäfsigen Druck von aufsen (1864), die Vibrationen eines Ringes in seiner Ebene (1871). In dieser letzten interessanten Arbeit bestätigte Hoppe den damals noch nicht

Digitized by Google

allgemein bewiesenen Satz von de Saint-Venant, dafs die lebendige Kraft eines Systems gleichzeitiger Vibrationen eines Körpers die Summe der lebendigen Kräfte aller einzelnen einfach periodischen Vibrationen ist. Auch in die Molekularphysik, die Optik und die Wärmelehre machte Hoppe zuweilen einen Ausflug; gelegentlich eines Aufsatzes zur Wärmetheorie (1857) geriet er in einen wissenschaftlichen Streit mit Clausius, der in Poggendorffs Annalen ausgekämpft wurde.

Nächst den mathematischen Forschungen Hoppes, die wir jetzt verlassen, haben wir seinen philosophischen Arbeiten einige Aufmerksamkeit zu schenken. Er selbst betrachtete die Mathematik und die Philosophie als so eng zu einander gehörig, dafs er den Ausschlufs der letzteren aus seiner Lehrbefugnis während der ersten 18 Jahre seiner Privatdozentenzeit als eine Beschränkung des Lehrens in der ersteren empfand. Als unabhängiger Denker baute er sich seine Weltanschauung nicht mit Hilfe des Studiums der Geschichte der Philosophie auf, sondern durch eigene Prüfung und Erörterung der Grundfragen. Seine erste Schrift „Zulänglichkeit des Empirismus in der Philosophie“ (1852) und seine letzte, die man wohl als sein philosophisches Testament bezeichnen kann: „Die Elementarfragen der Philosophie und Widerlegung eingewurzelter Vorurteile“ (1897), stimmen in den Grundanschauungen überein. Als Anhänger eines ideal gewendeten Empirismus erklärte er schon 1852 alle Mathematik als rein empirisch; dieser Ausspruch erregte damals Anstofs, dürfte heute jedoch des Beifalles vieler sicher sein. Seine Anknüpfungspunkte suchte er bei Bacon, Locke, Berkeley, Hume; die Zielpunkte seiner Kritik waren Kant, Fichte, Hegel, überhaupt die spekulative Philosophie. Diese will er beseitigen, jene ergänzen. Sein eigenartiges Bestreben ist die Auflösung der Metaphysik in ein Stück Psychologie. Zu dem Ende sucht er sechs metaphysiche Grundideen genetisch abzuleiten: die Idee der reellen Substanz, der Kausalverbindung, des Raumes, der Zeit, des menschlichen Körpers und des gemeinschaftlichen Weltbesitzes. In ähnlicher Weise erörtert seine letzte philosophische Schrift von 1897 Grundbegriffe wie Thatsache, Erkennen und Handeln, Wirklichkeit und Objektivität, Substanz und Stoff, Identität, Raum und Zeit, Sein und Wahrnehmung, Ursache, Hypothese und Antizipation, Ich und Person, Leib und Geist, Willensfreiheit und Sprache. Das Ziel der Erkenntnis besteht darin, Thatsachen, d. h. dasjenige, was ein Mensch unabhängig von seinem Thun und Denken erlebt, dem menschlichen Geiste zu unterwerfen. Trendelenburg urteilte über das erste Büchlein, es habe ungeachtet der von ihm gerügten Mängel seine guten Seiten; es gehe seinen Weg, sei dem Verfasser ganz eigen, sei einfach geschrieben,

Digitized by Google

kurz und ohne philosophische Phrase und habe in der Kritik der spekulativen Philosophie vielfach Recht.

Ungefähr ebenso äufserte sich Harms (1870) in einer Beurteilung der Abhandlung „Über die Bedeutung der psychologischen Begriffsanalyse". Interessant ist es hierbei, von befugter Seite zu vernehmen, dafs Hoppes Auffassung des Verhältnisses von Glauben zu Wissen mit Schleiermachers Ansicht übereinstimme; da Hoppe aber seine Auffassung für neu halte, so scheine er nicht mit der Ansicht Schleiermachers bekannt geworden zu sein, und es sei wohl möglich, dafs er durch eigenes Nachdenken zu seiner Auffassung gelangt sei. Auch Harms betont die Selbständigheit des Denkens bei Hoppe und bezeichnet manche richtigen Gesichtspunkte, die, obschon nicht neu, es wohl verdienten hervorgehoben zu werden.

In der Abhandlung „Ueberwegs Kritik der Berkeleyschen Lehre" (1869), vertritt Hoppe gegen Ueberweg den Subjektivismus Berkeleys, der die für die vulgäre Auffassung als reell geltenden Dinge in Vorstellungen (Ideen), in Phänomena des menschlichen Geistes verwandelt, und greift in scharfsinniger Weise mit ruhiger und sachlicher Polemik Ueberwegs eigene Lehre an. Der Phänomenalismus Hoppes hat, wie Trendelenburg sagte, nicht die Wissenschaften in Mitleidenschaft gezogen, weil die Thatsachen seine Basis sind. Von diesen Thatsachen unterscheide er, was daran erst Arbeit des Geistes sei, wie z. B. die Objektivität, die durch Verallgemeinerung entsteht, den unendlichen Raum im Gegensatz des thatsächlichen. Seine Lehre habe ethisch keine ungesunden Konsequenzen und erkläre sich, obschon undeutlich, gegen den Pessimismus, der in der neuesten Zeit die Stimmung der Jugend vergälle. Wenn ihm seine philosophischen Vorlesungen gelängen, so würde er unter den Studierenden eine andere Art der Betrachtung anregen als die übrigen Lehrer der Philosophie an der Berliner Universität, einer solchen ähnlich, die in England zur Zeit Anhänger besitze.

Wie in der Mathematik, ging also auch in der Philosophie Hoppe den Weg, den er sich selbst gebahnt hatte, unbekümmert darum, ob andere schon eine ähnliche Richtung eingeschlagen hätten, und ob er als einsamer Wanderer Genossen fände, die ihm beistimmten. Einer der tüchtigsten Kenner der Kantschen Philosophie, Hr. Michaelis, erklärt in seiner Besprechung der letzten Hoppeschen philosophischen Arbeit diese Schrift für ein erkenntnistheoretisches Werk von bedeutender Tragweite.

Die philosopischen Studien führten Hoppe naturgemäfs auch zum Nachdenken über den Bau der Sprache, wie ein Aufsatz „Über das

Digitized by Google

Problem einer künstlichen Sprache“ (1859) bezeugt. Bekannt ist sein Interesse für das Studium der deutschen Sprache; als stehender Gast verkehrte er in dem Hause des Germanisten Müllenhoff, und ebenso war er ein häufiger Besucher des germanistischen Vereins der Studierenden an der Berliner Universität. Die Vereinfachung der deutschen Orthographie befürwortete und förderte er mit allen Kräften.

Bei der Vorführung der litterarischen Thätigkeit Hoppes können wir nicht an den Rezensionen vorübergehen, die er in den litterarischen Berichten seines Archivs 28 Jahre lang veröffentlicht hat, weil sie einerseits wohl die am meisten gelesenen Erzeugnisse seiner Feder sind, andererseits einen Ausfluſs seines Denkens darstellen, aus dem seine abgeschlossene Natur leichter und besser erkannt werden kann, als aus seinen sonstigen Schriften. Obenan steht ihm das Urteil über die Prinzipien einer Schrift, und wehe dem Autor, der sich in der Fassung derselben eine Blöſse giebt! Mit scharfem Messer macht der Kritiker einen Schnitt in das ungesunde Fleisch und begründet mit dem Endergebnis einer erbarmungslosen Sektion sein Verdammungsurteil. Als ein Beispiel möge die Anzeige der neunten Auflage von Sturms Cours d'analyse dienen. Von diesem weit verbreiteten und auch in Deutschland ungemein beliebten Lehrbuch hatte er offenbar noch nichts gewuſst, als er es zur Beurteilung erhielt. Mit ernstem Gesicht berichtet er zuerst über die dem Werke vorausgeschickte Lebensbeschreibung Sturms, als ob er zum ersten Male von diesem Mathematiker gehört hätte. Dann aber wird aus der vorbereitenden Theorie der Grenzwerte ein Satz herausgegriffen, der eine Unklarheit enthält. Der Satz wird von allen Seiten beleuchtet, und die sich an ihn knüpfende Sturmsche Erörterung über den Begriff der unendlich kleinen Gröſsen wird als rätselhaft und dunkel verworfen. Mithin folgt das Schlufsurteil: „Das Angeführte zeigt zur Genüge, daſs das Buch den Anfängern der Analysis nicht zu empfehlen ist.“ Den eigentlichen Inhalt des Werkes näher zu prüfen, hielt er offenbar nach Entdeckung logischer Unklarheiten in den Prinzipien nicht für nötig; er fragte auch gar nicht danach, warum denn das Werk, das erst nach dem Tode Sturms erschienen war, zum neunten Male aufgelegt worden war.

Es liegt mir natürlich fern, dieses einseitige Vorgehen, das ihn mehr als einmal zu groſsen Ungerechtigkeiten und Fehlgriffen verführte, gutheiſsen zu wollen. Weil er aber bei diesen Rezensionen, durch das Streben nach äuſserster Klarheit geleitet, in der schroffen Starrheit seiner Natur sich manche Feinde gemacht hat, so konnte ich diesen Fehler hier nicht verschweigen, wollte mich aber bemühen, ihn aus der philosophischen Anlage seines Geistes zu erklären, und wenn das

Digitized by Google

Wort „tout comprendre, c'est tout pardonner" zugegeben wird, so werden wir diese Schwäche, die aus einem gewissen furor philosophicus eines in wissenschaftlichen Dingen starren und unnachgiebigen Sinnes hervorging, dem stets nach Wahrheit suchenden toten Freunde vergeben, vergessen, verzeihen.

Als Leiter des Archivs war Hoppe unermüdlich thätig; er selbst steuerte in jedem Bande eine gröfsere Anzahl von Originalartikeln bei. Man darf wohl sagen, dafs er durch die Redaktion angeregt worden ist, vieles zu schreiben, was er sonst unbearbeitet hätte ruhen lassen, dafs überhaupt die Schriftleitung des Archivs seinem Alter das zusagende Lebenselement geworden ist. Je länger er aber diese Thätigkeit ausübte, um so mehr trat bei ihm der schon berührte Mangel an Fähigkeit hervor, in fremde Gedanken verständnisvoll einzudringen. Dadurch gelang es besonders im letzten Jahrzehnt manchen gerngrofsen und schreibseligen Autoren von kleinem Wissen und geringem Können, die minderwertigen oder auch widersinnigen Produkte ihrer Feder dem allzu vertrauensvollen Leiter des Archivs aufzureden. Wer wollte darüber aber mit einem achtzigjährigen Greise hadern?

Beim Rückblick auf die gesamte litterarische Wirksamkeit Hoppes erhalten wir das Bild eines Mannes, der von seiner Jugend an, ohne nach äufserem Erfolge zu schielen, in ernstem Forschen stets die Wahrheit gesucht und darin einen echt wissenschaftlichen Geist bekundet hat. In harter Gedankenarbeit ringt er sich zu derjenigen Erkenntnis durch, die er als die einzige, dem Menschen mögliche Stufe des Wissens ansieht. Das Suchen und Forschen nimmt ihn so gefangen, dafs er darüber die Ansprüche des praktischen Lebens vernachlässigt. Nicht ohne Starrheit im Eigenen, geht er schwer in fremde Gedanken ein, so beurteilte ihn Trendelenburg nach seiner ersten philosophischen Schrift und traf damit sein innerstes Wesen. Einem Diogenes verglich ihn der Prediger Witte in der geistvollen und künstlerisch abgerundeten Rede bei der Trauerfeier auf dem Friedhofe. Wie er lehrte, dafs der Mensch eine Seele sei, die einen Leib habe, so erzog er sich in der harten und bitteren Schule des Lebens zu einer staunenswerten Bedürfnislosigkeit, die sich zu einer Mifsachtung der äufseren Erscheinungsform steigerte. In seine Gedankenwelt versunken, schritt er wie ein Fremdling dieser Welt durch das Leben und erweckte wohl den Anschein eines Träumers, der an der Umgebung wenig teilnähme. Schüchtern und linkisch erschien zuerst sein Auftreten. Dennoch war er in der Unterhaltung mit seinen Gedanken bei der Sache, und wer in seiner Gegenwart einen ihm nicht zusagenden Ausspruch that, konnte sicher sein, von ihm ebenso

Digitized by Google

schneidig zurechtgewiesen zu werden, wie der unachtsame Verfasser eines Buches wegen des Niederschreibens eines nicht stichhaltigen Satzes. Aber auch seine Zustimmung zu Ansichten, die er teilte, konnte er bei solchen Gelegenheiten freudig und rückhaltlos kundgeben.

Wer Hoppe aus seinen Schriften kennen gelernt hatte und später seine persönliche Bekanntschaft machte, war immer zuerst enttäuscht. Der sichere Schriftsteller von klarem Geiste, der mit aller Entschiedenheit und Furchtlosigkeit das scharfe Schwert strenger Logik handhabte und in knapper, schlichter Rede alle Dunkelheiten beseitigte, erschien wie ein Hilfsbedürftiger in der menschlichen Gesellschaft, der erst ermutigt werden müfste, seine Zurückhaltung aufzugeben und seine Meinung zu äufsern.

Aus dem klaffenden Risse zwischen seiner geistigen Bedeutung und der leiblichen Persönlichkeit erklärt sich bei ihm der Mangel an Erfolg in seinem Lebenslaufe. Obschon seine Entdeckungen nicht derartig sind, dafs sie ihm neben den ersten führenden Geistern seiner Fächer einen Platz sicherten, hätten sie wohl hingereicht, ihm den Anspruch auf eine Professur an einer Hochschule zu verleihen, die andere Gelehrte mit geringeren Leistungen erhielten. Seiner Persönlichkeit blieb aber, wie auf dem Gymnasium, so an der Universität ein fruchtbarer Erfolg der Lehrthätigkeit versagt. Bei seiner Geburt hatte die gütige Fee gefehlt, die ihm zu den Gaben des Geistes Anmut und Beredsamkeit hätte in die Wiege legen müssen, und da somit die Grazien leider ausblieben, so mufste er unter dem Szepter der grimmen Ἀνάγκη bis an sein Ende in bescheidener Stellung ausharren. Ich selbst habe im Sommer 1862 bei ihm das Kolleg über elliptische Funktionen gehört, das einen Bestandteil der regelmäfsigen Folge seiner Vorlesungen: Differentialrechnung und Reihentheorie, analytische Geometrie, Integralrechnung, elliptische Funktionen, analytische Mechanik bildete. Wie verlegen schob er sich durch die nur halb geöffnete Thür; ohne einen Blick auf die Höreschaft zu werfen, bestieg er das Katheder, entnahm der Rocktasche das sehr sorgfältig ausgearbeitete Manuskript, wandte den Hörern den Rücken zu, um, aus den damals schon vergilbt aussehenden Blättern lesend, die Formeln an der Wandtafel niederzuschreiben. Der freien Rede gar nicht mächtig, konnte er in der Eintönigkeit des so gesprochenen Vortrages die Studenten nicht fesseln. Von den zuerst anwesenden Zuhörern — es mochten wohl mehr als ein Dutzend sein — verliefen sich in den ersten vierzehn Tagen die meisten, und bald blieb ich mit nur noch einem Hörer zurück, dem Hrn. Krech; wir beide aber harrten aus, und ich

Digitized by Google

mufs bekennen, dafs der Inhalt der nach Jacobis Muster gehaltenen und von mir ausgearbeiteten Vorlesung durchaus gediegen war. Die Vorlesungshefte der sämtlichen Kollegien wird er damals mit gleicher Sorgfalt ausgearbeitet haben; denn alle übernommenen Pflichten fafste er sehr ernst auf und folgte somit im sittlichen Handeln dem kategorischen Imperativus von Kant, den er als Philosophen sonst heftig befehdete. In der Ablieferung versprochener Arbeiten war er unbedingt zuverlässig; das werden alle Redakteure der Fortschritte der Physik erfahren haben, gerade wie ich als Herausgeber des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik, an welchem er seit der Gründung desselben Mitarbeiter gewesen ist. Da er immer einer der ersten war, der seine Referate übergab, so konnten seine letzten Beiträge zu dem gegenwärtig im Drucke befindlichen Bande noch nach seinem bereits erfolgten Abscheiden den betreffenden Kapiteln einverleibt werden. Gefällig wie er war, erwies er sich überhaupt stets zu Dienstleistungen bereit.

Bewundernswert ist die Gelassenheit, mit der sich Hoppe in der Lebenslage zurecht fand, die er nach freier Wahl zu tragen hatte. Mit wahrhaft philosophischer Ruhe hat er bis in das reife Mannesalter hinein alle Nöte des Lebens auf sich genommen; in seinem Mannesstolze wollte er sein Leben ebenso selbständig und unabhängig führen, wie er in der Wissenschaft in voller Freiheit sein Denken geregelt hatte. Unter seinen Brüdern galt er in leiblicher Beziehung als der am schwächsten Beanlagte. Trotz aller Entbehrungen, denen er sich unterwarf, hat er diese Brüder alle überlebt und das Wort bewahrheitet, das seiner Philosophie entlehnt sein könnte: „Es ist der Geist, der sich den Körper baut.“ Als er später durch die Übernahme der Redaktion des Archivs und durch die einsichtige Fürsorge der philosophischen Fakultät besser gestellt wurde, nahm er am Leben der Gesellschaft einen stärkeren Anteil. Er freute sich, bei den Naturforscherversammlungen erscheinen zu können, und übernahm einige Male Vorträge bei denselben, deren Inhalt stets philosophisch gefärbt war. Besonders gern suchte er das Gebirge auf, wo es ihm, wie er sagte, grofses Vergnügen machte, nach mühevollem Steigen auf den harten Schädel eines solchen stolzen Bergriesen mit seinen Füfsen zu treten. Anspruchslos, wie er war, gab er auf diesen Reisen einen verträglichen Wandergenossen ab. Im übrigen kann man nicht sagen, dafs er bei seinem einsiedlerischen Leben als unverheirateter Mann enge Freundschaft mit jemandem geschlossen hätte. Und doch verband ihn eine treue Anhänglichkeit mit den Kreisen, in denen er verkehrte. Die Nachsitzungen der Physikalischen Gesellschaft besuchte er regelmäfsig

Digitized by Google

bis in den Anfang dieses Jahres hinein, ebenso die zwanglosen Zusammenkünfte, die im Anschlusse an das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik allmonatlich stattfinden. So sicher erschien er dort, dafs sein Ausbleiben im Frühjahr als das erste Symptom seiner beginnenden Auflösung betrachtet wurde. In gleicher Weise trat er geräuschlos bei seinen Verwandten ein, wo er sich an der Musik ergötzte, und bei befreundeten Familien, in denen er manchen Abend zubrachte. Äufserlich konnte es den Anschein haben, als ob nur eine liebe Gewohnheit den stillen Greis an die Kreise bände, in denen er seit alter Zeit verkehrte; denn oft genug entfernte er sich, ohne kaum ein Wort gesprochen zu haben. Wer vermöchte jedoch in die Geheimnisse eines so gedankenreichen Geistes zu schauen? Die Anhänglichkeit an seine Verwandten wird durch das Testament bezeugt, in welchem er eine Familienstiftung errichtet hat; aus ihr sollen vorläufig für direkte Nachkommen seiner Eltern alljährlich zwei Schüler- und zwei Studienstipendien gezahlt werden. Indem er dabei bestimmt hat, dafs das weibliche Geschlecht ebenso wohl zu berücksichtigen ist wie das männliche, hat er, der im Zölibat Verharrende, einen augenscheinlichen Beitrag zu seinen Ansichten über die Frauenfrage geliefert.

In häufigerem Verkehr mit Hoppe übersah man bald die Äufserlichkeiten, an denen man beim ersten Anblick Anstofs nehmen konnte. Aus der anfänglichen Duldung erwuchs Achtung, ja Verehrung auf Grund seiner charaktervollen Natur. Es blieb der Eindruck seines Denkerhauptes, das Bewufstsein des Anschauens einer abgeschlossenen Persönlichkeit von ausschliefslich wissenschaftlichem Streben, die im Denken und im Handeln furchtlos alle Konsequenzen zog und trug. Die allgemeine Achtung, in der er stand, zeigte sich bei der Feier, die veranstaltet wurde, als er sein achtzigstes Lebensjahr vollendete, und zu der sich die Mathematiker der Hochschulen Berlins, viele Mitglieder der Physikalischen Gesellschaft und zahlreiche Freunde des nun Verstorbenen vereinigten. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung ehrte ihn durch einen herzlichen Glückwunsch; vom Staate wurde er durch Verleihung des Kronenordens dritter Klasse ausgezeichnet, da ihm schon früher der Rote Adlerorden vierter Klasse verliehen worden war. Der mathematische Verein der Universität Berlin veranstaltete ihm zu Ehren einen Festkommers.

Was an ihm sterblich war, ist nun dahin; geblieben ist die Erinnerung an einen ehrlichen Mann, der durch sein Leben den Ausspruch widerlegt hat, die Originale seien ausgestorben. Für ihn tönt der Gesang der Engel: „Wer immer strebend sich bemüht, den können wir

Digitized by Google

erlösen.“ Wir haben ihn geschaut als einen iustum et tenacem propositi virum, der trotz des Mangels an äußerer Anerkennung der Fahne der Wissenschaft treu geblieben ist, und der in der inneren Klarheit das höchste Glück eines befriedigten Daseins gefunden hat. In dieser Verklärung wird sein Andenken bei allen weiterleben, die mit ihm in Berührung gekommen sind, und somit für immer gesegnet sein.

Digitized by Google

Extrait d'une Lettre à M. E. Jahnke;

Par M. Ch. Hermite.

Paris, 25 novembre 1900.

. . . Vous avez eu bien raison de compter absolument sur mon entière sympathie pour l'œuvre excellente que vous avez entreprise, qui complète la littérature périodique des Mathématiques de l'Allemagne par une publication analogue à celles que nous avons depuis longtemps, et qui concernent les candidats aux grandes écoles du gouvernement, l'École Normale et l'École Polytechnique, entre autres.

J'ai toujours été et jusqu'à mon dernier jour je serai encore un disciple de vos grands géomètres, de vos maîtres illustres, Gauss, Jacobi, Dirichlet; d'autres comme Kronecker, Borchardt, Mr Lipschitz etc. ont été les compagnons de mes études et mes amis dévoués.

C'est une dette de reconnaissance, léguée par leurs chers souvenirs, dont j'aurais à coeur de m'acquitter en me faisant votre collaborateur, avec l'intention de servir, auprès des étudiants de vos universités, l'intérêt du savoir mathématique.

Vous me permettez peut-être de vous dire dans quel sens je désirerais voir se diriger l'influence, l'action de votre nouvelle publication. L'enseignement, même très élémentaire, peut mettre à profit les œuvres du génie lorsqu'il arrive qu'elles concernent directement son objet.

Prenez, par exemple, l'idée de Dirichlet, à la fois si simple et si profonde, concernant les minima des fonctions linéaires à indéterminées entières, n'est-elle pas exposée avec la théorie des fractions continues?

Bacon de Verulam a dit que l'admiration est le principe du savoir; sa pensée qui est juste en général, l'est surtout à l'égard de notre science, et je m'en autoriserai pour exprimer le désir qu'on fasse, pour les étudiants, la part plus large aux choses simples et belles qu'à l'extrême rigueur, aujourd'hui si en honneur, mais bien peu attrayante, souvent même fatigante, sans grand profit pour le commençant qui n'en peut comprendre l'intérêt. Nos professeurs de Lycée consacrent beaucoup de temps à définir laborieusement, péniblement, les racines

Digitized by Google

carrées, cubiques etc. des nombres entiers, et ne disent rien, parce qu'ils ne peuvent rien dire (le Mémoire capital de Weierstrass étant d'un trop difficile accès) des racines des équations du 3me, du 4me degré etc., à coefficients entiers, qui réclament aussi le droit à l'existence.

Le luxe et la misère sont ici qui se touchent de trop près, et à l'égard des irrationnelles numériques j'aimerais bien mieux apprendre aux commençants, ce qui agrandirait leur horizon, sans leur demander d'efforts, la démonstration aussi simple qu'élégante de Wantzel que la somme d'un nombre quelconque de radicaux carrés, cubiques etc. est incommensurable, comme chacun de ses termes.

Je pourrais invoquer bien d'autres exemples, à l'appui de la préférence, que je donnerais en principe et surtout au début à la science attrayante sur la rigueur, mais en ce moment il me faut vous dire un mot du prochain article auquel j'ai songé, et que sans mon indisposition, j'aurais rédigé pour vous l'envoyer.

Il aura pour titre „Sur une équation transcendante". Il concerne l'équation

$$\operatorname{tg} x = x$$

traitée par Cauchy dans ses anciens exercices, et aura pour objet de démontrer ce que le grand géomètre se borne à énoncer, que toutes les racines sont données par la formule

$$x = (n + \tfrac{1}{2})\pi - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi} - \frac{2}{3}\frac{1}{[(n+\frac{1}{2})\pi]^3} - \cdots$$

en supposant $n = 0, \pm 1, \pm 2$, etc. Je le généraliserai un peu, en considérant au lieu de $\operatorname{tang} x = x$, l'équation

$$D_x \frac{\operatorname{sn} x}{x} = 0;$$

ce sera pour répondre à votre bienveillante demande, en attendant mieux. . . .

Digitized by Google

Sur une équation transcendante[1]);

Par M. Ch. Hermite à Paris.

On trouve, dans le Ier volume des Exercices Mathématiques de Cauchy, un Mémoire d'une grande importance, ayant pour titre: Sur la nature des racines de quelques équations transcendantes (Oeuvres, (2) VI, p. 354), contenant ce beau résultat que les racines de l'équation $\operatorname{tang} z = z$ sont représentées par la formule

$$z = \frac{(2n+1)\pi}{2} - \frac{2}{(2n+1)\pi} - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]^3 - \frac{13}{15}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]^5 - \frac{146}{105}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]^7 - \cdots$$

en attribuant à n toutes les valeurs entières positives et négatives. Le rôle de cette équation dans la théorie de la chaleur m'a engagé à en chercher la démonstration, et j'ai remarqué qu'une méthode entièrement élémentaire conduit à une conclusion toute semblable sur la relation plus générale

$$\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z} = z,$$

ou bien

$$\operatorname{sn} z - z D_z \operatorname{sn} z = 0.$$

Je vais l'indiquer en peu de mots dans cette Note.

Soit à cet effet

$$F(z) = \operatorname{sn} z - z D_z \operatorname{sn} z;$$

nous aurons pour la dérivée l'expression suivante

$$F'(z) = -z D_z^2 \operatorname{sn} z,$$

qu'on peut mettre sous cette forme:

$$F'(z) = z \operatorname{sn} z \,(k^2 \operatorname{cn}^2 z + \operatorname{dn}^2 z).$$

---

1) Mit wehmütigen Empfindungen wird der Mathematiker diese Notiz lesen. Ist es doch die letzte Arbeit des grofsen Franzosen, welche das Archiv der mathematischen Welt vorzulegen die Ehre hat.

Hermite hat eine Korrektur der Abhandlung gerade noch lesen können. Auf seinen Wunsch wurde ihm auch eine Revision zugeschickt, an deren Durchsicht ihn der Tod verhindert hat. Red.

Digitized by Google

Elle fait voir que les racines réelles de la dérivée sont uniquement $x = 0$ qui est racine double, et $x = 2nK$, où $n = \pm 1, \pm 2$, etc. J'ajoute qu'ayant

$$F(x + 2nK) = (-1)^n [\operatorname{sn} x - (x + 2nK) D_x \operatorname{sn} x],$$

et par conséquent, si l'on fait $x = 0$,

$$F(2nK) = (-1)^{n+1} 2nK,$$

il est prouvé que la substitution de deux racines consécutives de la dérivée, dans le premier membre $F(x)$, donne des résultats de signes contraires. L'équation proposée, en outre d'une racine triple qui est nulle, en admet donc une infinité d'autres, toutes réparties entre les deux limites $2nK$ et $(2n+2)K$; ce sont leurs valeurs sous forme de développements en séries, que je me propose maintenant d'obtenir.

Soit pour cela

$$x = (2n + 1)K - \zeta,$$

on trouvera l'équation

$$\frac{\operatorname{cn} \zeta}{\operatorname{dn} \zeta} - [(2n + 1)K - \zeta] \frac{k'^2 \operatorname{sn} \zeta}{\operatorname{dn}^2 \zeta} = 0.$$

Cette nouvelle égalité peut encore s'écrire:

$$(2n + 1)K = \zeta + \frac{\operatorname{cn} \zeta \operatorname{dn} \zeta}{k'^2 \operatorname{sn} \zeta},$$

et nous pouvons alors lui appliquer la série de Lagrange concernant la relation générale $\zeta = a + \alpha f(\zeta)$, lorsqu'on fait la supposition de $a = 0$. Pour cela nous poserons

$$\alpha = \frac{1}{(2n + 1)K},$$

nous multiplierons les deux membres par ζ, et en faisant

$$f(\zeta) = \zeta^2 + \frac{\zeta \operatorname{cn} \zeta \operatorname{dn} \zeta}{k'^2 \operatorname{sn} \zeta},$$

nous obtiendrons précisément cette forme analytique d'où l'on tire:

$$\zeta = \alpha f(a) + \frac{\alpha^2 D_a [f^2(a)]}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^3 D_a^2 [f^3(a)]}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

On observera en en faisant l'application, que la fonction $f(\zeta)$ étant paire, les dérivées d'ordre impair des puissances de $f(a)$ disparaissent pour $a = 0$; la série ne contient donc que des puissances impaires de α, et ses divers termes se calculent sans peine, en partant de l'expression

$$f(a) = a^2 + \frac{a D_a \log \operatorname{sn} a}{k'^2}.$$

Ayant en effet

$$\log \operatorname{sn} a = \log a - \frac{(1 + k^2) a^2}{2 \cdot 3} - \frac{(1 - 16k^2 + k^4) a^4}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5} - \frac{(1 + 30k^2 + 30k^4 + k^6) a^6}{3^4 \cdot 5 \cdot 7} - \cdots,$$

Digitized by Google

nous en concluons:

$$k'^2 f(a) = 1 + \frac{(2-4k^2)a^2}{3} - \frac{(1-16k^2+k^4)a^4}{3^2\cdot 5} - \frac{(2+60k^2+60k^4+k^6)a^6}{3^2\cdot 5\cdot 7} - \cdots,$$

et l'on en tire:

$$\zeta = \frac{\alpha}{k'^2} + \frac{(2-4k^2)\alpha^3}{3k'^6} + \frac{(13-48k^2+53k^4)\alpha^5}{15k'^{10}} + \cdots$$

Il en résulte pour l'expression des racines de l'équation considérée, $\operatorname{sn} z - z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z = 0$, la formule

$$z = (2n+1)K - \frac{1}{(2n+1)k'^2K} - \frac{2-4k^2}{3[(2n+1)k'^2K]^3} - \frac{13-48k^2+53k^4}{15[(2n+1)k'^2K]^5} - \frac{2(219-1642k^2+1328k^4-1839k^6)}{315[(2n+1)k'^2K]^7} - \cdots$$

qui donne bien, lorsqu'on fait $k=0$ et $K=\frac{\pi}{2}$, le résultat de Cauchy concernant l'équation $\operatorname{tang} z = z$.

C'est dans le problème du refroidissement d'une sphère qu'on la rencontre; elle s'offre aussi dans une question plus élémentaire, quand on cherche les maxima et minima de la fonction $\frac{\sin x}{x}$, et donne lieu alors à une remarque à laquelle je m'arrêterai un moment.

Nous avons en effet

$$D_x \frac{\sin x}{x} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2},$$

et l'on voit facilement que les maxima et les minima correspondent aux racines pour lesquelles $\frac{\sin x}{x}$ est positif ou négatif. En désignant les premières par a et les autres par b, on aura ainsi

$$\frac{\sin a}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}},$$

$$\frac{\sin b}{b} = \frac{-1}{\sqrt{b^2+1}}.$$

Nous observerons encore que les maxima formant une suite décroissante, on a, pour des valeurs positives de x, l'inégalité

$$\frac{\sin a}{a} > \frac{\sin(a+x)}{a+x}$$

et on trouverait semblablement la relation

$$\frac{\sin b}{b} < \frac{\sin(b+x)}{b+x}.$$

Nous pouvons aussi poser

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin \xi}{\xi}$$

entre les limites $x=0$ et $x=\xi$, cette quantité ξ ne dépassant pas la

Digitized by Google

valeur à laquelle correspond le premier minimum. On peut donc prendre $\xi = \frac{\pi}{2}$, d'où cette limitation:

$$\sin x > \frac{2x}{\pi}$$

qu'il n'est pas inutile de joindre à la relation $\sin x < x$, dont il est continuellement fait usage.

J'en donnerai une application en cherchant l'expression du terme complémentaire R_n dans la série élémentaire

$$\sin x = x - \frac{x^3}{\Gamma(4)} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{\Gamma(2n)} + (-1)^n R_n,$$

où l'on a

$$R_n = \frac{1}{\Gamma(2n)} \int_0^x (x-y)^{2n-1} \sin y \, dy.$$

Attribuons à x une valeur positive quelconque, mais moindre que π, afin que $\sin x$ soit aussi positif; nous pouvons écrire avec un facteur $\Theta < 1$

$$\int_0^x (x-y)^{2n-1} \sin y \, dy = \Theta \int_0^x (x-y)^{2n-1} y \, dy$$

$$= \Theta \frac{x^{2n+1} \Gamma(2n)}{\Gamma(2n+2)},$$

et l'on en conclut

$$R_n < \frac{x^{2n+1}}{\Gamma(2n+2)}.$$

Limitons davantage la valeur de x, et supposons $x < \frac{\pi}{2}$; l'inégalité précédente

$$\sin x > \frac{2x}{\pi}$$

donnera la relation

$$\int_0^x (x-y)^{2n-1} \sin y \, dy > \frac{2}{\pi} \int_0^x (x-y)^{2n-1} y \, dy,$$

et on en conclut

$$R_n > \frac{2}{\pi} \frac{x^{2n+1}}{\Gamma(2n+2)}.$$

Pour obtenir un résultat semblable à l'égard de cos x, nous partirons de l'égalité

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{\Gamma(3)} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{\Gamma(2n-1)} + (-1)^n R_n,$$

et de la formule

$$R_n = \frac{1}{\Gamma(2n-1)} \int_0^x (x-y)^{2n-2} \cos y \, dy.$$

Digitized by Google

Nous aurons ainsi

$$R_n < \frac{x^{2n}}{\Gamma(2n+1)},$$

et

$$R_n > \frac{2}{\pi}\frac{x^{2n}}{\Gamma(2n+1)},$$

limitations assez voisines, en remarquant le facteur $\frac{2}{\pi}$ étant peu différent de l'unité.

Je remarquerai en dernier lieu qu'aux conditions dont je viens de faire usage

$$\sin x < x,$$
$$\sin x > \frac{2x}{\pi},$$

on peut encore joindre les suivantes

$$\operatorname{tang} x > x,$$
$$\operatorname{tang} x < \frac{4x}{\pi},$$

la seconde supposant $x < \frac{\pi}{4}$.

Paris, 17 décembre 1900.

Digitized by Google

Über die geometrischen Bedingungen, denen die Unstetigkeiten der Derivierten eines Systems dreier stetigen Funktionen des Ortes unterworfen sind, und ihre Bedeutung in der Theorie der Wirbelbewegung.

Von J. Weingarten in Berlin-Charlottenburg.

Es bezeichne $\varphi\,(x, y, z)$ eine Funktion des durch rechtwinklige Koordinaten x, y, z in einem gegebenen Raume T bestimmten Orts, welche in diesem Raume überall eindeutige, endliche und nach der Stetigkeit sich ändernde Werte annimmt. In Beziehung auf die ersten Derivierten dieser Funktion möge die Änderung nach der Stetigkeit in allen Punkten von T nicht vorausgesetzt, sondern angenommen werden, dafs entlang einer Fläche S diese Derivierten eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden. Der der einen Seite der Fläche S anliegende Raumteil sei durch A, der der anderen Seite anliegende durch J bezeichnet, und dem entsprechend der Wert der Funktion $\varphi\,(x, y, z)$ in einem Punkte innerhalb A durch $\varphi_a\,(x, y, z)$, in einem Punkte innerhalb J durch $\varphi_i\,(x, y, z)$ angedeutet. Für einen Punkt, der auf der Fläche S selbst liegt, ist es gleichgiltig, ob man ihn dem Raume A oder dem Raume J angehörig betrachten will, da innerhalb dieser Fläche, der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktion φ wegen, die Gleichung

$$\varphi_i\,(x, y, z) - \varphi_a\,(x, y, z) = 0$$

erfüllt ist, ebenso wie die aus ihr folgende:

$$d\varphi_i\,(x, y, z) - d\varphi_a\,(x, y, z) = 0,$$

in der die Differentiale sich nur auf Änderungen dx, dy, dz der Koordinaten x, y, z beziehen, die zu einem zweiten auf der nämlichen Fläche S liegenden Punkte führen. Giebt man dieser Gleichung die Form

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_i\right]dx + \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_a - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_i\right]dy + \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_a - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_i\right]dz = 0,$$

so stellt sie die Differentialgleichung der Fläche S dar, da nach der Voraussetzung über die ersten Derivierten der Funktion φ die Faktoren

Digitized by Google

der Differentiale dx, dy, dz in dieser Gleichung für alle Punkte der Fläche S, einzelne eine Fläche nicht erfüllende Punkte oder Linien ausgenommen, bestimmte von Null verschiedene Werte annehmen werden. Bezeichnet man der Kürze wegen die Differenz der Werte einer in der Fläche S unstetigen Funktion ψ, d. h. die Größe $\psi_i - \psi_a$ durch $\delta\psi$, so nimmt die vorstehende Differentialgleichung die Gestalt

$$\delta\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \delta\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \delta\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = 0$$

an und führt zu den Gleichungen

$$\delta\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lambda\cos\alpha, \quad \delta\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \lambda\cos\beta, \quad \delta\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \lambda\cos\gamma,$$

$$\lambda = \delta\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \delta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \delta\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma = \delta\frac{d\varphi}{dn},$$

in denen α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche die im Punkte (x, y, z) der Fläche S aus dem Raumteil A in den Raumteil J gerichtete Normale mit den Koordinatenaxen bildet, und unter $\frac{d\varphi}{dn}$ der Differentialquotient der Funktion φ nach der von A gegen J positiv gezählten Normale verstanden ist.

Aus dem nunmehr erlangten Gleichungssystem

$$\text{(I)} \quad \delta\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \delta\frac{d\varphi}{dn}\cos\alpha, \quad \delta\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \delta\frac{d\varphi}{dn}\cos\beta, \quad \delta\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \delta\frac{d\varphi}{dn}\cos\gamma$$

ersieht man leicht, daß die drei Derivierten einer im Raume T durchweg stetigen Funktion φ entlang einer Fläche S zugleich mit dem Differentialquotienten dieser Funktion nach der Normale von S stetig oder unstetig sind.

Wenn man diese einfache Bemerkung auf ein System von drei im Raume T stetigen Funktionen u, v, w des Ortes, deren Differentialquotienten in einer und der nämlichen Fläche S Unstetigkeiten erleiden, anwenden will, so erweist es sich für die Vereinfachung der Ausdrucksweise als zweckgemäß, gewisse aus den ersten Derivierten dieser Funktionen gebildete neue Funktionen des Ortes durch besondere Benennungen auszuzeichnen.

Wir werden in der Folge die drei Funktionen

$$\text{(II)} \quad \xi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad \eta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right), \quad \zeta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

als die zum Funktionssystem u, v, w im Punkte (x, y, z) des Raumes T gehörigen Rotationskomponenten und die Funktion

$$\text{(III)} \qquad \Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

als die zu diesem Funktionssystem im Punkte (x, y, z) gehörige Dilatation bezeichnen.

Digitized by Google

Dieser Bezeichnung gemäfs soll auch die Quadratwurzel aus der Quadratsumme der ξ, η, ζ als die zu dem Funktionssysteme u, v, w gehörige Rotation im Punkte (x, y, z), und die durch ihn gezogene Gerade, deren Richtung durch die Gleichungen

$$\cos\lambda = \frac{\xi}{\omega}, \quad \cos\mu = \frac{\eta}{\omega}, \quad \cos\nu = \frac{\zeta}{\omega},$$

$$\omega = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

bestimmt ist, als die dortige Rotationsaxe bezeichnet werden.

Die gleichzeitige Anwendung der Gleichungen (I) auf das System der drei Funktionen u, v, w, für welche unstetige Änderungen der ersten Derivierten in der Fläche S vorausgesetzt werden, ergiebt die in jedem Punkte dieser Fläche statthabenden Gleichungen:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \delta\xi = \frac{1}{2}\left(\delta\frac{dv}{dn}\cos\gamma - \delta\frac{dw}{dn}\cos\beta\right), \\ \delta\eta = \frac{1}{2}\left(\delta\frac{dw}{dn}\cos\alpha - \delta\frac{du}{dn}\cos\gamma\right), \\ \delta\zeta = \frac{1}{2}\left(\delta\frac{du}{dn}\cos\beta - \delta\frac{dv}{dn}\cos\alpha\right), \\ \delta\Theta = \delta\frac{du}{dn}\cos\alpha + \delta\frac{dv}{dn}\cos\beta + \delta\frac{dw}{dn}\cos\gamma, \end{cases}$$

aus welchen man sogleich die ferneren ableitet:

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} \delta\frac{du}{dn} = 2\,(\delta\zeta\cos\beta - \delta\eta\cos\gamma) + \delta\Theta\cos\alpha, \\ \delta\frac{dv}{dn} = 2\,(\delta\xi\cos\gamma - \delta\zeta\cos\alpha) + \delta\Theta\cos\beta, \\ \delta\frac{dw}{dn} = 2\,(\delta\eta\cos\alpha - \delta\xi\cos\beta) + \delta\Theta\cos\gamma. \end{cases}$$

Aus diesen letzteren ersieht man, dafs, wenn für ein Funktionssystem u, v, w die Rotationskomponenten und die Dilatation keine Unstetigkeiten entlang einer Fläche erleiden, auch die neun ersten Derivierten dieser Funktionen in dem Raume T durchweg stetig sind.

Wählt man für diese Funktionen u, v, w die drei als stetig vorausgesetzten ersten Derivierten einer Funktion φ, so folgt aus dem vorhergehenden der speziellere Satz, dafs die zweiten Derivierten dieser Funktion φ sich im ganzen Raume T nach der Stetigkeit ändern, sobald der zweite Differentialparameter von φ sich in diesem Raume nach der Stetigkeit ändert.

Wenn man ferner die drei ersten der Gleichungen (IV) der Reihe nach mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ multipliziert und die Resultate addiert, so folgt die für jeden Punkt der Fläche S giltige Gleichung

$$\text{(VI)} \qquad \delta\xi\cos\alpha + \delta\eta\cos\beta + \delta\zeta\cos\gamma = 0,$$

Digitized by Google

das heifst:

(VI*) $\xi_i \cos\alpha + \eta_i \cos\beta + \zeta_i \cos\gamma = \xi_a \cos\alpha + \eta_a \cos\beta + \zeta_a \cos\gamma.$

Diese wichtige Gleichung zeigt, dafs, wenn auch die Rotationskomponenten eines Funktionssystems u, v, w (beziehungsweise die neun ersten Derivierten dieser Funktionen) beim Durchgange durch eine Fläche S sich sprungweise ändern, die *Komponente der Rotation nach der Normale von S* beim Durchgange durch diese Fläche eine Unterbrechung der Stetigkeit nicht erleidet.

Wir wollen nunmehr einen Raum A, in welchem die dem Systeme u, v, w zugehörigen Rotationskomponenten ξ, η, ζ durchweg verschwinden, als einen für das betreffende Funktionssystem *rotationsfreien* Raum, und einen Raum J, in welchem die Komponenten ξ, η, ζ von Null verschiedene Werte besitzen (einzelne einen Raumteil nicht erfüllende Punkte oder Linien ausgenommen) als einen für dies Funktionssystem *nicht rotationsfreien* Raum bezeichnen. In der Grenzfläche S, die einen nicht rotationsfreien Raumteil J des Raumes T von einem rotationsfreien Raumteil A scheidet, werden die Rotationskomponenten ξ_i, η_i, ζ_i entweder sprungweise aus nicht verschwindenden Werten in Null übergehen oder, wenn durchgängige Stetigkeit der Werte von ξ, η, ζ im Raume T vorausgesetzt wird, längs der ganzen Grenzfläche verschwinden. Wird zunächst das Eintreten des ersteren Falles vorausgesetzt, eine Voraussetzung, die mit der Annahme einer Unstetigkeit in den ersten Derivierten der Funktionen u, v, w zusammenfällt, so lehrt die Gleichung (VI*) den Satz:

Wenn eine Fläche S den für das Funktionssystem u, v, w rotationsfreien Raum A von dem nicht rotationsfreien Raume J derart scheidet, dafs in ihr die Werte der Rotationskomponenten ξ_i, η_i, ζ_i aus nicht verschwindenden Werten unstetig in Null übergehen, so ist in jedem Punkte der Grenze des Raumes J die Rotationsaxe notwendig eine Tangente an die Grenzfläche S.

Wird dagegen vorausgesetzt, dafs die zum Funktionssysteme u, v, w gehörigen Rotationskomponenten ξ, η, ζ, d. h. die ersten Derivierten von u, v, w im ganzen Raume T durchgängig stetig sind, so werden an der Scheidungsfläche S eines nicht rotationsfreien Raumes J und eines rotationsfreien Raumes A notwendiger Weise höhere Derivierten der Funktionen ξ, η, ζ Unstetigkeiten erleiden, wenn nicht der gesamte Raum T rotationsfrei sein soll, was gegen die Voraussetzung wäre. Nehmen wir zunächst das Bestehen solcher Unstetigkeiten für die ersten Derivierten der Funktionen ξ, η, ζ an, und bezeichnen durch ξ', η', ζ' die zu dem Funktionssystem ξ, η, ζ gehörigen Rotationskomponenten, d. h. die durch die Gleichungen

Digitized by Google

$$\xi' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right), \quad \eta' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial z}\right), \quad \zeta' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

gegebenen Größen, so ergeben sich aus V unter Berücksichtigung des Umstandes, daſs die Dilatation des Funktionssystems ξ, η, ζ im ganzen Raume T verschwindet, die Werte von ξ_a', η_a', ζ_a' aber, der Voraussetzung gemäſs im ganzen Raume A und an seiner Grenze der Null gleich sind, die nachstehenden für jeden Punkt der Fläche S bestehenden Gleichungen:

$$\left(\frac{d\xi}{dn}\right)_i = 2\,(\xi'\cos\beta - \eta'\cos\gamma),$$
$$\left(\frac{d\eta}{dn}\right)_i = 2\,(\xi'\cos\gamma - \zeta'\cos\alpha),$$
$$\left(\frac{d\zeta}{dn}\right)_i = 2\,(\eta'\cos\alpha - \xi'\cos\beta),$$

aus denen für die Rotationskomponenten ξ, η, ζ an einer Stelle des Raumes J, die sich auf der im Punkte (x, y, z) der Fläche S errichteten Normale in der unendlich kleinen Entfernung n von ihm befindet, die Werte:

$$\xi = 2n\,(\xi'\cos\beta - \eta'\cos\gamma),$$
$$\eta = 2n\,(\xi'\cos\gamma - \zeta'\cos\alpha),$$
$$\zeta = 2n\,(\eta'\cos\alpha - \xi'\cos\beta)$$

hervorgehen. Zwischen diesen Werten findet die Beziehung

$$\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma = 0$$

statt, welche aussagt, daſs in allen Punkten einer der Fläche S im Innern des Raumes J unendlich nahen Parallelfläche die dort zum Funktionssysteme u, v, w gehörige Rotationsaxe diese Parallelfläche tangiert.

Diese Aussage erweist sich auch leicht für die Annahme als giltig, daſs nicht die ersten, sondern höhere Differentialquotienten der Funktionen ξ, η, ζ längs der Grenzfläche S unstetig würden, in welchem Falle die Werte der ξ, η, ζ in unendlicher Nähe dieser Grenze entsprechenden höheren Potenzen der Entfernung n von ihr proportional sind.

Wenn man eine im Raume T verlaufende Linie, deren Tangente in jedem ihrer Punkte mit der dem Systeme der Funktionen u, v, w zugehörigen Rotationsaxe in dem betreffenden Punkte zusammenfällt, mit H. v. Helmholtz als eine diesem Systeme zugehörige *Wirbellinie* bezeichnet, d. h. wenn man die Wirbellinien des Raumes T durch die Differentialgleichungen:

(VII) $$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}$$

Digitized by Google

charakterisiert, so erkennt man nach dem bisher Vorgetragenen leicht das Zutreffen folgender Behauptungen:

Eine Wirbellinie, welche einen Punkt mit einer Grenzfläche gemein hat, die einen rotationsfreien Raum von einem nicht rotationsfreien Raume derart scheidet, dafs in dieser Grenzfläche die Rotation unstetige Wertänderungen erleidet, fällt in ihrem ganzen Verlaufe in diese Grenzfläche.

Eine Wirbellinie, welche einem Punkte einer Grenzfläche unendlich nahe kommt, die einen rotationsfreien Raum von einem nicht rotationsfreien Raume derart scheidet, dafs in dieser Grenzfläche die Rotation stetige Wertänderungen erleidet, fällt in ihrem ganzen Verlaufe in die durch diesen Punkt gelegte Parallelfläche der Grenzfläche.

Und wenn man sich einer von Beltrami eingeführten Bezeichnung bedient:

Die Begrenzungsfläche (beziehungsweise unendlich nahe innere Parallelfläche) eines ganz von rotationsfreien Räumen begrenzten nicht rotationsfreien Raumes ist notwendig ein *Vorticoïd*.

Man ersieht ferner, dafs eine Wirbellinie aus dem Inneren eines nicht rotationsfreien Raumes sich niemals bis an seine durch einen rotationsfreien Raum gebildete Begrenzung erstrecken kann.

Will man in einem Raume T, für welchen das durchgängig in ihm stetige Funktionssystem u, v, w bestehend gedacht wird, *nicht rotationsfreie* Räume von verschwindend kleinen Dimensionen voraussetzen, den Rotationswerten in diesen Räumen aber *endliche* Werte beilegen, so ist diese Voraussetzung notwendig mit der Voraussetzung der Unstetigkeit der Rotationskomponenten ξ, η, ζ in den diese Räume begrenzenden Oberflächen verbunden.

Unter dieser letzteren Voraussetzung verlieren die zur Begründung der Theorie der Wirbelbewegung üblich gewordenen Schlufsweisen ihre Berechtigung und lassen eine Lücke in dieser Theorie bestehen, deren Ausfüllung die gegenwärtige Mitteilung beabsichtigte. Wenn nämlich, wie notwendig, längs gewisser Oberflächen *unstetige* Änderungen der Gröfsen ξ, η, ζ im Innern eines nicht rotationsfreien Raumes vorausgesetzt werden, so ist aus den Gleichungen (VII) zwar ersichtlich, dafs eine die Unstetigkeitsfläche erreichende Wirbellinie an dieser Fläche bei ihrer Fortsetzung eine Brechung erleiden wird, wenn nicht etwa die Werte von ξ, η, ζ plötzlich alle drei gleichzeitig auf den Wert Null springen. Tritt dieser Fall ein, so fehlt dem Begriff der Fortsetzung jede Bestimmtheit. Durch Hinzuziehung der Gleichung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

Digitized by Google

und der aus ihr gefolgerten, *nur* für *stetig* veränderliche ξ, η, ζ als giltig erwiesenen Gleichung

$$\int(\xi\cos\alpha+\eta\cos\beta+\zeta\cos\gamma)\,d\sigma=0,$$

in welcher die Integration sich über alle Elemente der Oberfläche eines beliebig innerhalb des Raumes T ausgeschiedenen Volumens erstreckt und α, β, γ die Winkel der in $d\sigma$ auf dieser Oberfläche nach dem Innern errichteten Normale mit den Koordinatenaxen bezeichnen, sowie durch Einführung des Begriffs der Wirbelfäden, ist diese Unbestimmtheit unter der vorliegenden Voraussetzung nicht zu beseitigen.

Denn multipliziert man die in jedem Punkte des Raumes T erfüllte Gleichung

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0$$

mit dem Raumelemente $d\tau$ und summiert die erhaltenen Resultate über alle Elemente eines beliebig aus T abgesonderten geschlossenen Volumens, so wird man in bekannter Weise zu der Relation

$$0=\int(\xi\cos\alpha+\eta\cos\beta+\zeta\cos\gamma)\,d\sigma$$
$$+\int(\delta\xi'\cos\alpha'+\delta\eta'\cos\beta'+\delta\zeta'\cos\gamma')\,d\sigma'$$

geführt, in welcher das erste Integral die oben angegebene Bedeutung hat, dagegen das zweite über alle Elemente $d\sigma'$ derjenigen Flächen zu erstrecken ist, in denen ξ, η, ζ die endlichen Sprünge $\delta\xi'=\xi_i'-\xi_a'$, $\delta\eta'=\eta_i'-\eta_a'$, $\delta\zeta'=\zeta_i'-\zeta_a'$ erleiden, während die $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ sich auf diejenigen Winkel beziehen, welche die aus den Räumen A in die Räume J zeigende Normale des Elementes $d\sigma'$ mit den Koordinatenaxen bildet.

Erst die Gleichung (VI) lehrt, dafs die Elemente dieses zweiten Integrals verschwinden, und dafs daher die Gleichung

$$0=\int(\xi\cos\alpha+\eta\cos\beta+\zeta\cos\gamma)\,d\sigma$$

ihre Giltigkeit für Räume T, in denen ξ, η, ζ längs irgend welcher Flächen sich sprungweise ändern, nicht verliert. Diese Gleichung aber ist die Quelle des Satzes, dafs ein Wirbelfaden im Innern einer Flüssigkeit nicht endigen kann. Die von H. v. Helmholtz entdeckten geometrischen Eigenschaften der *Wirbelfäden* bestehen daher auch unter der Voraussetzung beliebiger Unstetigkeiten der Rotationswerte längs Flächen, die sich durch den Raum T erstrecken.

Charlottenburg, den 15. November 1900.

Digitized by Google

Sur les transformations conformes de l'espace à trois dimensions;

Par M. Gaston Darboux à Paris.

1. C'est à J. Liouville que revient, comme on sait, le mérite d'avoir établi le premier que toutes les transformations conformes de l'espace se ramènent à une inversion suivie ou précédée d'un déplacement ou, ce qui revient au même, à une série d'inversions exécutées successivement. Voici une démonstration très simple de cette importante proposition. Elle repose sur le théorème fondamental de Dupin d'après lequel les surfaces qui font partie d'un système triple orthogonal se coupent mutuellement suivant leurs lignes de courbure.

Considérons un plan quelconque dans l'espace qu'il s'agit de transformer et adjoignons-lui tous les plans parallèles. On a ainsi une famille A de plans auxquels on peut adjoindre, *d'une infinité de manières*, deux autres familles de plans parallèles B et C, telles que les plans appartenant à deux familles différentes se coupent à angle droit. Appliquons maintenant la transformation. Aux trois familles de plans A, B, C elle fera correspondre trois familles A', B', C' de surfaces faisant partie d'un système triple orthogonal. Et comme, sans changer la famille A et par suite la famille A', on peut faire varier les familles B et C et par suite les familles B' et C', on voit que, d'après le théorème de Dupin, les surfaces de la famille A' devront avoir une infinité de systèmes de lignes de courbure; elles se réduiront, par conséquent, à des sphères ou à des plans. Comme la conclusion s'applique aux surfaces des familles B', C', nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Toutes les transformations conformes de l'espace doivent faire correspondre au système triple orthogonal composé de trois familles de plans parallèles un système triple composé de trois familles de sphères ou de plans.

2. Nous sommes ainsi conduits à chercher quels sont les systèmes triples formés exclusivement avec des sphères ou des plans.

Digitized by Google

Pour simplifier la recherche nous remarquerons que, si l'on donne une famille composée de sphères ou de plans, on peut la transformer à l'aide d'une inversion, en une famille composée de sphères non concentriques, dont quelques-unes pourront d'ailleurs se réduire à des plans. Nous pouvons donc nous borner à rechercher les systèmes triples orthogonaux formés avec trois familles de sphères non concentriques, sauf à adjoindre après coup à ces systèmes ceux que l'on pourrait en déduire par une inversion.

Désignons par A', B', C' les trois familles de sphères qui forment le système triple orthogonal; je dis d'abord que, dans chaque famille, les centres des sphères décrivent une ligne droite. En effet, si les centres de trois sphères appartenant par exemple à la famille A' n'étaient pas en ligne droite, toutes les sphères qui leur sont orthogonales auraient leur centre sur l'axe radical des trois premières sphères et admettraient pour plan radical le plan de leurs centres. Avec de telles sphères il est évidemment impossible de constituer les deux familles B' et C'.

Je dis maintenant que les lignes des centres des trois familles sont deux à deux rectangulaires et concourantes. En effet, prenons deux sphères appartenant, par exemple, à la famille A'; les lignes des centres des deux autres familles seront évidemment dans le plan radical de ces deux sphères. Donc elles seront concourantes et, comme elles sont évidemment perpendiculaires à la ligne des centres des deux sphères, c'est-à-dire à la ligne des centres de la famille A', la proposition énoncée se trouve établie.

Ainsi les lignes des centres des trois familles A', B', C' sont les arêtes d'un trièdre trirectangle. Soient Ox, Oy, Oz les arêtes de ce trièdre. En désignant par ρ le rayon de la sphère qui a son centre à la distance x sur Ox, par ρ' le rayon de la sphère qui a son centre à la distance y sur Oy et par ρ'' le rayon de la sphère qui a son centre à la distance z sur Oz et en exprimant que ces sphères sont deux à deux orthogonales, nous aurons immédiatement les relations

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2 + \rho'^2, \\ y^2 + z^2 &= \rho'^2 + \rho''^2, \\ z^2 + x^2 &= \rho''^2 + \rho^2, \end{aligned}$$

qui donnent

$$\rho^2 = x^2, \quad \rho'^2 = y^2, \quad \rho''^2 = z^2.$$

Donc les trois familles seront composées de sphères passant par le point fixe O. Nous pouvons donc énoncer cette conclusion générale:

On obtient tous les systèmes triples orthogonaux exclusivement composés de sphères ou de plans, soit en prenant trois familles de plans

Digitized by Google

respectivement parallèles aux faces d'un trièdre trirectangle, soit en soumettant ce système simple à une inversion, qui donne trois familles de sphères passant en un même point et tangentes en ce point aux trois faces d'un trièdre trirectangle.

3. Cette proposition une fois établie, le théorème de Liouville s'en déduit comme il suit. Etant donné un espace E à trois dimensions, cherchons toutes les transformations conformes qui le font correspondre à un espace E'. Nous avons vu qu'aux trois familles de plans de E qui sont parallèles, par exemple, aux plans coordonnés, doivent correspondre dans E' trois familles de plans ou de sphères rectangulaires. D'après ce que nous venons d'établir, ces trois familles de E' devront être formées, soit de trois familles de plans parallèles, soit de trois familles de sphères dérivant par inversion de trois familles de plans parallèles.

Dans le premier cas, choisissons les axes coordonnées dans E' de telle manière qu'aux trois familles de plans définis par les équations

$$x = \text{const}, \quad y = \text{const}, \quad z = \text{const}$$

de E correspondent respectivement les plans de E' définis par les équations

$$x' = \text{const}, \quad y' = \text{const}, \quad z' = \text{const}.$$

Les formules de la transformation seront nécessairement de la forme

$$x' = \varphi(x), \quad y' = \psi(y), \quad z' = \chi(z),$$

et comme on doit avoir

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = \lambda^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

il viendra nécessairement

$$\lambda^2 = \varphi'^2 = \psi'^2 = \chi'^2.$$

Ces relations exigent évidemment que φ', ψ', χ' se réduisent à des constantes égales au signe près. On aura donc

$$\begin{aligned} \pm x' &= kx + a, \\ \pm y' &= ky + b, \\ \pm z' &= kz + c \end{aligned}$$

a, b, c, k étant quatre constantes.

En changeant, si cela est nécessaire, le sens de deux des axes Ox', Oy', Oz' ce qui ne change pas le sens de rotation du trièdre $Ox'y'z'$, et en déplaçant le trièdre parallèlement à lui-même, on peut toujours ramener les formules précédentes à la forme simple

$$x' = kx, \quad y' = ky, \quad z' = kz$$

qui, si l'on tient compte de ce fait que $Ox'y'z'$, $Oxyz$ sont deux trièdres distincts, définit une homothétie suivie ou précédée d'un déplacement.

Digitized by Google

4. Arrivons maintenant au second cas où aux trois familles de plans parallèles de E correspondent trois familles de sphères orthogonales dans E'. Comme ces trois familles dérivent des familles orthogonales de plans parallèles par une inversion effectuée dans l'espace E', et comme cette inversion est, elle-même, une transformation conforme, ce cas ramènera au précédent. Et l'on voit que la transformation conforme se ramènera à un déplacement suivi d'une homothétie et d'une inversion. En changeant le déplacement initial on peut faire en sorte que l'homothétie ait même pole que l'inversion. Et alors l'ensemble de l'homothétie et de l'inversion équivaut à une simple inversion.

On a donc en résumé le théorème suivant:

Toutes les transformations conformes de l'espace se ramènent à une inversion ou à une homothétie, précédée ou suivie d'un déplacement.

Paris, 20 novembre 1900.

Digitized by Google

Ausztige aus zwei Briefen an F. Richelot von S. Aronhold.[1])

Mitgeteilt von E. LAMPE in Berlin.

Berlin, den 29. September 1850.

... Sie haben mich gewifs getadelt, dafs ich bis jetzt das Oberlehrerexamen noch nicht gemacht habe. Indessen, vielleicht kann es zu meiner Entschuldigung gereichen, dafs ich während der ganzen Zeit von gröfseren mathematischen Untersuchungen in Anspruch genommen bin, die ich hätte aufgeben müssen. Ich wollte anfangs nur meine Abhandlung über die Funktionen dritten Grades abfassen und dann die

1) Im Herbste des Jahres 1850 erhielt Aronhold das Anerbieten, eine Hauslehrerstelle in einer angesehenen Wiener Familie unter sehr günstigen Verhältnissen anzunehmen. Eine der Bedingungen bestand darin, dafs Aronhold vor dem Antritte der Stellung sich den Doktortitel verschaffen sollte. Zu diesem Zwecke wandte er sich an seinen Lehrer Richelot in Königsberg i. Pr. in einem längeren Schreiben, dessen Inhalt, soweit derselbe wissenschaftliche Gegenstände berührt, hier zum Abdruck gebracht wird, weil damit sowohl für die Zeitbestimmung der Entstehung der Aronhold'schen Ideen, als auch für die Geschichte der Invariantentheorie ein wichtiger Beitrag gegeben wird. Es geht daraus hervor, dafs Aronhold schon damals, also 1850, die allgemeinen Differentialgleichungen für die invarianten Bildungen besafs. Die Leser, die sich für die Bedeutung der Frage interessieren, seien auf den „Bericht über die Fortschritte der projektiven Invariantentheorie" von W. Fr. Meyer, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Berlin, I, p. 84 Anmerkung *) und p. 95 f. hingewiesen.

Der zweite kürzere Brief ist schon mehr geschäftlicher Natur. Die Verhandlungen veranlafsten bekanntlich, in einer für Aronhold höchst erfreulichen und ehrenvollen Wendung der Angelegenheit, die philosophische Fakultät der Königsberger Universität dazu, den nicht ganz zweiunddreifsigjährigen Mathematiker (geb. 16. Juli 1819; gest. 13. März 1884) unter dem 5. April 1851 honoris causa zum Doktor zu ernennen; das Doktordiplom bezeugt: „Ordinem philosophorum viro meritissimo Sigfrido Aronhold Angerburgensi propter insignem rerum mathematicarum cognitionem cum aliis scriptis editis et ineditis algebraicis tum commentatione de novo principio algebraico ad functiones homogeneas transformandas adhibito comprobatam summos in philosophia honores cum iuribus et privilegiis doctorum philosophiae honoris causa contulisse ac solemni hoc diplomate confirmasse." Red.

Digitized by Google

mathematische Beschäftigung eine Weile liegen lassen. Aber ich wurde dadurch dahin geführt, Probleme zu erledigen, die mir früher unübersteigliche Hindernisse darboten, und fand, dafs sie einer sehr grofsen Verallgemeinerung fähig waren. Das Urteil Eisensteins über denjenigen Teil derselben, welchen ich ihm mitteilte, ermutigte mich um so mehr, sie zu verfolgen, obwohl er sie zu hoch stellt, wenn er ihnen einen Platz neben dem Abelschen Theorem einräumen will.

Ich habe auch einige Resultate, die sich für spezielle, leicht mitteilbare Fälle ergeben haben, dem Herrn Professor Jacobi vortragen können und seinen Beifall gefunden. Ich beschäftige mich unter anderem mit der Integration von Systemen simultaner partieller Differentialgleichungen, worüber bis jetzt kaum die anfänglichsten Untersuchungen existieren, und teilte Jacobi eine Methode mit, solche zu integrieren, oder vielmehr, die Bedingungen der Integrabilität zu ermitteln, worauf er mir erwiderte, dafs er in einigen seiner unvollendeten Arbeiten von ähnlichen Gedanken ausgegangen wäre.

Indem ich Ihnen die beifolgende Übersicht über den Inhalt meiner Abhandlung gebe, erlaube ich mir, den Wunsch auszusprechen, dafs sie Ihr Interesse erregen möchte, was mich ganz besonders erfreuen würde.

Schon beim Beginne dieses Jahres hatte ich über die befolgte Methode, algebraische Probleme zu lösen, dem Herrn Professor Hesse einige Mitteilungen gemacht. Derselbe hat leider meine letzten Briefe schon seit langer Zeit unbeantwortet gelassen, und ich habe es infolgedessen nicht gewagt, meine Mitteilungen weiter fortzusetzen. Aber ich kann mir den Grund seines Schweigens gar nicht erklären. Ich glaubte schon, ihn vielleicht verletzt zu haben; aber ich kann mich auch nicht einer Zeile entsinnen, wodurch dieses geschehen wäre. Im Gegenteil, mich leitete in allen meinen Briefen das aufrichtige Gefühl der Hochachtung seiner wissenschaftlichen Verdienste.

Es sei $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma\Sigma\Sigma\ldots a_{\varkappa\lambda\mu\ldots} x_\varkappa x_\lambda x_\mu \ldots$ eine beliebige homogene Funktion des p^{ten} Grades von den n Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Die Summen werden über alle gleichen oder ungleichen Werte 1, 2, …, n für $\varkappa, \lambda, \mu, \ldots$ zu je p ausgedehnt. Ferner sei Π irgend eine Funktion der Koeffizienten und

$$A_{\varrho\sigma} = \Sigma\Sigma\ldots a_{\varrho\lambda\mu\ldots} \frac{\partial \Pi}{\partial a_{\sigma\lambda\mu\ldots}} \frac{1}{(\sigma, \lambda, \mu, \ldots)},$$

wo die Summe über $\lambda, \mu, \ldots$ *allein* auszudehnen ist, also $\lambda, \mu, \ldots$ alle Werte 1, 2, …, n zu je $p-1$ annimmt, während ϱ und σ feste, kon-

Digitized by Google

stante Indizes bleiben und ebenfalls aus den Zahlen 1, 2, ..., n gewählt sind. Die Anzahl der Funktionen $A_{\varrho\sigma}$ beträgt demnach $n \cdot n$, da $A_{\varrho\sigma}$ und $A_{\sigma\varrho}$ von einander verschieden sind. Es bedeutet übrigens $(\sigma, \lambda, \mu, \ldots)$ einen Polynomialkoeffizienten, nämlich denjenigen, welcher in der Entwickelung von $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^p$ bei dem Gliede $x_\sigma x_\lambda x_\mu \ldots$ gefunden wird. Nimmt man noch andere homogene Funktionen derselben Variabeln, aber von beliebigen Graden an, bezeichnet sie auf analoge Weise, ihre Koeffizienten durch $b_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$, $c_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$, $d_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ u. s. w., und die zu $A_{\varrho\sigma}$ analogen Ausdrücke durch $B_{\varrho\sigma}$, $C_{\varrho\sigma}$, $D_{\varrho\sigma}$, ..., so ist

$$A_{\varrho\sigma} + B_{\varrho\sigma} + C_{\varrho\sigma} + D_{\varrho\sigma} + \cdots = 0 \tag{1}$$

ein System von n^2 linearen partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung, dessen Integrale II bemerkenswerte algebraische Eigenschaften haben.

Wenn man die Funktionen

$$\begin{cases} \Sigma\Sigma\Sigma \ldots a_{\varkappa\lambda\mu\ldots} x_\varkappa x_\lambda x_\mu \ldots, \ \Sigma\Sigma\Sigma \ldots b_{\varkappa\lambda\mu\ldots} x_\varkappa x_\lambda x_\mu \ldots, \\ \Sigma\Sigma\Sigma \ldots c_{\varkappa\lambda\mu\ldots} x_\varkappa x_\lambda x_\mu \ldots, \ \ldots \end{cases} \tag{2}$$

gleichzeitig und durch dieselben linearen Substitutionen resp. in die folgenden

$$\begin{cases} \Sigma\Sigma\Sigma \ldots a'_{\varkappa\lambda\mu\ldots} \xi_\varkappa \xi_\lambda \xi_\mu \ldots, \ \Sigma\Sigma\Sigma \ldots b'_{\varkappa\lambda\mu\ldots} \xi_\varkappa \xi_\lambda \xi_\mu \ldots, \\ \Sigma\Sigma\Sigma \ldots c'_{\varkappa\lambda\mu\ldots} \xi_\varkappa \xi_\lambda \xi_\mu \ldots, \ \ldots \end{cases} \tag{3}$$

transformieren soll, wo die Funktionen (3) ebenfalls *allgemeine* und von den Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sind, so will ich dieses eine *allgemeine* Transformation nennen, und es entsteht das Problem, „die Bedingungen zu finden, welche zwischen den Koeffizienten beider Funktionssysteme stattfinden müssen, damit die Transformation möglich sei". Diese einmal ermittelten, von den Substitutionskoeffizienten freien Relationen zwischen den Koeffizienten dienen, wegen dieser Unabhängigkeit, zu *allen speziellen* Transformationen des Systems (2), d. h. zu solchen, bei welchen den Koeffizienten des Systems (3) spezielle Werte gegeben werden. Es gilt nun der folgende Satz:

Wenn man findet, dafs i Relationen stattfinden müssen, und zwar:

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \Pi_3 = 0, \quad \ldots, \quad \Pi_i = 0,$$

so sind die i Funktionen $\Pi_\varkappa$ die sämtlichen von einander unabhängigen Integrale des Systems von Differentialgleichungen; desgleichen eines zweiten Systems:

$$A'_{\varrho\sigma} + B'_{\varrho\sigma} + C'_{\varrho\sigma} + D'_{\varrho\sigma} + \cdots = 0, \tag{4}$$

welches auf dieselbe Weise, wie (1) aus den Koeffizienten von (2), aus den Koeffizienten von (3) gebildet ist.

Digitized by Google

Umgekehrt: *Wenn man eine Lösung Π des Systems* (1) *kennt, und bildet die analoge Π' aus den Koeffizienten von* (3), *welche dann dem System* (4) *genügt, so wird auf die folgende einfache Weise:*

$$\Pi' - \Pi = 0 \tag{5}$$

eine der verlangten Bedingungsgleichungen zur Transformation zusammengesetzt.

Die Bedingungsgleichung in der Form (5) $\Pi' = \Pi$ ist deswegen bemerkenswert, weil die Koeffizienten beider Funktionssysteme separiert auftreten; nichtsdestoweniger gilt der Satz, *dafs die sämtlichen i von einander unabhängigen Integrale Π_i als rationale Funktionen dargestellt werden können, und zwar als gebrochene, deren Zähler und Nenner homogene und von gleichen Graden in Bezug auf die Koeffizienten sind.*

Da es frei steht, die gebrochenen Funktionen Π_x auf gleiche Benennung zu bringen, so folgt, dafs man sie alle durch $i + 1$ *ganze* Funktionen P_x darstellen kann, wenn nämlich

$$\Pi_1 = \frac{P_1}{P}, \quad \Pi_2 = \frac{P_2}{P}, \quad \ldots, \quad \Pi_i = \frac{P_i}{P}$$

gesetzt wird.

Alle Funktionen P_x sind also von $i + 1$ von einander unabhängigen abhängig, und ich nenne sie die *Determinanten des Funktionssystems* (2). *Sie genügen selbst einem anderen System von Differentialgleichungen, nämlich:*

$$A_{\varrho\varrho} + B_{\varrho\varrho} + C_{\varrho\varrho} + D_{\varrho\varrho} + \cdots = \lambda \cdot P, \tag{6}$$

wo λ einen numerischen Wert hat, der von dem Grade von P abhängig ist, und wie vorhin

$$A_{\varrho\sigma} + B_{\varrho\sigma} + C_{\varrho\sigma} + D_{\varrho\sigma} + \cdots = 0 \tag{7}$$

ist, so oft ϱ und σ verschieden sind. (Statt Π ist in den Funktionen $A_{\varrho\varrho}$, $B_{\varrho\sigma}$, ... P zu setzen.)

Sie haben ferner die folgende Eigenschaft: *Wenn man die Determinante der Substitutionskoeffizienten durch r bezeichnet und durch P und P' entsprechende der angegebenen Verbindungen aus den Koeffizienten der ursprünglichen Funktionen und ihrer transformierten Formen, so ist*

$$P' = r^\lambda \cdot P, \tag{8}$$

wo λ den in (6) *vorkommenden numerischen Wert hat.*

Umgekehrt: *Alle Funktionen, welche in der Beziehung* (8) *stehen, sind Integrale von* (6) *und* (7).

Alle bis jetzt bekannten Verbindungen, welche die Eigenschaft (8) haben, dienen also zur Integration der Differentialgleichungen und zur Lösung des Problems der allgemeinen Transformation. Sie sind indessen in der Verallgemeinerung, in welcher sie als zu einem ganzen System

Digitized by Google

von Funktionen zugehörig betrachtet werden, noch nicht untersucht worden, und überhaupt nicht bekannt, wenn die Funktionen den zweiten Grad überschritten haben. Ich befinde mich im Besitze von mehreren Methoden, für jedes Funktionssystem solche zu bilden. Es scheint, dafs der Charakter derselben mit jedem Grade der Funktionen und der Anzahl ihrer Variabeln veränderlich ist.

Endlich gilt noch der Satz, dafs alle Resultate algebraischer Operationen, welche aus den Koeffizienten des gegebenen Funktionensystems (2) *zu bilden sind, durch die Verbindungen P darstellbar sind, und dafs hierzu nur noch die Auflösung linearer Gleichungen erforderlich ist.* Dasselbe gilt natürlich auch, wenn man n homogene Funktionen von beliebigen Graden und n Variabeln gleichzeitig verschwinden läfst und das Resultat der Elimination der Variabeln aus diesen Gleichungen darstellen will.

Wenn nur *eine* homogene Funktion vorliegt, so reduziert sich das System der Differentialgleichungen auf

$$A_{\varrho\sigma} = 0, \quad A_{\varrho\varrho} = \lambda \cdot P,$$

welche immer noch allgemein genug sind.

Man findet die Differentialgleichungen (1) und (6, 7) in speziellen Fällen als gewöhnliche lineare Gleichungen, welche in der Algebra von Wichtigkeit sind. In diesen Fällen sind die partiellen Differentialquotienten mit ihrem numerischen Faktor

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_{\sigma\lambda\mu\ldots}} \quad \frac{1}{(\sigma, \lambda, \mu, \ldots)}$$

die *Unbekannten*. In diesem Sinne betrachtet, folgt, dafs die Auflösungen dieser Gleichungen als *partielle Differentialquotienten einer Funktion darstellbar sind.*

Bildet man z. B. für die homogenen Funktionen dritten Grades von drei Variabeln die Gleichungen $A_{\varrho\sigma} = 0$, wo auf der rechten Seite überall Null gesetzt ist, so erhält man das System von 9 linearen Gleichungen, welches Hesse benutzt, um die Gröfsen $p_{\varkappa\lambda\mu}$ seiner Abhandlung zu bestimmen. Dafs sie die partiellen Differentialquotienten einer Funktion sind, bemerkt derselbe nicht; aber er leitet auf anderem Wege eine Eigenschaft derselben ab, welche aus der vorstehenden sofort sich ergiebt.

Für den vorliegenden Fall giebt es nur *eine* Bedingungsgleichung zur allgemeinen Transformation, nämlich:

$$\frac{T^{\varkappa}}{S^{\varkappa}} = \frac{T^{\varkappa}}{S^{\varkappa}},$$

wo T und S die Funktionen meiner Abhandlung sind, und zwar, weil

Digitized by Google

$$T' = r^6 \cdot T,\ S' = r^4 \cdot S$$

ist. Hieraus folgen die Werte der $p_{\varkappa\lambda\mu}$, welche ich publiziert habe, durch Differentiation von T^2/S^3 nach den Konstanten.

Ich weise noch nach, dafs in allen Fällen die Bestimmung der Substitutions-Koeffizienten für die Transformation der homogenen Funktionen durch lineare Substitutionen aus denselben Prinzipien hervorgeht, so dafs die gewöhnliche Methode, Transformationen durch Elimination der Substitutionskoeffizienten aus den bezüglichen Gleichungen auszuführen, gänzlich vermieden werden kann.

Über die Methode, Systeme simultaner partieller Differentialgleichungen im allgemeinen zu integrieren, will ich erst in einer neuen Abhandlung einige Theoreme entwickeln.

Berlin, den 20. März 1851.

... Ich habe mehrere eigene Arbeiten fertig liegen, aber nicht in der Form, dafs sie zum Vorlegen sich eignen; was ich möglicherweise dazu verwenden konnte, habe ich mir erlaubt beizulegen. Es ist aber gerade das Allerunwesentlichste. Indessen kann ich es momentan nicht ändern. Ich überlasse Ihrer geneigten Beurteilung, ob Sie das Beigehende für den zu erreichenden Zweck nützlich erachten.

Von meiner Hauptabhandlung habe ich einen zwar abgerundeten und für sich abgeschlossenen Teil gegeben, aber nicht einmal die Hälfte des Apparates, den ich in Händen, doch nicht in der Reinschrift habe. Ebenso geht es mir mit den *Darstellungen über die homogenen Funktionen dritten Grades von drei Variabeln*, ferner *über Gradbestimmungen einer gewissen Klasse von Eliminationsresultaten*, ferner *über die Determinanten der Gleichung des fünften Grades mit einer Unbekannten*, desgleichen *über die Determinanten der homogenen Funktionen vierten Grades von drei Variabeln*. Es kommt noch hinzu, dafs ich in den letzten Wochen an Anfällen von der Grippe litt und mich fortwährend in einem unangenehmen physischen Zustande befinde, der freilich nur Folge der Erkältung ist, aber mich unfähig macht, zusammenhängende Gedanken zu fassen. ...

Digitized by Google

Mathematische Probleme.

Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongrefs zu Paris 1900.

Von D. Hilbert in Göttingen.

Aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. 1900. Heft 3. Mit Zusätzen des Verfassers.

Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unserer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwickelung während der künftigen Jahrhunderte! Welche besonderen Ziele werden es sein, denen die führenden mathematischen Geister der kommenden Geschlechter nachstreben? Welche neuen Methoden und neuen Thatsachen werden die neuen Jahrhunderte entdecken — auf dem weiten und reichen Felde mathematischen Denkens?

Die Geschichte lehrt die Stetigkeit der Entwickelung der Wissenschaft. Wir wissen, dafs jedes Zeitalter eigene Probleme hat, die das kommende Zeitalter löst oder als unfruchtbar zur Seite schiebt und durch neue Probleme ersetzt. Wollen wir eine Vorstellung gewinnen von der mutmafslichen Entwickelung mathematischen Wissens in der nächsten Zukunft, so müssen wir die offenen Fragen vor unserem Geiste passieren lassen und die Probleme überschauen, welche die gegenwärtige Wissenschaft stellt, und deren Lösung wir von der Zukunft erwarten. Zu einer solchen Musterung der Probleme scheint mir der heutige Tag, der an der Jahrhundertwende liegt, wohl geeignet; denn die grofsen Zeitabschnitte fordern uns nicht blofs auf zu Rückblicken in die Vergangenheit, sondern sie lenken unsere Gedanken auch auf das unbekannte Bevorstehende.

Die hohe Bedeutung bestimmter Probleme für den Fortschritt der mathematischen Wissenschaft im allgemeinen und die wichtige Rolle, die sie bei der Arbeit des einzelnen Forschers spielen, ist unleugbar. Solange ein Wissenszweig Überflufs an Problemen bietet, ist er lebenskräftig; Mangel an Problemen bedeutet Absterben oder Aufhören der

Digitized by Google

selbständigen Entwickelung. Wie überhaupt jedes menschliche Unternehmen Ziele verfolgt, so braucht die mathematische Forschung Probleme. Durch die Lösung von Problemen stählt sich die Kraft des Forschers; er findet neue Methoden und Ausblicke, er gewinnt einen weiteren und freieren Horizont.

Es ist schwierig und oft unmöglich, den Wert eines Problems im voraus richtig zu beurteilen; denn schliefslich entscheidet der Gewinn, den die Wissenschaft dem Problem verdankt. Dennoch können wir fragen, ob es allgemeine Merkmale giebt, die ein gutes mathematisches Problem kennzeichnen.

Ein alter französischer Mathematiker hat gesagt: Eine mathematische Theorie ist nicht eher als vollkommen anzusehen, als bis du sie so klar gemacht hast, dafs du sie dem ersten Manne erklären könntest, den du auf der Strafse triffst. Diese Klarheit und leichte Fafslichkeit, wie sie hier so drastisch für eine mathematische Theorie verlangt wird, möchte ich viel mehr von einem mathematischen Problem fordern, wenn dasselbe vollkommen sein soll; denn das Klare und leicht Fafsliche zieht uns an, das Verwickelte schreckt uns ab.

Ein mathematisches Problem sei ferner schwierig, damit es uns reizt, und dennoch nicht völlig unzugänglich, damit es unserer Anstrengung nicht spotte; es sei uns ein Wahrzeichen auf den verschlungenen Pfaden zu verborgenen Wahrheiten — uns hernach lohnend mit der Freude über die gelungene Lösung.

Die Mathematiker früherer Jahrhunderte pflegten sich mit leidenschaftlichem Eifer der Lösung einzelner schwieriger Probleme hinzugeben; sie kannten den Wert schwieriger Probleme. Ich erinnere nur an das von Johann Bernoulli gestellte *Problem der Linie des schnellsten Falles*. Die Erfahrung zeige, so führt Bernoulli in der öffentlichen Ankündigung dieses Problems aus, dafs edle Geister zur Arbeit an der Vermehrung des Wissens durch nichts mehr angetrieben werden, als wenn man ihnen schwierige und zugleich nützliche Aufgaben vorlege, und so hoffe er, sich den Dank der mathematischen Welt zu verdienen, wenn er nach dem Beispiele von Männern, wie Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani und anderen, welche vor ihm dasselbe thaten, den ausgezeichneten Analysten seiner Zeit eine Aufgabe vorlege, damit sie daran wie an einem Prüfsteine die Güte ihrer Methoden beurteilen und ihre Kräfte messen könnten. Dem genannten Problem von Bernoulli und ähnlichen Problemen verdankt die Variationsrechnung ihren Ursprung.

Fermat hatte bekanntlich behauptet, dafs die Diophantische Gleichung

Digitized by Google

$$x^n + y^n = z^n$$

— aufser in gewissen selbstverständlichen Fällen — in ganzen Zahlen x, y, z unlösbar sei; *das Problem, diese Unmöglichkeit nachzuweisen*, bietet ein schlagendes Beispiel dafür, wie fördernd ein sehr spezielles und scheinbar unbedeutendes Problem auf die Wissenschaft einwirken kann. Denn durch die Fermatsche Aufgabe angeregt, gelangte Kummer zu der Einführung der idealen Zahlen und zur Entdeckung des Satzes von der eindeutigen Zerlegung der Zahlen eines Kreiskörpers in ideale Primfaktoren — eines Satzes, der heute in der ihm durch Dedekind und Kronecker erteilten Verallgemeinerung auf beliebige algebraische Zahlbereiche im Mittelpunkte der modernen Zahlentheorie steht, und dessen Bedeutung weit über die Grenzen der Zahlentheorie hinaus in das Gebiet der Algebra und der Funktionentheorie reicht.

Um von einem ganz anderen Forschungsgebiete zu reden, so erinnere ich an das *Dreikörperproblem*. Dem Umstande, dafs Poincaré es unternahm, dieses schwierige Problem erneut zu behandeln und der Lösung näher zu führen, verdanken wir die fruchtbaren Methoden und die weittragenden Prinzipien, die dieser Gelehrte der himmlischen Mechanik erschlossen hat, und die heute auch der praktische Astronom anerkennt und anwendet.

Die beiden vorhingenannten Probleme, das Fermatsche Problem und das Dreikörperproblem, erscheinen uns im Vorrat der Probleme fast wie entgegengesetzte Pole, das erstere eine freie Erfindung des reinen Verstandes, der Region der abstrakten Zahlentheorie angehörig; das andere uns von der Astronomie aufgezwungen und notwendig zur Erkenntnis einfachster fundamentaler Naturphänomene.

Aber oftmals trifft es sich auch, dafs das nämliche spezielle Problem in die verschiedenartigsten Disziplinen mathematischen Wissens eingreift. So spielt das *Problem der kürzesten Linie* zugleich in den Grundlagen der Geometrie, in der Theorie der krummen Linien und Flächen, in der Mechanik und in der Variationsrechnung eine wichtige historische und prinzipielle Rolle. Und wie überzeugend hat F. Klein in seinem Buche über das Ikosaeder die Bedeutung geschildert, die dem *Problem der regulären Polyeder* in der Elementargeometrie, in der Gruppen- und Gleichungstheorie und in der Theorie der linearen Differentialgleichungen zukommt!

Um die Wichtigkeit bestimmter Probleme ins Licht zu setzen, darf ich auch auf Weierstrafs hinweisen, der es als eine glückliche Fügung bezeichnete, dafs er zu Beginn seiner wissenschaftlichen Lauf-

Digitized by Google

bahn ein so bedeutendes Problem vorfand, wie es das *Jacobische Umkehrproblem* war, an dessen Bearbeitung er sich machen konnte.

Nachdem wir uns die allgemeine Bedeutung der Probleme in der Mathematik vor Augen geführt haben, wenden wir uns zu der Frage, aus welchen Quellen die Mathematik ihre Probleme schöpft. Sicherlich stammen die ersten und ältesten Probleme in jedem mathematischen Wissenszweige aus der Erfahrung und sind durch die Welt der äußeren Erscheinungen angeregt worden. Selbst die Regeln des *Rechnens mit ganzen Zahlen* sind auf einer niederen Kulturstufe der Menschheit wohl in dieser Weise entdeckt worden, wie ja auch heute noch das Kind die Anwendung dieser Gesetze nach der empirischen Methode erlernt. Das Gleiche gilt von den *ersten Problemen der Geometrie*: den aus dem Altertum überlieferten Problemen der Kubusverdoppelung, der Quadratur des Kreises und den ältesten Problemen aus der Theorie der Auflösung numerischer Gleichungen, aus der Kurvenlehre und der Differential- und Integralrechnung, aus der Variationsrechnung, der Theorie der Fourierschen Reihen und der Potentialtheorie — gar nicht zu reden von der weiteren reichen Fülle der eigentlichen Probleme aus der Mechanik, Astronomie und Physik.

Bei der Weiterentwickelung einer mathematischen Disziplin wird sich jedoch der menschliche Geist, ermutigt durch das Gelingen der Lösungen, seiner Selbständigkeit bewußt; er schafft aus sich selbst heraus oft ohne erkennbare äußere Anregung allein durch logisches Kombinieren, durch Verallgemeinern, Spezialisieren, durch Trennen und Sammeln der Begriffe in glücklichster Weise neue und fruchtbare Probleme und tritt dann selbst als der eigentliche Frager in den Vordergrund. So entstanden das *Primzahlproblem* und die übrigen Probleme der Arithmetik, die Galoissche Gleichungstheorie, die Theorie der algebraischen Invarianten, die Theorie der Abelschen und automorphen Funktionen, und so entstehen überhaupt fast *alle feineren Fragen der modernen Zahlen- und Funktionentheorie*.

Inzwischen, während die Schaffenskraft des reinen Denkens wirkt, kommt auch wieder von neuem die Außenwelt zur Geltung, zwingt uns durch die wirklichen Erscheinungen neue Fragen auf, erschließt neue mathematische Wissensgebiete und, indem wir diese neuen Wissensgebiete für das Reich des reinen Denkens zu erwerben suchen, finden wir häufig die Antworten auf alte ungelöste Probleme und fördern so zugleich am besten die alten Theorien. Auf diesem stets sich wiederholenden und wechselnden Spiel zwischen Denken und Erfahrung beruhen, wie mir scheint, die zahlreichen und überraschenden Analogien und jene scheinbar prästabilierte Harmonie, welche der Mathematiker

Digitized by Google

so oft in den Fragestellungen, Methoden und Begriffen verschiedener Wissensgebiete wahrnimmt.

Wir erörtern noch kurz, welche berechtigten allgemeinen Forderungen an die Lösung eines mathematischen Problems zu stellen sind: ich meine vor allem die, dafs es gelingt, die Richtigkeit der Antwort durch eine endliche Anzahl von Schlüssen darzuthun und zwar auf Grund einer endlichen Anzahl von Voraussetzungen, welche in der Problemstellung liegen, und die jedesmal genau zu formulieren sind. Diese Forderung der logischen Deduktion mittelst einer endlichen Anzahl von Schlüssen ist nichts anderes als die Forderung der Strenge in der Beweisführung. In der That, die Forderung der Strenge, die in der Mathematik bekanntlich von sprichwörtlicher Bedeutung geworden ist, entspricht einem allgemeinen philosophischen Bedürfnis unseres Verstandes, und andererseits kommt durch ihre Erfüllung allein erst der gedankliche Inhalt und die Fruchtbarkeit des Problems zur vollen Geltung. Ein neues Problem, zumal wenn es aus der äufseren Erscheinungswelt stammt, ist wie ein junges Reis, welches nur gedeiht und Früchte trägt, wenn es auf den alten Stamm, den sicheren Besitzstand unseres mathematischen Wissens, sorgfältig und nach den strengen Kunstregeln des Gärtners aufgepfropft wird.

Zudem ist es ein Irrtum zu glauben, dafs die Strenge in der Beweisführung die Feindin der Einfachheit wäre. An zahlreichen Beispielen finden wir im Gegenteil bestätigt, dafs die strenge Methode auch zugleich die einfachere und leichter fafsliche ist. Das Streben nach Strenge zwingt uns eben zur Auffindung einfacherer Schlufsweisen; auch bahnt es uns häufig den Weg zu Methoden, die entwickelungsfähiger sind als die alten Methoden von geringerer Strenge. So erfuhr die Theorie der algebraischen Kurven durch die strengere funktionentheoretische Methode und die folgerichtige Einführung transzendenter Hilfsmittel eine erhebliche Vereinfachung und gröfsere Einheitlichkeit. Der Nachweis ferner, dafs die Potenzreihe die Anwendung der vier elementaren Rechnungsarten sowie das gliedweise Differentiieren und Integrieren gestattet, und die darauf beruhende Erkenntnis der Bedeutung der Potenzreihe trug erheblich zur Vereinfachung der gesamten Analysis, insbesondere der Theorie der Elimination und der Theorie der Differentialgleichungen sowie der in derselben zu führenden Existenzbeweise bei. Das schlagendste Beispiel aber für meine Behauptung ist die Variationsrechnung. Die Behandlung der ersten und zweiten Variation bestimmter Integrale brachte zum Teil äufserst komplizierte Rechnungen mit sich, und die betreffenden Entwickelungen der alten Mathematiker entbehrten der erforderlichen Strenge. Weier-

Digitized by Google

strafs zeigte uns den Weg zu einer neuen und sicheren Begründung der Variationsrechnung. An dem Beispiel des einfachen Integrals und des Doppelintegrals werde ich zum Schlufs meines Vortrages kurz andeuten, wie die Verfolgung dieses Weges zugleich eine überraschende Vereinfachung der Variationsrechnung mit sich bringt, indem zum Nachweis der notwendigen und hinreichenden Kriterien für das Eintreten eines Maximums und Minimums die Berechnung der zweiten Variation und zum Teil sogar die mühsamen an die erste Variation anknüpfenden Schlüsse völlig entbehrlich werden — gar nicht zu reden von dem Fortschritte, der in der Aufhebung der Beschränkung auf solche Variationen liegt, für die die Differentialquotienten der Funktionen nur wenig variieren.

Wenn ich die Strenge in den Beweisen als Erfordernis für eine vollkommene Lösung eines Problems hinstelle, so möchte ich andererseits zugleich die Meinung widerlegen, als seien etwa nur die Begriffe der Analysis oder gar nur diejenigen der Arithmetik der völlig strengen Behandlung fähig. Eine solche bisweilen von hervorragenden Seiten vertretene Meinung halte ich für durchaus irrig; eine so einseitige Auslegung der Forderung der Strenge führt bald zu einer Ignorierung aller aus der Geometrie, Mechanik und Physik stammenden Begriffe, zu einer Unterbindung des Zuflusses von neuem Material aus der Aufsenwelt und schliefslich sogar in letzter Konsequenz zu einer Verwerfung der Begriffe des Kontinuums und der Irrationalzahl. Welch' wichtiger Lebensnerv aber würde der Mathematik abgeschnitten durch eine Exstirpation der Geometrie und der mathematischen Physik? Ich meine im Gegenteil, wo immer von erkenntnistheoretischer Seite oder in der Geometrie oder aus den Theorien der Naturwissenschaft mathematische Begriffe auftauchen, erwächst der Mathematik die Aufgabe, die diesen Begriffen zu Grunde liegenden Prinzipien zu erforschen und dieselben durch ein einfaches und vollständiges System von Axiomen derart festzulegen, dafs die Schärfe der neuen Begriffe und ihre Verwendbarkeit zur Deduktion den alten arithmetischen Begriffen in keiner Hinsicht nachsteht.

Zu den neuen Begriffen gehören notwendig auch neue Zeichen; diese wählen wir derart, dafs sie uns an die Erscheinungen erinnern, die der Anlafs waren zur Bildung der neuen Begriffe. So sind die geometrischen Figuren Zeichen für die Erinnerungsbilder der räumlichen Anschauung und finden als solche bei allen Mathematikern Verwendung. Wer benutzt nicht stets zugleich mit der Doppelungleichung $a > b > c$ für drei Gröfsen a, b, c das Bild dreier hinter einander auf einer Geraden liegenden Punkte als das geometrische Zeichen des Begriffes

Digitized by Google

„zwischen"? Wer bedient sich nicht der Zeichnung in einander gelagerter Strecken und Rechtecke, wenn es gilt, einen schwierigen Satz über die Stetigkeit von Funktionen oder die Existenz von Verdichtungsstellen in voller Strenge zu beweisen? Wer könnte ohne die Figur des Dreiecks, des Kreises mit seinem Mittelpunkt, wer ohne das Kreuz dreier zu einander senkrechter Achsen auskommen? oder wer wollte auf die Vorstellung des Vektorfeldes oder das Bild einer Kurven- oder Flächenschar mit ihrer Enveloppe verzichten, das in der Differentialgeometrie, in der Theorie der Differentialgleichungen, in der Begründung der Variationsrechnung und anderer rein mathematischer Wissenszweige eine so wichtige Rolle spielt?

Die arithmetischen Zeichen sind geschriebene Figuren, und die geometrischen Figuren sind gezeichnete Formeln, und kein Mathematiker könnte diese gezeichneten Formeln entbehren, so wenig wie ihm beim Rechnen etwa das Formieren und Auflösen der Klammern oder die Verwendung anderer analytischer Zeichen entbehrlich sind.

Die Anwendung der geometrischen Zeichen als strenges Beweismittel setzt die genaue Kenntnis und völlige Beherrschung der Axiome voraus, die jenen Figuren zu Grunde liegen, und damit diese geometrischen Figuren dem allgemeinen Schatze mathematischer Zeichen einverleibt werden dürfen, ist daher eine strenge axiomatische Untersuchung ihres anschauungsmäfsigen Inhaltes notwendig. Wie man beim Addieren zweier Zahlen die Ziffern nicht unrichtig unter einander setzen darf, sondern vielmehr erst die Rechnungsregeln, d. h. die Axiome der Arithmetik, das richtige Operieren mit den Ziffern bestimmen, so wird das Operieren mit den geometrischen Zeichen durch die Axiome der geometrischen Begriffe und deren Verknüpfung bestimmt.

Die Übereinstimmung zwischen geometrischem und arithmetischem Denken zeigt sich auch darin, dafs wir bei arithmetischen Forschungen ebensowenig wie bei geometrischen Betrachtungen in jedem Augenblicke die Kette der Denkoperationen bis auf die Axiome hin verfolgen; vielmehr wenden wir, zumal bei der ersten Inangriffnahme eines Problems, in der Arithmetik genau wie in der Geometrie zunächst ein rasches, unbewufstes, nicht definitiv sicheres Kombinieren an, im Vertrauen auf ein gewisses arithmetisches Gefühl für die Wirkungsweise der arithmetischen Zeichen, ohne welches wir in der Arithmetik ebensowenig vorwärts kommen würden, wie in der Geometrie ohne die geometrische Einbildungskraft. Als Muster einer mit geometrischen Begriffen und Zeichen in strenger Weise operierenden arithmetischen Theorie nenne ich das Werk von Minkowski[1]) „Geometrie der Zahlen".

1) Leipzig 1896.

Digitized by Google

Es mögen noch einige Bemerkungen über die Schwierigkeiten, die mathematische Probleme bieten können, und die Überwindung solcher Schwierigkeiten Platz finden.

Wenn uns die Beantwortung eines mathematischen Problems nicht gelingen will, so liegt häufig der Grund darin, dafs wir noch nicht den allgemeineren Gesichtspunkt erkannt haben, von dem aus das vorgelegte Problem nur als einzelnes Glied einer Kette verwandter Probleme erscheint. Nach Auffindung dieses Gesichtspunktes wird häufig nicht nur das vorgelegte Problem unserer Erforschung zugänglicher, sondern wir gelangen so zugleich in den Besitz einer Methode, die auf die verwandten Probleme anwendbar ist. Als Beispiel diene die Einführung komplexer Integrationswege in der Theorie der bestimmten Integrale durch Cauchy und die Aufstellung des Idealbegriffes in der Zahlentheorie durch Kummer. Dieser Weg zur Auffindung allgemeiner Methoden ist gewifs der gangbarste und sicherste; denn wer, ohne ein bestimmtes Problem vor Auge zu haben, nach Methoden sucht, dessen Suchen ist meist vergeblich.

Eine noch wichtigere Rolle als das Verallgemeinern spielt — wie ich glaube — bei der Beschäftigung mit mathematischen Problemen das Spezialisieren. Vielleicht in den meisten Fällen, wo wir die Antwort auf eine Frage vergeblich suchen, liegt die Ursache des Mifslingens darin, dafs wir einfachere und leichtere Probleme als das vorgelegte noch nicht oder noch unvollkommen erledigt haben. Es kommt dann alles darauf an, diese leichteren Probleme aufzufinden und ihre Lösung mit möglichst vollkommenen Hilfsmitteln und durch verallgemeinerungsfähige Begriffe zu bewerkstelligen. Diese Vorschrift ist einer der wichtigsten Hebel zur Überwindung mathematischer Schwierigkeiten, und es scheint mir, dafs man sich dieses Hebels meistens — wenn auch unbewufst — bedient.

Mitunter kommt es vor, dafs wir die Beantwortung unter ungenügenden Voraussetzungen oder in unrichtigem Sinne erstreben und infolge dessen nicht zum Ziele gelangen. Es entsteht dann die Aufgabe, die Unmöglichkeit der Lösung des Problems unter den gegebenen Voraussetzungen und in dem verlangten Sinne nachzuweisen. Solche Unmöglichkeitsbeweise wurden schon von den Alten geführt, indem sie z. B. zeigten, dafs die Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks zur Kathete in einem irrationalen Verhältnisse steht. In der neueren Mathematik spielt die Frage nach der Unmöglichkeit gewisser Lösungen eine hervorragende Rolle, und wir nehmen so gewahr, dafs alte schwierige Probleme wie der Beweis des Parallelenaxioms, die Quadratur des Kreises oder die Auflösung der Gleichungen 5ten Grades

Digitized by Google

durch Wurzelziehen, wenn auch in anderem als dem ursprünglich gemeinten Sinne, dennoch eine völlig befriedigende und strenge Lösung gefunden haben.

Diese merkwürdige Thatsache neben anderen philosophischen Gründen ist es wohl, welche in uns eine Überzeugung entstehen läfst, die jeder Mathematiker gewifs teilt, die aber bis jetzt wenigstens niemand durch Beweise gestützt hat — ich meine die Überzeugung, dafs ein jedes bestimmte mathematische Problem einer strengen Erledigung notwendig fähig sein müsse, sei es, dafs es gelingt, die Beantwortung der gestellten Frage zu geben, sei es, dafs die Unmöglichkeit seiner Lösung und damit die Notwendigkeit des Mifslingens aller Versuche dargethan wird. Man lege sich irgend ein bestimmtes ungelöstes Problem vor, etwa die Frage nach der Irrationalität der Euler-Mascheronischen Konstanten C oder die Frage, ob es unendlich viele Primzahlen von der Form $2^n + 1$ giebt. So unzugänglich diese Probleme uns erscheinen, und so ratlos wir zur Zeit ihnen gegenüberstehen — wir haben dennoch die sichere Überzeugung, dafs ihre Lösung durch eine endliche Anzahl rein logischer Schlüsse gelingen mufs.

Ist dieses Axiom von der Lösbarkeit eines jeden Problems eine dem mathematischen Denken allein charakteristische Eigentümlichkeit, oder ist es vielleicht ein allgemeines dem inneren Wesen unseres Verstandes anhaftendes Gesetz, dafs alle Fragen, die er stellt, auch durch ihn einer Beantwortung fähig sind? Trifft man doch auch in anderen Wissenschaften alte Probleme an, die durch den Beweis der Unmöglichkeit in der befriedigendsten Weise und zum höchsten Nutzen der Wissenschaft erledigt worden sind. Ich erinnere an das Problem des Perpetuum mobile. Nach den vergeblichen Versuchen der Konstruktion eines Perpetuum mobile forschte man vielmehr nach den Beziehungen, die zwischen den Naturkräften bestehen müssen, wenn ein Perpetuum mobile unmöglich sein soll[1]), und diese umgekehrte Fragestellung führte auf die Entdeckung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie, das seinerseits die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile in dem ursprünglich verlangten Sinne erklärt.

Diese Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik giebt es kein Ignorabimus!

1) Vgl. Helmholtz: Über die Wechselwirkung der Naturkräfte und die darauf bezüglichen neuesten Ermittelungen der Physik. Vortrag, gehalten in Königsberg 1854.

Digitized by Google

Unermefslich ist die Fülle von Problemen in der Mathematik, und sobald ein Problem gelöst ist, tauchen an dessen Stelle zahllose neue Probleme auf. Gestatten Sie mir im Folgenden, gleichsam zur Probe, aus verschiedenen mathematischen Disziplinen einzelne bestimmte Probleme zu nennen, von deren Behandlung eine Förderung der Wissenschaft sich erwarten läfst.

Überblicken wir die Prinzipien der Analysis und der Geometrie. Die anregendsten und bedeutendsten Ereignisse des letzten Jahrhunderts sind auf diesem Gebiete, wie mir scheint, die arithmetische Erfassung des Begriffs des Kontinuums in den Arbeiten von Cauchy, Bolzano, Cantor und die Entdeckung der Nicht-Euklidischen Geometrie durch Gaufs, Bolyai, Lobatschefskij. Ich lenke daher zunächst Ihre Aufmerksamkeit auf einige diesen Gebieten angehörenden Probleme.

1. Cantors Problem von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Zwei Systeme, d. h. zwei Mengen von gewöhnlichen reellen Zahlen (oder Punkten) heifsen nach Cantor äquivalent oder von gleicher Mächtigkeit, wenn sie zu einander in eine derartige Beziehung gebracht werden können, dafs einer jeden Zahl der einen Menge eine und nur eine bestimmte Zahl der anderen Menge entspricht. Die Untersuchungen von Cantor über solche Punktmengen machen einen Satz sehr wahrscheinlich, dessen Beweis jedoch trotz eifrigster Bemühungen bisher noch niemandem gelungen ist; dieser Satz lautet:

Jedes System von unendlich vielen reellen Zahlen, d. h. jede unendliche Zahlen- (oder Punkt)menge, ist entweder der Menge der ganzen natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... oder der Menge sämtlicher reellen Zahlen und mithin dem Kontinuum, d. h. etwa den Punkten einer Strecke, äquivalent; *im Sinne der Äquivalenz giebt es hiernach nur zwei Zahlenmengen, die abzählbare Menge und das Kontinuum.*

Aus diesem Satz würde zugleich folgen, dafs das Kontinuum die nächste Mächtigkeit über die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen hinaus bildet; der Beweis dieses Satzes würde mithin eine neue Brücke schlagen zwischen der abzählbaren Menge und dem Kontinuum.

Es sei noch eine andere sehr merkwürdige Behauptung Cantors erwähnt, die mit dem genannten Satze in engstem Zusammenhange steht, und die vielleicht den Schlüssel zum Beweise dieses Satzes liefert. Irgend ein System von reellen Zahlen heifst geordnet, wenn von irgend zwei Zahlen des Systems festgesetzt ist, welches die frühere und welches die spätere sein soll, und dabei diese Festsetzung eine derartige ist, dafs, wenn eine Zahl a früher als die Zahl b und b früher

Digitized by Google

als c ist, so auch stets a früher als c erscheint. Die natürliche Anordnung der Zahlen eines Systems heifse diejenige, bei der die kleinere als die frühere, die gröfsere als die spätere festgesetzt wird. Es giebt aber, wie leicht zu sehen ist, noch unendlich viele andere Arten, wie man die Zahlen eines Systems ordnen kann.

Wenn wir eine bestimmte Ordnung der Zahlen ins Auge fassen und aus denselben irgend ein besonderes System dieser Zahlen, ein sogenanntes Teilsystem oder eine Teilmenge herausgreifen, so erscheint diese Teilmenge ebenfalls geordnet. Cantor betrachtet nun eine besondere Art von geordneten Mengen, die er als wohlgeordnete Mengen bezeichnet, und die dadurch charakterisiert sind, dafs nicht nur in der Menge selbst, sondern auch in jeder Teilmenge eine früheste Zahl existiert. Das System der ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... in dieser seiner natürlichen Ordnung ist offenbar eine wohlgeordnete Menge. Dagegen ist das System aller reellen Zahlen, d. h. das Kontinuum in seiner natürlichen Ordnung, offenbar nicht wohlgeordnet. Denn, wenn wir als Teilmenge die Punkte einer endlichen Strecke mit Ausnahme des Anfangspunktes der Strecke ins Auge fassen, so besitzt diese Teilmenge jedenfalls kein frühestes Element. Es erhebt sich nun die Frage, ob sich die Gesamtheit aller Zahlen nicht in anderer Weise so ordnen läfst, dafs jede Teilmenge ein frühestes Element hat, d. h. ob das Kontinuum auch als wohlgeordnete Menge aufgefafst werden kann, was Cantor bejahen zu müssen glaubt. Es erscheint mir höchst wünschenswert, *einen direkten Beweis dieser merkwürdigen Behauptung von Cantor zu gewinnen*, etwa durch wirkliche Angabe einer solchen Ordnung der Zahlen, bei welcher in jedem Teilsystem eine früheste Zahl aufgewiesen werden kann.

2. Die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome.

Wenn es sich darum handelt, die Grundlagen einer Wissenschaft zu untersuchen, so hat man ein System von Axiomen aufzustellen, welche eine genaue und vollständige Beschreibung derjenigen Beziehungen enthalten, die zwischen den elementaren Begriffen jener Wissenschaft stattfinden. Die aufgestellten Axiome sind zugleich die Definitionen jener elementaren Begriffe, und jede Aussage innerhalb des Bereiches der Wissenschaft, deren Grundlage wir prüfen, gilt uns nur dann als richtig, falls sie sich mittelst einer endlichen Anzahl logischer Schlüsse aus den aufgestellten Axiomen ableiten läfst. Bei näherer Betrachtung entsteht die Frage, *ob etwa gewisse Aussagen einzelner Axiome sich unter einander bedingen, und ob nicht somit die Axiome noch gemeinsame Bestandteile enthalten, die man beseitigen mufs, wenn*

Digitized by Google

man zu einem System von Axiomen gelangen will, die völlig von einander unabhängig sind.

Vor allem aber möchte ich unter den zahlreichen Fragen, welche hinsichtlich der Axiome gestellt werden können, dies als das wichtigste Problem bezeichnen, *zu beweisen, dafs dieselben unter einander widerspruchslos sind, d. h. dafs man auf Grund derselben mittelst einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen niemals zu Resultaten gelangen kann, die mit einander in Widerspruch stehen.*

In der Geometrie gelingt der Nachweis der Widerspruchslosigkeit der Axiome dadurch, dafs man einen geeigneten Bereich von Zahlen konstruiert, derart, dafs den geometrischen Axiomen analoge Beziehungen zwischen den Zahlen dieses Bereiches entsprechen, und dafs demnach jeder Widerspruch in den Folgerungen aus den geometrischen Axiomen auch in der Arithmetik jenes Zahlenbereiches erkennbar sein müfste. Auf diese Weise wird also der gewünschte Nachweis für die Widerspruchslosigkeit der geometrischen Axiome auf den Satz von der Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome zurückgeführt.

Zum Nachweis für die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome bedarf es dagegen eines direkten Weges.

Die Axiome der Arithmetik sind im wesentlichen nichts anderes als die bekannten Rechnungsgesetze mit Hinzunahme des Axioms der Stetigkeit. Ich habe sie kürzlich zusammengestellt[1]) und dabei das Axiom der Stetigkeit durch zwei einfachere Axiome ersetzt, nämlich das bekannte Archimedische Axiom und ein neues Axiom des Inhaltes, dafs die Zahlen ein System von Dingen bilden, welches bei Aufrechterhaltung der sämtlichen übrigen Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist. (Axiom der Vollständigkeit.) Ich bin nun überzeugt, dafs es gelingen mufs, einen direkten Beweis für die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome zu finden, wenn man die bekannten Schlufsmethoden in der Theorie der Irrationalzahlen im Hinblick auf das bezeichnete Ziel genau durcharbeitet und in geeigneter Weise modifiziert.

Um die Bedeutung des Problems noch nach einer anderen Rücksicht hin zu charakterisieren, möchte ich folgende Bemerkung hinzufügen. Wenn man einem Begriffe Merkmale erteilt, die einander widersprechen, so sage ich: der Begriff existiert mathematisch nicht. So existiert z. B. mathematisch nicht eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich -1 ist. Gelingt es jedoch zu beweisen, dafs die dem Begriffe erteilten Merkmale bei Anwendung einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen niemals zu einem Widerspruche führen können, so sage ich, dafs damit die mathematische Existenz des Begriffes, z. B. einer Zahl

1) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 8, 1900, S. 180.

Digitized by Google

oder einer Funktion, die gewisse Forderungen erfüllt, bewiesen worden ist. In dem vorliegenden Falle, wo es sich um die Axiome der reellen Zahlen in der Arithmetik handelt, ist der Nachweis für die Widerspruchslosigkeit der Axiome zugleich der Beweis für die mathematische Existenz des Inbegriffs der reellen Zahlen oder des Kontinuums. In der That, wenn der Nachweis für die Widerspruchslosigkeit der Axiome völlig gelungen sein wird, so verlieren die Bedenken, welche bisweilen gegen die Existenz des Inbegriffs der reellen Zahlen gemacht worden sind, jede Berechtigung. Freilich der Inbegriff der reellen Zahlen, d. h. das Kontinuum ist bei der eben gekennzeichneten Auffassung nicht etwa die Gesamtheit aller möglichen Dezimalbruchentwickelungen oder die Gesamtheit aller möglichen Gesetze, nach denen die Elemente einer Fundamentalreihe fortschreiten können, sondern ein System von Dingen, deren gegenseitige Beziehungen durch die aufgestellten Axiome geregelt werden, und für welche alle und nur diejenigen Thatsachen wahr sind, die durch eine endliche Anzahl logischer Schlüsse aus den Axiomen gefolgert werden können. Nur in diesem Sinne ist meiner Meinung nach der Begriff des Kontinuums streng logisch faſsbar. Thatsächlich entspricht er auch, wie mir scheint, so am besten dem, was die Erfahrung und Anschauung uns giebt. Der Begriff des Kontinuums oder auch der Begriff des Systems aller Funktionen existiert dann in genau demselben Sinne, wie etwa das System der ganzen rationalen Zahlen oder auch wie die höheren Cantorschen Zahlklassen und Mächtigkeiten. Denn ich bin überzeugt, daſs auch die Existenz der letzteren in dem von mir bezeichneten Sinne ebenso wie die des Kontinuums wird erwiesen werden können — im Gegensatz zu dem System aller Mächtigkeiten überhaupt oder auch aller Cantorschen Alephs, für welches, wie sich zeigen läſst, ein widerspruchsloses System von Axiomen in meinem Sinne nicht aufgestellt werden kann, und welches daher nach meiner Bezeichnungsweise ein mathematisch nicht existierender Begriff ist.

Aus dem Gebiete der Grundlagen der Geometrie möchte ich zunächst das folgende Problem nennen.

3. Die Volumengleichheit zweier Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe.

Gauſs[1]) spricht in zwei Briefen an Gerling sein Bedauern darüber aus, daſs gewisse Sätze der Stereometrie von der Exhaustions-

1) Werke, Bd. 8, S. 241 und 244.

Digitized by Google

methode, d. h. in der modernen Ausdrucksweise von dem Stetigkeitsaxiom (oder von dem Archimedischen Axiome) abhängig sind. Gaufs nennt besonders den Satz von Euklid, dafs dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten. Nun ist die analoge Aufgabe in der Ebene vollkommen erledigt worden[1]); auch ist es Gerling[2]) gelungen, die Volumengleichheit symmetrischer Polyeder durch Zerlegung in kongruente Teile zu beweisen. Dennoch erscheint mir der Beweis des eben genannten Satzes von Euklid auf diese Weise im allgemeinen wohl nicht als möglich, und es würde sich also um den strengen Unmöglichkeitsbeweis handeln. Ein solcher wäre erbracht, sobald es gelingt, *zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und von gleicher Höhe anzugeben, die sich auf keine Weise in kongruente Tetraeder zerlegen lassen, und die sich auch durch Hinzufügung kongruenter Tetraeder nicht zu solchen Polyedern ergänzen lassen, für die ihrerseits eine Zerlegung in kongruente Tetraeder möglich ist.*[3])

4. Problem von der Geraden als kürzester Verbindung zweier Punkte.

Eine andere Problemstellung, betreffend die Grundlagen der Geometrie, ist diese. Wenn wir von den Axiomen, die zum Aufbau der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie nötig sind, das Parallelenaxiom unterdrücken, bezüglich als nicht erfüllt annehmen, dagegen alle übrigen Axiome beibehalten, so gelangen wir bekanntlich zu der Lobatschefskijschen (hyperbolischen) Geometrie; wir dürfen daher sagen, dafs diese Geometrie insofern eine der Euklidischen nächststehende Geometrie ist. Fordern wir weiter, dafs dasjenige Axiom nicht erfüllt sein soll, wonach von drei Punkten einer Geraden stets einer und nur einer zwischen den beiden anderen liegt, so erhalten wir die Riemannsche (elliptische) Geometrie, so dafs diese Geometrie als eine der Lobatschefskijschen nächststehende erscheint. Wollen wir eine ähnliche prinzipielle Untersuchung über das Archimedische Axiom ausführen, so haben wir dieses als nicht erfüllt anzusehen und gelangen somit zu den Nicht-Archimedischen Geometrien, die von Veronese und mir untersucht worden sind. Die allgemeinere Frage,

1) Vgl. aufser der früheren Litteratur Hilbert: Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899, Kapitel IV.

2) Gaufs' Werke, Bd. 8, S. 242.

3) Inzwischen ist es Herrn Dehn gelungen, diesen Nachweis zu führen. Vgl. dessen Note „Über raumgleiche Polyeder" Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1900, sowie eine demnächst in den mathematischen Annalen erscheinende Arbeit.

Digitized by Google

die sich nun erhebt, ist die, ob sich noch nach anderen fruchtbaren Gesichtspunkten Geometrien aufstellen lassen, die mit gleichem Recht der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie nächststehend sind, und da möchte ich Ihre Aufmerksamkeit auf einen Satz lenken, der von manchen Autoren sogar als Definition der geraden Linie hingestellt worden ist, und der aussagt, dafs die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist. Der wesentliche Inhalt dieser Aussage reduziert sich auf den Satz von Euklid, dafs im Dreiecke die Summe zweier Seiten stets gröfser als die dritte Seite ist, einen Satz, welcher, wie man sieht, lediglich von elementaren d. h. aus den Axiomen unmittelbar entnommenen Begriffen handelt, und daher der logischen Untersuchung zugänglicher ist. Euklid hat den genannten Satz vom Dreieck mit Hilfe des Satzes vom Aufsenwinkel auf Grund der Kongruenzsätze bewiesen. Man überzeugt sich nun leicht, dafs der Beweis jenes Euklidischen Satzes allein auf Grund derjenigen Kongruenzsätze, die sich auf das Abtragen von Strecken und Winkeln beziehen, nicht gelingt, sondern dafs man zum Beweise eines Dreieckskongruenzsatzes bedarf. So entsteht die Frage nach einer Geometrie, in welcher alle Axiome der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie und insbesondere alle Kongruenzaxiome mit Ausnahme des einen Axioms von der Dreieckskongruenz (oder auch mit Ausnahme des Satzes von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) gelten, und in welcher überdies noch der Satz, dafs in jedem Dreieck die Summe zweier Seiten gröfser als die dritte ist, als besonderes Axiom aufgestellt wird.

Man findet, dafs eine solche Geometrie thatsächlich existiert und keine andere ist als diejenige, welche Minkowski[1]) in seinem Buche „Geometrie der Zahlen" aufgestellt und zur Grundlage seiner arithmetischen Untersuchungen gemacht hat. Die Minkowskische Geometrie ist also ebenfalls eine der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie nächststehende; sie ist im wesentlichen durch folgende Festsetzungen charakterisiert: Erstens: Die Punkte, die von einem festen Punkt O gleichen Abstand haben, werden durch eine konvexe geschlossene Fläche des gewöhnlichen Euklidischen Raumes mit O als Mittelpunkt repräsentiert. Zweitens: Zwei Strecken heifsen auch dann einander gleich, wenn man sie durch Parallelverschiebung des Euklidischen Raumes in einander überführen kann.

In der Minkowskischen Geometrie gilt das Parallelenaxiom; ich gelangte bei einer Betrachtung[2]), die ich über den Satz von der ge-

1) Leipzig 1896.

2) Mathematische Annalen, Bd. 46, S. 91.

Digitized by Google

raden Linie als kürzester Verbindung zweier Punkte anstellte, zu einer Geometrie, in welcher nicht das Parallelenaxiom gilt, während alle übrigen Axiome der Minkowskischen Geometrie erfüllt sind. Wegen der wichtigen Rolle, die der Satz von der Geraden als kürzester Verbindung zweier Punkte und der im wesentlichen äquivalente Satz von Euklid über die Seiten eines Dreiecks nicht nur in der Zahlentheorie, sondern auch in der Theorie der Flächen und in der Variationsrechnung spielt, und da ich glaube, dafs die eingehendere Untersuchung der Bedingungen für die Giltigkeit dieses Satzes ebenso auf den Begriff der Entfernung wie auch noch auf andere elementare Begriffe, z. B. den Begriff der Ebene und die Möglichkeit ihrer Definition mittelst des Begriffes der Geraden, ein neues Licht werfen wird, so erscheint mir die *Aufstellung und systematische Behandlung der hier möglichen Geometrien* wünschenswert.

Im Fall der Ebene und unter Zugrundelegung des Stetigkeitsaxioms führt das genannte Problem auf die von Darboux[1]) behandelte Frage, alle Variationsprobleme in der Ebene zu finden, für welche sämtliche Geraden der Ebene die Lösungen sind — eine Fragestellung, die mir weitgehender Verallgemeinerungen[2]) fähig und würdig erscheint.

5. Lie's Begriff der kontinuierlichen Transformationsgruppe ohne die Annahme der Differentiierbarkeit der die Gruppe definierenden Funktionen.

Lie hat bekanntlich mit Hinzuziehung des Begriffs der kontinuierlichen Transformationsgruppe ein System von Axiomen für die Geometrie aufgestellt und auf Grund seiner Theorie der Transformationsgruppen bewiesen, dafs dieses System von Axiomen zum Aufbau der Geometrie hinreicht. Da Lie jedoch bei Begründung seiner Theorie stets annimmt, dafs die die Gruppe definierenden Funktionen differentiiert werden können, so bleibt in den Lieschen Entwickelungen unerörtert, ob die Annahme der Differentiierbarkeit bei der Frage nach den Axiomen der Geometrie thatsächlich unvermeidlich ist oder nicht vielmehr als eine Folge des Gruppenbegriffs und der übrigen geometrischen Axiome erscheint. Diese Überlegung, sowie auch gewisse Probleme hinsichtlich der arithmetischen Axiome legen uns die allgemeinere Frage nahe, *inwieweit der Liesche Begriff der kontinuier-*

1) Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. 3, S. 54, Paris 1894.

2) Vgl. die interessanten Untersuchungen von A. Hirsch, Mathematische Annalen, Bd. 49 und 50.

Digitized by Google

lichen Transformationsgruppe auch ohne Annahme der Differentiierbarkeit der Funktionen unserer Untersuchung zugänglich ist.

Bekanntlich definiert Lie die endliche kontinuierliche Transformationsgruppe als ein System von Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

von der Beschaffenheit, dafs zwei beliebige Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r),$$
$$x_i'' = f_i(x_1', \ldots, x_n'; b_1, \ldots, b_r)$$

des Systems, nach einander ausgeführt, eine Transformation ergeben, welche wiederum dem System angehört und sich mithin in der Form $x_i'' = f_i(f_1(x, a), \ldots, f_n(x, a); b_1, \ldots, b_r) = f_i(x_1, \ldots, x_n; c_1, \ldots, c_r)$ darstellen läfst, wo $c_1, \ldots, c_r$ gewisse Funktionen von $a_1, \ldots, a_r$; $b_1, \ldots, b_r$ sind. Die Gruppeneigenschaft findet mithin ihren Ausdruck in einem System von Funktionalgleichungen und erfordert an sich für die Funktionen $f_1, \ldots, f_n, c_1, \ldots, c_r$ keinerlei nähere Beschränkung. Doch die weitere Behandlungsweise jener Funktionalgleichungen nach Lie, nämlich die Ableitung der bekannten grundlegenden Differentialgleichungen, setzt notwendig die Stetigkeit und Differentiierbarkeit der die Gruppe definierenden Funktionen voraus.

Was zunächst die Stetigkeit betrifft, so wird man gewifs an dieser Forderung zunächst festhalten — schon im Hinblick auf die geometrischen und arithmetischen Anwendungen, bei denen die Stetigkeit der in Frage kommenden Funktionen als eine Folge des Stetigkeitsaxioms erscheint. Dagegen enthält die Differentiierbarkeit der die Gruppe definierenden Funktionen eine Forderung, die sich in den geometrischen Axiomen nur auf recht gezwungene und komplizierte Weise zum Ausdruck bringen läfst, und es entsteht mithin die Frage, ob nicht etwa durch Einführung geeigneter neuer Veränderlicher und Parameter die Gruppe stets in eine solche übergeführt werden kann, für welche die definierenden Funktionen differentiierbar sind, oder ob wenigstens unter Hinzufügung gewisser einfacher Annahmen eine Überführung in die der Lieschen Methode zugänglichen Gruppen möglich ist. Die Zurückführung auf analytische Gruppen ist nach einem von Lie[1]) aufgestellten und von Schur[2]) zuerst bewiesenen Satze stets dann möglich, sobald die Gruppe transitiv ist und die Existenz der ersten und ge-

1) Lie-Engel: Theorie der Transformationsgruppen, Bd. 3, Leipzig 1893. § 82 und § 144.

2) Über den analytischen Charakter der eine endliche kontinuierliche Transformationsgruppe darstellenden Funktionen. Mathematische Annalen, Bd. 41.

Digitized by Google

wisser zweiter Ableitungen der die Gruppe definierenden Funktionen vorausgesetzt wird.

Auch für unendliche Gruppen ist, wie ich glaube, die Untersuchung der entsprechenden Frage von Interesse. Überhaupt werden wir auf das weite und nicht uninteressante Feld der Funktionalgleichungen geführt, die bisher meist nur unter der Voraussetzung der Differentiierbarkeit der auftretenden Funktionen untersucht worden sind. Insbesondere die von Abel[1]) mit so vielem Scharfsinn behandelten Funktionalgleichungen, die Differenzengleichungen und andere in der Litteratur vorkommende Gleichungen weisen an sich nichts auf, was zur Forderung der Differentiierbarkeit der auftretenden Funktionen zwingt, und bei gewissen Existenzbeweisen in der Variationsrechnung fiel mir direkt die Aufgabe zu, aus dem Bestehen einer Differenzengleichung die Differentiierbarkeit der betrachteten Funktion beweisen zu müssen. In allen diesen Fällen erhebt sich daher die Frage, *inwieweit etwa die Aussagen, die wir im Falle der Annahme differentiierbarer Funktionen machen können, unter geeigneten Modifikationen ohne diese Voraussetzung giltig sind.*

Bemerkt sei noch, das H. Minkowski in seiner vorhin genannten „Geometrie der Zahlen" von der Funktionalungleichung

$$f(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \leq f(x_1, \ldots, x_n) + f(y_1, \ldots, y_n)$$

ausgeht und aus dieser in der That die Existenz gewisser Differentialquotienten für die in Betracht kommenden Funktionen zu beweisen vermag.

Andererseits hebe ich hervor, dafs es sehr wohl analytische Funktionalgleichungen giebt, deren einzige Lösungen nicht differentiierbare Funktionen sind. Beispielsweise kann man eine eindeutige, stetige, nicht differentiierbare Funktion $\varphi(x)$ konstruieren, die die einzige Lösung zweier Funktionalgleichungen

$$\varphi(x + \alpha) - \varphi(x) = f(x),$$
$$\varphi(x + \beta) - \varphi(x) = 0$$

darstellt, wo α, β zwei reelle Zahlen und $f(x)$ eine für alle reellen Werte von x reguläre analytische eindeutige Funktion bedeutet. Man gelangt am einfachsten zu solchen Funktionen mit Hilfe trigonometrischer Reihen durch einen ähnlichen Gedanken, wie ihn Borel nach einer jüngsten Mitteilung von Picard[2]) zur Konstruktion einer

1) Werke, Bd. 1, S. 1, 61, 389.

2) Quelques théories fondamentales dans l'analyse mathématique. Conférences faites à Clark-University. Revue générale des Sciences 1900. S. 22.

Digitized by Google

doppeltperiodischen nichtanalytischen Lösung einer gewissen analytischen partiellen Differentialgleichung benutzt hat.

6. Mathematische Behandlung der Axiome der Physik.

Durch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahe gelegt, *nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disziplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt: dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik.*

Was die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung[1]) angeht, so scheint es mir wünschenswert, dafs mit der logischen Untersuchung derselben zugleich eine strenge und befriedigende Entwickelung der Methode der mittleren Werte in der mathematischen Physik, speziell in der kinetischen Gastheorie Hand in Hand gehe.

Über die Grundlagen der Mechanik liegen von physikalischer Seite bedeutende Untersuchungen vor; ich weise hin auf die Schriften von Mach[2]), Hertz[3]), Boltzmann[4]) und Volkmann[5]); es ist daher sehr wünschenswert, wenn auch von den Mathematikern die Erörterung der Grundlagen der Mechanik aufgenommen würde. So regt uns beispielsweise das Boltzmannsche Buch über die Prinzipe der Mechanik an, die dort angedeuteten Grenzprozesse, die von der atomistischen Auffassung zu den Gesetzen über die Bewegung der Kontinua führen, streng mathematisch zu begründen und durchzuführen. Umgekehrt könnte man die Gesetze über die Bewegung starrer Körper durch Grenzprozesse aus einem System von Axiomen abzuleiten suchen, die auf der Vorstellung von stetig veränderlichen, durch Parameter zu definierenden Zuständen eines den ganzen Raum. stetig erfüllenden Stoffes beruhen — ist doch die Frage nach der Gleichberechtigung verschiedener Axiomensysteme stets von hohem prinzipiellem Interesse.

Soll das Vorbild der Geometrie für die Behandlung der physikalischen Axiome mafsgebend sein, so werden wir versuchen, zunächst durch eine geringe Anzahl von Axiomen eine möglichst allgemeine Klasse physikalischer Vorgänge zu umfassen und dann durch Ad-

1) Vgl. Bohlmann: Über Versicherungsmathematik. 2. Vorlesung aus Klein und Riecke: Über angewandte Mathematik und Physik, Leipzig und Berlin 1900.

2) Die Mechanik in ihrer Entwickelung, Leipzig, 2. Auflage. Leipzig 1889.

3) Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig 1894.

4) Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik, Leipzig 1897.

5) Einführung in das Studium der theoretischen Physik, Leipzig 1900.

Digitized by Google

junktion neuer Axiome der Reihe nach zu den spezielleren Theorien zu gelangen — wobei vielleicht ein Einteilungsprinzip aus der so tiefsinnigen Theorie der unendlichen Transformationsgruppen von Lie entnommen werden kann. Auch wird der Mathematiker, wie er es in der Geometrie gethan hat, nicht blofs die der Wirklichkeit nahe kommenden, sondern überhaupt alle logisch möglichen Theorien zu berücksichtigen haben und stets darauf bedacht sein, einen vollständigen Überblick über die Gesamtheit der Folgerungen zu gewinnen, die das gerade angenommene Axiomensystem nach sich zieht.

Ferner fällt dem Mathematiker in Ergänzung der physikalischen Betrachtungsweise die Aufgabe zu, jedes Mal genau zu prüfen, ob das neu adjungierte Axiom mit den früheren Axiomen nicht in Widerspruch steht. Der Physiker sieht sich oftmals durch die Ergebnisse seiner Experimente gezwungen, zwischendurch und während der Entwickelung seiner Theorie neue Annahmen zu machen, indem er sich betreffs der Widerspruchslosigkeit der neuen Annahmen mit den früheren Axiomen lediglich auf eben jene Experimente oder auf ein gewisses physikalisches Gefühl beruft — ein Verfahren, welches beim streng logischen Aufbau einer Theorie nicht statthaft ist. Der gewünschte Nachweis der Widerspruchslosigkeit aller gerade gemachten Annahmen erscheint mir auch deshalb von Wichtigkeit, weil das Bestreben, einen solchen Nachweis zu führen, uns stets am wirksamsten zu einer exakten Formulierung der Axiome selbst zwingt.

(Schluſs folgt im dritten Heft.)

Digitized by Google

Zur Theorie der Thetafunktionen zweier veränderlicher Grössen.

Von M. Krause in Dresden.

In einer Arbeit im XCIV. Bande des Crelleschen Journals deckt Herr Caspary einen Zusammenhang auf, der zwischen der Theorie der orthogonalen Substitutionen und der Theorie der Thetafunktionen zweier veränderlicher Grössen besteht, und benutzt denselben um die Thetarelationen in eigenartiger Weise abzuleiten. In einer Reihe weiterer Arbeiten von ihm[1]) und Herrn Jahnke[2]) wird dieser Zusammenhang vertieft, vor allem gezeigt, dafs und wie eine grofse Anzahl von Differentialbeziehungen im Gebiete der Thetafunktionen im Anschlufs an gewisse Determinantensätze aufgestellt werden kann. In allen diesen Arbeiten wird im wesentlichen von den Eigenschaften der orthogonalen Substitutionen mit 16 und mit 9 Koeffizienten Gebrauch gemacht. Es soll im Folgenden gezeigt werden, dafs man auch einen Schritt weiter gehen und die orthogonalen Substitutionen mit 64 Koeffizienten in den Bereich der Betrachtungen ziehen kann.

§ 1.

Aufstellung eines Satzes aus der Theorie der orthogonalen Substitutionen.

Wird durch eine Substitution:

$$y_s = \sum_{r=1}^{r=8} a_{rs} x_r, \quad (s = 1, 2, \ldots, 8) \tag{1}$$

der Ausdruck:

$$\sum y_s^2$$

1) F. Caspary: Comptes Rendus CXI, 225—227, 1890; Ann. de l'Ec. Norm. (3) X, 253—261, 1893.

2) E. Jahnke: Ber. d. Berl. Ak. 1896, p. 1023—1030; Comptes Rendus CXXV, 486—489, 1897; C. R. CXXVI, 1083—1085, 1898; Journ. f. d. reine u. angew. Math. CXIX, 234—252, 1899; Leipz. Ber. 1900, p. 140—151.

Digitized by Google

übergeführt in:

$$c \sum x_s^2,$$

so bestehen bekanntlich zwischen den Gröfsen a_{rs} eine Reihe von Beziehungen, die für den Fall $c = 1$ in die Gleichungen der orthogonalen Substitution übergehen.

Setzt man ferner aus den Elementen a_{rs} und den, analogen Bedingungsgleichungen unterworfenen, neuen Elementen b_{rs} die Elemente g_{rs} so zusammen, dafs:

$$g_{rs} = \sum_{m=1}^{m=8} a_{mr} \cdot b_{ms} \tag{2}$$

wird, so wird die Substitution:

$$y_s = \sum_{r=1}^{r=8} g_{rs} \cdot x_r \tag{3}$$

ebenfalls die Summe der Quadrate der neuen Variabeln in die Summe der Quadrate der ursprünglichen, multipliziert mit einem Faktor, überführen.

Die Gröfsen a_{rs} und b_{rs} können auf mannigfachem Wege gewählt werden. Verstehen wir unter $a_1, a_2, \ldots, a_8$ vollkommen willkürliche Gröfsen, so können wir für die Determinante der Gröfsen a_{rs} die folgende wählen:

$$\begin{array}{cccccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\
a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 & -a_6 & a_5 & a_8 & -a_7 \\
a_3 & a_4 & -a_1 & -a_2 & a_7 & a_8 & -a_5 & -a_6 \\
a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 & a_8 & -a_7 & a_6 & -a_5 \\
a_5 & a_6 & -a_7 & -a_8 & -a_1 & -a_2 & a_3 & a_4 \\
a_6 & -a_5 & -a_8 & a_7 & a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 \\
a_7 & -a_8 & a_5 & -a_6 & -a_3 & a_4 & -a_1 & a_2 \\
a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1
\end{array}$$

Verstehen wir ebenso unter den Gröfsen $b_1, b_2, \ldots, b_8$ vollkommen willkürliche Gröfsen, so können wir für die Determinante der Gröfsen b_{rs} die folgende wählen[1]):

$$\begin{array}{cccccccc}
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\
b_2 & -b_1 & b_4 & -b_3 & -b_6 & b_5 & -b_8 & b_7 \\
b_3 & -b_4 & -b_1 & b_2 & -b_7 & b_8 & b_5 & -b_6 \\
b_4 & b_3 & -b_2 & -b_1 & -b_8 & -b_7 & b_6 & b_5 \\
b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 \\
b_6 & -b_5 & -b_8 & b_7 & b_2 & -b_1 & b_4 & b_3 \\
b_7 & b_8 & -b_5 & -b_6 & b_3 & b_4 & -b_1 & -b_2 \\
b_8 & -b_7 & b_6 & -b_5 & b_4 & -b_3 & b_2 & -b_1
\end{array}$$

1) Siehe in Bezug hierauf: Krause: Theorie der doppelt periodischen Funktionen einer veränderlichen Gröfse. Band II, 70.

Digitized by Google

§ 2.

Anwendung des Satzes auf die Thetafunktionen zweier veränderlicher Gröfsen.

Wir wollen nunmehr den in § 1 aufgestellten allgemeinen Satz für die Theorie der Thetafunktionen zweier veränderlicher Gröfsen verwerten, indem wir für die Gröfsen a und b bestimmte Werte wählen. Wir setzen:

$a_1 = \vartheta_5\ (u)\,\vartheta_5\ (v)$, $a_2 = \vartheta_4(u)\,\vartheta_4(v)$, $a_3 = \vartheta_{34}(u)\,\vartheta_{34}(v)$, $a_4 = \vartheta_3(u)\,\vartheta_3(v)$, $a_5 = \vartheta_{23}(u)\,\vartheta_{23}(v)$, $a_6 = \vartheta_{34}(u)\,\vartheta_{34}(v)$, $a_7 = \vartheta_{24}(u)\,\vartheta_{24}(v)$, $a_8 = \vartheta_2(u)\,\vartheta_2(v)$; wir verstehen ferner unter den Gröfsen b die analogen Thetaprodukte mit den Argumenten w und t.

Unter Berücksichtigung des allgemeinen Additionstheorems der Thetafunktionen zweier veränderlicher Gröfsen ergiebt sich dann durch Anwendung des im § 1 aufgestellten Satzes eine eigenartige Gruppierung von Thetarelationen recht allgemeiner Natur.

In der That setzt man:

$$2u' = u + v + w + t, \qquad 2v' = u + v - w - t,$$
$$2w' = u - v + w - t, \qquad 2t' = u - v - w + t,$$

so lautet das allgemeine Additionstheorem:

$$4\,\vartheta\,[\eta]\,(u')\,\vartheta\,[\eta+\varrho]\,(v')\,\vartheta\,[\eta+\sigma]\,(w')\,\vartheta\,[\eta-\varrho-\sigma]\,(t')$$
$$= \sum (-1)^{(\varepsilon)(\eta)}\,\vartheta\,[\varepsilon]\,(u)\,\vartheta\,[\varepsilon+\varrho]\,(v)\,\vartheta\,[\varepsilon+\sigma]\,(w)\,\vartheta\,[\varepsilon-\varrho-\sigma]\,(t).$$

Hierbei bezeichnen $[\eta+\varrho]$, $[\eta+\sigma]$, $[\eta-\varrho-\sigma]$ drei Charakteristiken, deren Elemente sich aus den entsprechenden Elementen der drei willkürlich wählbaren Charakteristiken $[\eta]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$ in der durch die Bezeichnung markierten Weise zusammensetzen, während die drei rechts stehenden Charakteristiken $[\varepsilon+\varrho]$, $[\varepsilon+\sigma]$, $[\varepsilon-\varrho-\sigma]$ in ähnlicher Weise aus $[\varepsilon]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$ entstehen. Es vertritt ferner das Symbol $(\varepsilon)(\eta)$ den Ausdruck:

$$\varepsilon_1 \cdot \eta_1' + \varepsilon_1' \cdot \eta_1 + \varepsilon_2 \cdot \eta_2' + \varepsilon_2' \cdot \eta_2,$$

wobei:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2' \end{bmatrix}, \qquad [\eta] = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' \end{bmatrix}$$

gesetzt ist. Endlich ist die Summation auf der rechten Seite über alle Normalcharakteristiken $[\varepsilon]$ zu erstrecken.

Mit Berücksichtigung dieses Additionstheorems lassen sich die Gröfsen g, von einem gemeinsamen Zahlenfaktor abgesehen, als Summen von zwei Thetaprodukten von je vier Faktoren mit den resp. Argumenten u', v', w', t' darstellen. Wir können von dem Zahlenfaktor

Digitized by Google

absehen und ebenso an Stelle der gestrichenen Buchstaben die ungestrichenen setzen.

Um die Beziehungen möglichst übersichtlich darzustellen, setzen wir: $a_1' = \vartheta_0(u)\vartheta_0(v)$, $a_2' = \vartheta_{04}(u)\vartheta_{04}(v)$, $a_3' = \vartheta_{12}(u)\vartheta_{12}(v)$, $a_4' = \vartheta_{03}(u)\vartheta_{03}(v)$, $a_5' = \vartheta_{14}(u)\vartheta_{14}(v)$, $a_6' = \vartheta_1(u)\vartheta_1(v)$, $a_7' = \vartheta_{13}(u)\vartheta_{13}(v)$, $a_8' = \vartheta_{02}(u)\vartheta_{02}(v)$; und setzen die Größen b' gleich den entsprechenden Produkten mit den Argumenten w und t. Dann wird:

$$
\begin{array}{llll}
g_{11} = g_{66} = a_1 b_1 + a_6 b_6 ; & g_{12} = -g_{56} = a_3 b_4 + a_8 b_7 ; \\
g_{13} = -g_{86} = -(a_2 b_4 + a_5 b_7); & g_{14} = g_{76} = -(a_2' b_3' + a_5' b_8'); \\
g_{15} = g_{26} = a_8' b_4' + a_3' b_7' ; & g_{17} = -g_{46} = a_7 b_1 + a_4 b_6 ; \\
g_{18} = g_{36} = a_3' b_6' + a_8' b_1' ; & g_{21} = -g_{65} = -(a_4 b_3 + a_7 b_8); \\
g_{22} = g_{55} = a_2 b_2 + a_5 b_5 ; & g_{23} = g_{85} = a_3 b_2 + a_8 b_5 ; \\
g_{24} = -g_{75} = -(a_3' b_1' + a_8' b_6'); & g_{27} = g_{45} = -(a_6 b_3 + a_1 b_8); \\
g_{28} = -g_{35} = -(a_2' b_8' + a_5' b_3'); & g_{31} = -g_{68} = a_4 b_2 + a_7 b_5 ; \\
g_{32} = g_{58} = a_2 b_3 + a_5 b_8 ; & g_{33} = g_{88} = a_3 b_3 + a_8 b_8 ; \\
g_{34} = -g_{78} = a_3' b_4' + a_8' b_7' ; & \\
g_{37} = g_{48} = a_6 b_3 + a_1 b_8 ; & g_{41} = g_{67} = -(a_3' b_2' + a_8' b_5'); \\
g_{42} = -g_{57} = a_1' b_3' + a_6' b_8' ; & g_{43} = -g_{87} = -(a_4' b_3' + a_7' b_8'); \\
g_{44} = g_{77} = a_4 b_4 + a_7 b_7 ; & g_{51} = g_{62} = -(a_7' b_3' + a_4' b_8'); \\
g_{53} = -g_{82} = a_8' b_2' + a_3' b_5' ; & g_{54} = g_{72} = a_8 b_1 + a_3 b_6 ; \\
g_{63} = g_{81} = -(a_6' b_3' + a_1' b_8'); & g_{64} = -g_{71} = a_6 b_4 + a_1 b_7 ;
\end{array}
$$

$$
g_{16} = -g_{25} = -g_{38} = g_{47} = g_{52} = -g_{61} = -g_{74} = g_{83} = -(a_5' b_2' + a_2' b_5').
$$

Die aus der getroffenen Anordnung folgenden Thetarelationen haben die Form:

$$
\sum_{r=1}^{r=8} g_{rs}^{\,2} = \sum_{r=1}^{r=8} g_{rs_1}^{\,2},
$$

$$
\sum_{r=1}^{r=8} g_{rs} \cdot g_{rs_1} = 0.
$$

Setzt man alle Argumente gleich Null, so erhalten wir das folgende Resultat:

Die Quotienten der Elemente der Determinante:

$$
\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix}
$$

und der Größe $\vartheta_5^4 + \vartheta_{01}^4$ *bilden die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution.*

Digitized by Google

Hierbei ist gesetzt:

$$A = \begin{vmatrix} \vartheta_4^4 + \vartheta_{23}^4, & \vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2 + \vartheta_2^2 \cdot \vartheta_{23}^2, & -\vartheta_{12}^2 \cdot \vartheta_0^2 \\ \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{34}^2 + \vartheta_{23}^2 \cdot \vartheta_2^2, & \vartheta_{34}^4 + \vartheta_2^4, & \vartheta_{12}^2 \cdot \vartheta_{03}^2 \\ \vartheta_0^2 \cdot \vartheta_{12}^2, & -\vartheta_{03}^3 \cdot \vartheta_{12}^2, & 0 \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} 0, & -\vartheta_{14}'^2 \cdot \vartheta_{12}^2, & -(\vartheta_{01}^2 \cdot \vartheta_{34}^2 + \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_2^2) \\ \vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_{12}^2, & 0, & \vartheta_{01}^2 \cdot \vartheta_4^2 + \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{23}^2 \\ -(\vartheta_{01}^2 \cdot \vartheta_{34}^2 + \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_2^2), & \vartheta_{01}^2 \cdot \vartheta_4^2 + \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{23}^2, & 0 \end{vmatrix}.$$

Dresden, den 27. November 1900.

Digitized by Google

Sur une suite de polynômes ayant toutes leurs racines réelles;

Par M. Paul Appell à Saint-Germain-en-Laye.

On sait que les polynômes X_n de Legendre peuvent être définis, à un facteur constant près, comme égaux à la dérivée d'ordre n de $(1-x^2)^n$. Ces polynômes ont toutes leurs racines réelles et comprises entre -1 et $+1$; ils vérifient une équation différentielle linéaire du deuxième ordre qui est un cas particulier de l'équation de la série hypergéométrique de Gauss.

1. Nous nous proposons, à titre d'exercice, d'étudier les polynômes P_{2n} définis comme il suit. Désignons par n un entier positif quelconque et posons

$$P_{2n} = \frac{d^n [x^n (1-x^2)^n]}{dx^n}. \tag{1}$$

Cette expression définit évidemment un polynôme en x du degré $2n$. On a, par exemple:

$$P_2 = 1 - 3x^2,$$
$$P_4 = 2 - 24x^2 + 30x^4,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Tous ces polynômes ne contiennent que des puissances paires de x; car, d'après la formule (1), P_{2n} ne change pas quand on change x en $-x$.

2. Le polynôme P_{2n} a toutes ses racines réelles, comprises entre -1 et $+1$. En effet, l'expression

$$x^n (1-x^2)^n$$

a toutes ses racines réelles: elle a n racines égales à -1, n égales à zéro, n égales à $+1$. Sa dérivée première a donc $n-1$ fois les racines -1, 0, $+1$ et une racine α entre -1 et 0, une autre β entre 0 et $+1$. La dérivée de cette dérivée ou dérivée seconde a $n-2$ fois les racines -1, 0, $+1$, une racine α_1 entre -1 et α, une α_2 entre α et 0, une β_1 entre 0 et β, et une β_2 entre β et $+1$. En continuant ainsi on voit que la dérivée d'ordre k a $n-k$ racines égales à -1, 0, $+1$ et

Digitized by Google

$2k$ racines entre -1 et $+1$, ce qui fait en tout $3n-k$ racines. Pour $k=n$, on obtient le polynôme P_{2n} qui n'admet plus les racines -1, 0, $+1$, mais qui a $2n$ racines comprises entre -1 et $+1$, racines qui sont deux à deux égales et de signes contraires, puisque le polynôme P_{2n} est pair.

Si dans le polynôme P_{2n} on remplace x^2 par z, on obtient un polynôme de degré n en z ayant toutes ses racines réelles comprises entre 0 et 1.

3. D'après la formule du binôme on a

$$x^n(1-x^2)^n = x^n - \frac{n}{1}x^{n+2} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n+4} - \dots$$

D'où, en prenant la dérivée d'ordre n,

$$(2)\qquad \begin{cases} P_{2n} = 1\cdot 2\cdots n\left[1 - \dfrac{n}{1}\cdot\dfrac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}x^2 \right. \\ \left. + \dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \dots\right]. \end{cases}$$

On voit alors que le polynôme P_{2n} s'exprime aisément à l'aide de la série hypergéométrique à 5 éléments étudiée par Clausen (Journal de Crelle, t. **3**):

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}{\delta\cdot\varepsilon}\frac{x}{1} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\gamma(\gamma+1)}{\delta(\delta+1)\varepsilon(\varepsilon+1)}\frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots$$

On a, en effet:

$$P_{2n} = 1\cdot 2\cdots n\, F\left(-n, \frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{1}{2}, 1, x^2\right)$$

comme on le vérifie sur l'expression (2).

Comme la fonction F vérifie une équation différentielle linéaire du troisième ordre, on en conclut pour P_{2n} une équation linéaire du troisième ordre que l'on pourra former directement en partant de la définition (1).

Il suffit pour cela de remarquer qu'en posant

$$u = x^n(z^2-x^2)^n,$$

u est homogène et de degré $3n$ en x et z; on a donc

$$(3)\qquad x\frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3nu;$$

mais

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2nz\frac{u}{z^2-x^2};$$

l'identité (3), dans laquelle on fait $z=1$, donne donc

$$x(1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x} + nu(3x^2-1) = 0.$$

Digitized by Google

Prenant maintenant la dérivée d'ordre $n+2$ par rapport à x et remplaçant $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$ par $P_{2n} = y$, on a l'équation différentielle demandée:

$$x(1-x^2)\,y''' + 2(1-3x^2)\,y'' + 3(n-1)(n+2)\,xy' + 2n(n+1)(n+2)\,y = 0.$$

4. On sait que M. Hermite a considéré des polynômes à deux variables

$$X_{m,n} = \frac{\partial^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}$$

qui sont analogues aux polynômes de Legendre et qui se rattachent aux séries hypergéométriques de deux variables que j'ai définies dans les Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris le 16 février et le 29 mars 1880 (T. **90**, 296 et 731). D'autres polynômes de même nature, mais d'une définition plus générale, peuvent être rattachés aux mêmes séries hypergéométriques (loc. cit.) comme je l'ai montré dans ce Journal (**66**, 238) en 1881.

J'indiquerai alors, comme un sujet d'exercice, l'extension des propriétés des polynômes P_{2n}, étudiés dans l'article actuel, aux polynômes analogues à deux variables

$$P_{2m,2n} = \frac{\partial^{m+n}[x^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n}]}{\partial x^m\,\partial y^n}.$$

On pourra en particulier étudier la position de la courbe

$$P_{2m,2n} = 0$$

par rapport au cercle

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Par exemple le polynôme $P_{2,0}$ est

$$\frac{\partial[x(1-x^2-y^2)]}{\partial x} = 1 - 3x^2 - y^2$$

et la courbe $P_{2,0} = 0$ est toute entière dans le cercle. Ce fait est général.

Paris, 10 décembre 1900.

Digitized by Google

Applications of the elliptic integral of the third kind.

By A. G. Greenhill (Woolwich, England).

The two following elliptic integrals of the third kind are submitted to readers of the Archiv der Mathematik und Physik, as types of a series which can be constructed in which the elliptic parameter is an aliquot part of a period, and the integral is therefore the logarithm or circular function of an algebraical expression, in consequence of Legendre's and Abel's theorems on the addition of the integrals.

Provided with a list of these integrals, the treatment of the mechanical problems which depend on the elliptic integral of the third kind may be resumed by the student of mechanics at the point where it is usually abandoned in an unfinished state, and so may be continued to a tangible result, capable of being calculated numerically and compared with experiment; at the same time the accuracy may be tested of the method for the numerical computation of elliptic functions given in Burkhardt's Elliptische Funktionen, § 126.

As specimens of mechanical problems requiring completion we may cite the geodesics, trajectories, and catenaries on various surfaces; Poinsot's theory of the herpolhode of a body under no forces, with Jacobi's allied motion of the axis of a symmetrical top or gyroscope; and Kirchhoff's and Clebsch's case of the movement of a solid in infinite liquid (American Journal of Mathematics, vol. XX, p. 1); in fact, the applications considered in Halphen's Fonctions elliptiques, t. II.

An article in the Math. Annalen, Bd. 52, has already shown the same idea in its application to Maurice Lévy's problem of the elastic curve under uniform normal pressure; it is curious that the integral makes its appearance there in exactly the same shape as that employed by Abel (Oeuvres, I, p. 140, II, p. 160); and it is important to notice that if v is the value of the elliptic argument u in Abel's form:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{[(x^2 + ax + b)^2 + px]}} \tag{1}$$

corresponding to $x = \infty$, then $3v$ corresponds to $x = 0$.

Digitized by Google

In Abel's treatment by means of the periodic continued fraction the degree of the result is unnecessarily high, four times higher than is requisite, and indeed eight times in some cases; the two following integrals will show the reduction in degree which is possible; they are chosen of the second stage, as required in most mechanical applications, and also of the circular form.

The first series of elliptic integrals of the third kind, corresponding to an elliptic parameter

$$v = K + \frac{K'i}{2n+1}, \text{ or } \frac{K'i}{2n+1}, \tag{2}$$

can be written

$$I(v) = \frac{1}{2n+1} \sin^{-1} \frac{x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + A_2 x^{n-3} + \cdots}{C} \sqrt{X_1} \tag{A}$$

$$= \frac{1}{2n+1} \cos^{-1} \frac{x^{n-1} - A_1 x^{n-2} + A_2 x^{n-3} - \cdots}{C} \sqrt{X_2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1 + R}{\sqrt{(X_1 X_2)}} dx,$$

where

$$X_1 = (\quad x + 1)(x^2 + P_1 x + P_2), \tag{3}$$

$$X_2 = (-x + 1)(x^2 - P_1 x + P_2), \tag{4}$$

and the constants

$$R,\ P_1,\ P_2,\ A_1,\ A_2,\ \ldots$$

have to be determined as algebraical functions of a parameter a.

The roots of

$$x^2 - P_1 x + P_2 = 0 \tag{5}$$

being denoted by α and β, we have

$$x^2 = \frac{\beta^2(\alpha^2 - 1)}{\alpha^2 - \beta^2},\ x'^2 = \frac{\alpha^2(1 - \beta^2)}{\alpha^2 - \beta^2}; \tag{6}$$

and, to the modulus $\varkappa'$,

$$\alpha = \frac{1}{\operatorname{sn} \frac{K'}{2n+1}},\ \beta = \operatorname{dn} \frac{2nK'}{2n+1}; \tag{7}$$

while

$$\frac{Q}{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}} = \operatorname{zn} \frac{K'}{2n+1}, \text{ or } \operatorname{zs} \frac{K'}{2n+1}, \tag{8}$$

according to the region of the parameter a; and these division-values (Teilwerte) of the elliptic functions undergo linear transformations in different regions of a.

The function $\operatorname{zn} u$ means Jacobi's function $Zu = \frac{d}{du} \log \Theta u$, while

$$\operatorname{zs} u = \operatorname{zn} u + \frac{d}{du} \log \operatorname{sn} u = \frac{d}{du} \log Hu.$$

Digitized by Google

Denoting by u the real elliptic argument, we can put

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{cn}^2 u = \frac{\kappa'^2}{\kappa^2} \operatorname{cn}^2 \frac{K'}{2n+1} \frac{x^2}{1-x^2};$$

and for the theta-functions,

$$\frac{\Theta\left(u + \frac{K'i}{2n+1}\right)}{\Theta u} \sqrt{(1-x^2)}$$

is a constant multiple of the $(2n+1)^{\text{th}}$ root of

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} (x^{n-1} - A_1 x^{n-2} + A_2 x^{n-3} - \ldots .) \sqrt{X_2} \\ + i\,(x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + A_2 x^{n-3} + \ldots .) \sqrt{X_1}. \end{cases}$$

Thus, with $2n + 1 = 9$, and expressed in terms of a parameter a, and

$$\text{(11)} \qquad A = a^6 + 2a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 4a + 1,$$

it will be found that

$$\text{(12)} \qquad P_1 = \frac{a^3 + a^2 + 0 - 1 - \sqrt{A}}{2a},$$

$$\text{(13)} \quad P_2 = \frac{a^9 + 3a^8 + 5a^7 + 6a^6 + 4a^5 + 7a^4 + 11a^3 + 9a^2 + 4a + 1 + (-a^6 - 2a^5 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 2a + 1)\sqrt{A}}{8a^2(a+1)(a^2+a+1)},$$

$$\text{(14)} \quad A_1 = -\frac{1}{2}(1 + P_1) = \frac{-a^3 - a^2 - 2a + 1 + \sqrt{A}}{4a},$$

$$\text{(15)} \quad A_2 = \frac{-a^7 - 5 - 11 - 19 - 24 - 16 - 7 - 1 + (a^4 + 4 + 5 + 3 - 1)\sqrt{A}}{8a(a^2+a+1)},$$

$$\text{(16)} \quad A_3 = \frac{a^9 + 5 + 15 + 34 + 58 + 73 + 63 + 31 + 6 - 1 + (-a^6 - 4 - 9 - 14 - 14 - 8 - 1)\sqrt{A}}{16a(a^2+a+1)},$$

$$\text{(17)} \quad 9R = \frac{-a^9 - 3 - 5 - 6 + 24 + 61 + 57 + 15 - 20 - 5 + (a^6 + 2 + 1 - 2 - 14 - 10 - 5)\sqrt{A}}{8a^2(a+1)(a^2+a+1)}.$$

The second series of integrals is constructed with a parameter

$$\text{(18)} \qquad v = K + \frac{K'i}{2n}, \text{ or } \frac{K'i}{2n},$$

and can be written

$$\text{(B)} \quad I(v) = \frac{1}{n} \sin^{-1} \frac{y^{n-1} + B_1 y^{n-2} + B_2 y^{n-3} + \ldots .}{(y^2+D)^{\frac{1}{2}n}} \sqrt{\frac{y^2 + Q_1 y + Q_2}{2}}$$

$$= \frac{1}{n} \cos^{-1} \frac{y^{n-1} - B_1 y^{n-2} + B_2 y^{n-3} - \ldots .}{(y^2+D)^{\frac{1}{2}n}} \sqrt{\frac{y^2 - Q_1 y + Q_2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{P(y^2+D) - Q}{(y^2+D)\sqrt{[(y^2+Q_2)^2 - Q_1^2 y^2]}}\, dy;$$

and the constants

$$P,\ Q,\ Q_1,\ Q_2,\ B_1,\ B_2 \ldots$$

have to be determined as algebraical functions of a parameter b.

Digitized by Google

Now as Q_2 and D are both negative, or both positive,

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{Q_1}{\sqrt{(-Q_2)}}, \text{ or } \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{Q_1}{\sqrt{Q_2}}, \tag{19}$$

$$\frac{Q_2}{D} = \frac{x}{\mathrm{dn}^2 \frac{K'}{2n}} = \frac{\mathrm{dn}^2 \frac{2n-1}{2n} K'}{x}, \text{ or } \frac{Q_2}{D} = x \,\mathrm{tn}^2 \frac{K'}{2n} = \frac{1}{x \,\mathrm{tn}^2 \frac{2n-1}{2n} K'}; \tag{20}$$

$$\mathrm{zn} \frac{K'}{2n}, \text{ or } \mathrm{zs} \frac{K'}{2n} = \frac{P}{Q_1 + \sqrt{(Q_1^2 - 4Q_2)}}; \tag{21}$$

and

$$\frac{\Theta\left(u + \frac{K'i}{2n}\right)}{\Theta u}$$

is a constant multiple of the n-th root of

$$\begin{cases} (y^{n-1} - B_1 y^{n-2} + B_2 y^{n-3} - \ldots) \sqrt{(y^2 - Q_1 y + Q_2)} \\ + i\,(y^{n-1} + B_1 y^{n-2} + B_2 y^{n-3} + \ldots) \sqrt{(y^2 + Q_1 y + Q_2)}. \end{cases} \tag{22}$$

Thus, for $2n = 10$, expressed in terms of a parameter b, and

$$B = (1 - b^2)\,(1 - 4b - b^2), \tag{23}$$

it will be found that

$$D = \frac{(1+b)\,(\sqrt[4]{B} - 1 + b)^2\,[-1 + b + 5b^2 - b^3 + (1+b)\sqrt{B}]}{8\,(\sqrt[4]{B} - 1 - b)^2 \sqrt{B}}, \tag{24}$$

$$Q = \frac{b\,(1+b)^2\,(\sqrt[4]{B} - 1 + b)^3\,[-(1+b)^2\,(1-2b) + (1+2b)\sqrt{B}]}{(\sqrt[4]{B} - 1 - b)^5 \sqrt{B}}, \tag{25}$$

$$Q_1 = 2\,\frac{(1+b)^2\,(1-b)\,(\sqrt[4]{B} - 1 + b)}{(\sqrt[4]{B} - 1 - b)^3}, \tag{26}$$

$$Q_2 = \frac{(1+b)^2(\sqrt[4]{B} - 1 + b)^2\,[-(1+b^2)\,(1 - 2b - 6b^2 + 2b^3 + b^4) + (1-b^2)^2\sqrt{B}]}{2\,(\sqrt[4]{B} - 1 - b)^6 \sqrt{B}}, \tag{27}$$

$$\frac{Q_2}{D} = \left(\frac{\sqrt[4]{B} + 1 + b}{\sqrt[4]{B} - 1 - b}\right)^2, \tag{28}$$

$$\frac{Q_2}{Q_1^2} = \frac{1}{8} - \frac{(1+b^2)\,(1 - 2b - 6b^2 + 2b^3 + b^4)}{8\,(1-b^2)^2 \sqrt{B}}, \tag{29}$$

$$B_1 = -\tfrac{1}{2} Q_1 - \tfrac{5}{2} P = \frac{\sqrt[4]{B} - 1 + b}{2} + \frac{2\,(1+b)}{\sqrt[4]{B} - 1 - b}, \tag{30}$$

$$B_4 = -\frac{\sqrt[4]{B} - 1 - b}{\sqrt[4]{B} + 1 + b} D^2, \tag{31}$$

$$B_2 = \tfrac{5}{2} D - \tfrac{1}{2} B_1^2 + B_1 Q_1 - \tfrac{1}{2} Q_2, \tag{32}$$

$$\frac{Q_2 B_2}{B_4} = -\tfrac{1}{2} Q_1 + \tfrac{5}{2} P - 5\,\frac{(1+b)\,(\sqrt[4]{B} - 1 + b)\,[\sqrt{B} + (1+b)^2]}{(\sqrt[4]{B} - 1 - b)^3}, \tag{33}$$

whence B_2 and B_3 can be calculated and verified, by a differentiation and identification.

Digitized by Google

Space does not permit of more than a statement of these results; for the preliminary analytical details the reader is referred to my papers on Elliptic Functions in the Proceedings of the London Mathematical Society, vols. XXV and XXVII; by their aid he will be able to construct for himself the results of lower order, corresponding to division by 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Numerical tables of the elliptic and theta-functions have been projected, in which the elliptic argument should proceed by degrees which are the 90th part of K or K'; the two particular integrals just given for 9- and 10-section will by addition and subtraction, in conjunction with the integrals of lower order, enable us to assign the division-values for any such degree of the argument, when the parameters a and b have been found, which give by trial the same modulus.

It will be noticed however that in the mechanical applications the parameter v is a fraction of the imaginary period, so that these tabular values of the theta-functions could not be utilised, even if they were available.

A change from the circular to the logarithmic form of these elliptic integrals of the third kind, and to a parameter which is a fraction of the real period, is made immediately by a change of X_1 into $-X_1$.

The mathematical student can exercise himself in the construction of particular cases of these integrals (A) and (B); also in the construction of the integrals of the first stage, corresponding to a parameter

$$v = \frac{2K'i}{2n+1}; \tag{34}$$

and afterwards he can apply them to the exact solution of mechanical problems; for instance in the construction of the corresponding algebraical expressions for the multiplicative-elliptic-functions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, employed in Klein-Sommerfeld, Theorie des Kreisels, 2, 420.

Incidentally the division-values of the elliptic functions are given in the course of the investigation; so that in this theory we reverse the ordinary procedure, and begin with the expression of some of the simplest division-values in terms of some parameter a or b, and afterwards construct the modulus and algebraical invariants.

The theory of the transformation of elliptic functions, cultivated by pure analysts, involves the symmetric functions of the division-values, and so may be considered solved at the same time; but the transformation theory is of no practical utility for the mechanical applications; it is the division theory which is required, and which should be extended as far as possible.

Woolwich, Dec. 5, 1900.

Digitized by Google

Über die Giltigkeit des Draperschen Gesetzes.

Von O. Lummer in Charlottenburg.[1])

Das Drapersche Gesetz sagt aus, dafs alle festen Körper bei derselben Temperatur zu leuchten beginnen und dafs sie zuerst rotes Licht aussenden. Glaubte Draper[2]) dieses Gesetz auf experimentellem Wege nachgewiesen zu haben[3]), so gelangte G. Kirchhoff auf theoretischem Wege dazu, indem er es als Folge seines bekannten Gesetzes von der Absorption und Emission hinstellte. Beide Schlufsfolgerungen sind nicht erlaubt.[4]) Bei der genauen Erörterung beider Folgerungen

1) Der Verfasser hat in seinem Rapport „Le rayonnement des corps noirs", den er bei Gelegenheit des Internationalen Physiker-Kongresses in Paris 1900 erstattet hat, eine Reihe neuer, wichtiger Ergebnisse mitgeteilt, welche wohl verdienen, auch dem deutschen Leserkreise bekannt zu werden. Auf eine dahingehende Bitte seitens der Redaktion hatte Herr Lummer die Güte, seine Resultate unter erweiterten, neuen Gesichtspunkten in diesem und einem folgenden Artikel darzulegen.

Indem wir ihm hierfür Dank sagen, nehmen wir diese Gelegenheit zum Anlafs, um *unser Programm bezüglich des physikalischen Teils im Archiv* zu vervollständigen: Aufser mathematisch-physikalischen Untersuchungen, welche auch schon früher in dieser Zeitschrift Aufnahme fanden, werden wir gern bereit sein, solche Arbeiten aufzunehmen, welche im Vordergrunde stehende Fragen der experimentellen Physik von neuen Gesichtspunkten aus beleuchten. So sind wir in der Lage unseren Lesern für den zweiten Band einen Aufsatz über die Lichtemission der Gase in Aussicht zu stellen, den uns Herr E. Pringsheim freundlichst zugesagt hat.

Wir hoffen auf diese Weise eine Lücke in der physikalischen Litteratur insofern auszufüllen, als dieser Teil des Archivs die Mitte halten würde zwischen den Annalen der Physik und denjenigen physikalischen Zeitschriften, deren Artikel mehr didaktischer oder rein populärer Art sind. Wir richten daher an die Physiker die Bitte, uns Beiträge im genannten Sinne gütigst zugehen zu lassen.

Die Redaktion.

2) Draper: Amer. Journ. of Sc. (2) t. IV. 1847. — Phil. Mag. (3) t. XXX; may 1847. — Scient. Memoirs p. 44. London 1878.

3) G. Kirchhoff: Pogg. Ann. Bd. 109 p. 275—301. 1860.

4) O. Lummer: „Le rayonnement des corps noirs". Rapports Congr. Intern. de Phys. Bd. II, 41—99. Paris. Gauthier-Villars 1900.

Digitized by Google

werde ich gleichzeitig Veranlassung finden, auf die Bedeutung des schwarzen Körpers für die Wärmestrahlung und die Leuchttechnik näher einzugehen, das Kirchhoffsche Gesetz von einer neuen Seite zu beleuchten und die Beziehung der neueren physiologischen Erkenntnisse der Wirkungsweise unserer Netzhautelemente zur Lichtemission eingehend zu erörtern.

1. *Das Kirchhoffsche Gesetz in seiner wahren Bedeutung.* — Das schon vor Kirchhoff bekannte Gesetz von der Konstanz des Verhältnisses der Emission und Absorption erhielt seine wahre und fruchtbare Bedeutung erst durch Kirchhoffs genaue Formulierung und mathematische Begründung für jede Wellenlänge. Um diesen Beweis erbringen zu können, führt Kirchhoff die Definition des absolut schwarzen Körpers ein, *„welcher alle Strahlen, die auf ihn fallen, vollkommen absorbiert, also Strahlen weder reflektiert, noch hindurchläßt“*. Ist e_λ das Emissionsvermögen des wenigstens „denkbaren“ vollkommen schwarzen Körpers und bedeuten E_λ und A_λ das Emissions- und das Absorptionsvermögen eines *beliebigen* Körpers, bezogen auf die gleiche Wellenlänge und die gleiche Temperatur, so lautet das Kirchhoffsche Gesetz:

$$\frac{E_\lambda}{A_\lambda} = e_\lambda,$$

wo e_λ lediglich eine Funktion der Temperatur des schwarzen Körpers ist.

Der Kirchhoffsche Satz sagt also aus, *erstens daſs das Verhältnis der Emission und Absorption* $\frac{E_\lambda}{A_\lambda}$ *aller Körper bei ein und derselben Temperatur konstant sei und zweitens, daſs der Wert dieser Konstanten stets gleich dem Emissionsvermögen des schwarzen Körpers für die gleiche Temperatur und Wellenlänge ist.*

Über der Fruchtbarkeit, welche eine aus dem ersten Teil dieses Satzes gezogene Folgerung für die Kenntnis der Gestirne wie der irdischen Körperwelt mit sich brachte, vergaſs man nur zu lange die strahlungstheoretische Bedeutung des zweiten Teiles. Noch merkwürdiger aber will mir scheinen, daſs das Kirchhoffsche Gesetz die glänzendsten Früchte auf einem Gebiete gezeitigt hat, auf dem seine strenge Anwendung uns heute kaum als erlaubt gelten dürfte. Das Kirchhoffsche Gesetz ist nämlich wie der zweite Hauptsatz, mit dessen Hilfe es bewiesen ist, nur für reine *Temperaturstrahlung* giltig, sodaſs die Strahlung infolge Luminescenz ausgeschlossen ist. Nun wissen wir aber heute[1]), daſs das Leuchten der Gase und Dämpfe wesentlich durch Luminescenz, sei es Chemi- oder Thermoluminescenz, hervorgerufen wird, nicht aber

1) Vergl. E. Pringsheim: „Sur l'émission des gaz“. Rapports Congr. Intern. Bd. II p. 100—132. Paris, Gauthier-Villars 1900.

Digitized by Google

auf der ihnen innewohnenden Temperatur allein beruht. Auf die in der Sonne leuchtenden Gase darf somit das Kirchhoffsche Gesetz ebensowenig angewandt werden wie auf die in der Natriumflamme und ähnlichen Flammen glühenden Dämpfe.

Um so wichtiger ist die *strahlungstheoretische* Bedeutung dieses Satzes, deren Größe und Tragweite erst jetzt in ihrer ganzen Fülle erkannt worden ist. Sie gipfelt in der innigen Beziehung des schwarzen Körpers zur realen Körperwelt. Durch den Kirchhoffschen Satz sind nämlich die Strahlungsgesetze aller Körper, soweit sie infolge der Temperatur strahlen, auf dasjenige des vollkommen schwarzen Körpers zurückgeführt. Ist dieses bekannt, so braucht man nur die Absorptionsvermögen der übrigen Körper zu bestimmen, um auch deren Strahlungsgesetze zu kennen. Kirchhoff spricht es auch aus, dafs das Gesetz der schwarzen Strahlung unzweifelhaft von einfacher Form ist, wie alle Funktionen es sind, die nicht von den Eigenschaften einzelner Körper abhängen, und fügt hinzu, dafs erst, wenn auf experimentellem Wege dieses Gesetz gefunden sei, die ganze Fruchtbarkeit seines Satzes sich zeigen werde.

Um das Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers zu bestimmen, war es freilich notwendig, vorher die von Kirchhoff definierte schwarze Strahlung dem Experimente zugänglich zu machen. Bis in die neueste Zeit hinein bemühte man sich meistens vergeblich, dieses hohe Ziel zu erreichen.[1]) Es ist dies um so merkwürdiger, als auch der Weg für die Verwirklichung der schwarzen Strahlung durch Kirchhoffs Gesetz gegeben und in einer Folgerung enthalten ist, die schon Kirchhoff aus seinem Gesetze gezogen hat. Wegen ihrer Wichtigkeit werde sie wörtlich angeführt. Sie lautet[2]): „Wenn ein Raum von Körpern gleicher Temperatur umschlossen ist, und durch diese Körper keine Strahlen hindurchdringen können, so ist ein jedes Strahlenbündel im Innern des Raumes seiner Qualität und Intensität nach gerade so beschaffen, als ob es von einem vollkommen schwarzen Körper derselben Temperatur herkäme, ist also unabhängig von der Beschaffenheit und Gestalt der Körper und nur durch die Temperatur bedingt."

Erhitzt man also nach dem Vorgange von W. Wien und mir[3]) *„eine mit einer kleinen Öffnung versehene Hohlkugel auf eine überall gleichmäfsige Temperatur, so dringt aus der Öffnung die dieser Temperatur entsprechende schwarze Strahlung"*.

1) Auf die Geschichte des schwarzen Körpers und seine Gesetze werden wir in einem späteren Aufsatz zurückkommen.

2) G. Kirchhoff: Pogg. Ann. **109**, 292. 1860.

3) W. Wien und O. Lummer: Wied. Ann. **56**, 451—456. 1895.

Digitized by Google

2. *Das Drapersche Gesetz eine Folgerung Kirchhoffs aus seinem Satz.* — Eine zweite Folgerung, die Kirchhoff aus seinem Satze zieht, führt zum Draperschen Gesetze. Hierbei geht Kirchhoff von der Erfahrung aus, dafs ein Körper, z. B. ein elektrisch geglühter Platindraht, beim allmählichen Erhitzen anfangs gar keine sichtbaren Strahlen aussendet, dann rote, zu denen sich bei weiterer Temperatursteigerung gelbe, grüne etc. Strahlen gesellen. Zunächst folgert hieraus Kirchhoff, dafs die Strahlungsintensität (J_λ) des schwarzen Körpers für alle Temperaturen unterhalb einer gewissen Temperatur gleich Null ist und für höhere Temperaturen mit diesen wächst; dabei ist diese Grenztemperatur je nach der Wellenlänge verschieden. Die Strahlungsintensität (J_λ) des schwarzen Körpers steht mit dessen Emissionsvermögen (e_λ) in der einfachen Beziehung:

$$J_\lambda = e_\lambda \frac{ds \cdot ds'}{r^2},$$

wenn man mit ds und ds' die Projektionen zweier sich bestrahlenden, schwarzen Flächenelemente auf die Strahlungsrichtung und mit r die Entfernung der Elemente von einander bezeichnet. Nach Kirchhoff erleidet J_λ einen *Sprung*, also auch e_λ, und da A_λ bei jeder Temperatur, unter- und oberhalb der Grenztemperatur *endlich* sein mufs, so folgt logisch richtig, dafs auch E_λ den Sprung bei *derselben Temperatur* wie e_λ ausführt. Nun gilt das Kirchhoffsche Gesetz für jeden Temperaturstrahler, also gelangt man zu Kirchhoffs Folgerung: „dafs *alle* Körper, wenn ihre Temperatur allmählich erhitzt wird, bei derselben Temperatur rot zu glühen, bei einer höheren, allen *gemeinsamen* Temperatur gelbe Strahlen etc. auszugeben anfangen".

Die Kirchhoffsche Annahme, dafs J_λ einen plötzlichen Sprung mache, ist aber nicht zutreffend, da die Strahlungsintensität mit abnehmender Temperatur *asymptotisch* der Null sich nähert.[1])

Aber selbst wenn diese Hypothese richtig wäre, entbehrt, wie ich nun zeigen will, die aus ihr mit Hilfe des Kirchhoffschen Satzes gezogene Konsequenz der Berechtigung.

Aus dem Kirchhoffschen Satz kann man nur das besonders für die Leuchttechnik wichtige Resultat folgern, dafs bei ein- und derselben Temperatur von allen Körpern jedenfalls der schwarze Körper die *maximale* Energie aussendet und zwar in Bezug auf *jede* Wellenlänge. Es werden somit die Energiekurven aller Substanzen bei jeder Temperatur von derjenigen des schwarzen Körpers gleicher Temperatur

1) Hierauf hat auch schon Max Planck aufmerksam gemacht bei Gelegenheit der Herausgabe der Kirchhoffschen Abhandlung in Ostwaldts Klassikern der exakt. Wissensch. Nr. 100. Leipzig. Verlag v. W. Engelmann 1898.

Digitized by Google

eingehüllt, gleichviel, ob der strahlende Körper ein kontinuierliches, ein Banden- oder ein Linienspektrum aussendet; nur mufs er ein reiner Temperaturstrahler sein und darf sein Leuchten nicht der Lumineszenz verdanken.

In unseren gebräuchlichen Lichtquellen wie in den Gas- und Petroleumlampen, in der elektrischen Glüh- und Bogenlampe strahlt hauptsächlich die Kohle in festem Zustande und ihre Strahlung ist zweifellos reine Temperaturstrahlung.

Allen diesen Lichtern ist demnach bei gleicher Temperatur der schwarze Körper an Strahlungsintensität und Helligkeit *überlegen;* wenn man aber auch mit keiner dieser Lichtquellen einen gröfseren Lichteffekt erzielen kann, als mit einem gleichhoch temperierten schwarzen Körper, ist dieser gleichwohl *nicht* der ökonomischste. Denn er sendet auch die maximale Energie im *unsichtbaren* Gebiet des Spektrums aus, und diese ist für das Auge unnützer Ballast. Ökonomischer sind daher als Leuchtstoffe alle diejenigen nichtschwarzen, selektiv reflektierenden Stoffe, welche relativ zum schwarzen Körper die Lichtwellen besser verschlucken als die Wärmewellen und von diesen bilden diejenigen wiederum die ökonomischsten, welche die sichtbaren Strahlen, rot bis violett, vollkommen absorbieren, die unsichtbaren aber vollkommen zurückwerfen oder vollkommen durchlassen. Letztere können als „ideale" Temperaturstrahler bezeichnet werden.

Ob es solche Leuchtkörper giebt, die absolut schwarz für das sichtbare Spektrum und absolut spiegelnd oder durchlässig für das unsichtbare Wellenlängengebiet sind?

Inwieweit der Auerstrumpf seine hohe Leuchtkraft dieser selektiven Reflexionseigenschaft zu verdanken hat, ist noch nicht entschieden. Bei den Oxyden der seltenen Erden scheint ebenso wie bei den in der Nernstlampe glühenden Stoffen die Höhe der erreichten Temperatur (etwa 2400° abs.) die Hauptrolle zu spielen. Schreitet doch hier die Helligkeit etwa mit der zwölften Potenz der absoluten Temperatur fort[1]), sodafs ein höher temperierter schwarzer Körper recht wohl ökonomischer sein kann als ein niedriger temperierter selektiver „idealer" Leuchtkörper.

1) Vergl. O. Lummer und F. Kurlbaum: Verhdlgn. d. Deutsch. Phys. Ges. Bd. II. Nr. 8, pag. 89—92. 1900. Aus dieser Arbeit werde folgende Tabelle mitgeteilt, aus welcher die oben angegebene Potenz gefolgert ist. Mifst man bei einer absoluten Temperatur T_1 und der ihr benachbarten T_2 die zugehörigen Helligkeiten H_1 und H_2 und setzt: $H_1/H_2 = (T_1/T_2)^x$, so erhält man folgende Werte von x:

T abs.	900	1000	1100	1200	1400	1600	1900
x	30	25	21	19	18	15	14

Aus diesem rapiden Anwachsen der photometrischen Helligkeit ist ersichtlich, ein wie scharfes Kriterium hierdurch für Gleichheit der Temperatur, z. B. innerhalb des schwarzen Körpers, gegeben ist.

Digitized by Google

Findet man experimentell, dafs eine Lichtquelle für denselben Spektralbezirk *heller* ist als der schwarze Körper *gleicher* Temperatur, dann folgt nach dem Kirchhoffschen Gesetze notwendig, dafs ihre Strahlung als Luminescenzerscheinung anzusprechen ist. Es müfste dieser Fall eintreten bei den leuchtenden Dämpfen mit Linienspektren z. B. bei der Natrium- oder Lithiumflamme, von denen E. Pringsheim anderweitig[1]) nachgewiesen hat, dafs sie infolge Chemiluminescenz leuchten. Hiernach würden also gerade die Gasspektra auszuscheiden haben, da für sie das Kirchhoffsche Gesetz *nicht* gilt. Auf sie allein wendete man aber die spektralanalytische Methode an.

Gemäfs seiner maximalen Strahlung wird der schwarze Körper von allen anderen Temperaturstrahlern auch *zuerst sichtbar* sein. Es ist klar, dafs wir mit unserem Auge die Existenz von Wellen erst nachweisen, also den sie aussendenden Körper sehen können, wenn deren Intensität den *Schwellenwert* überschritten hat. Dieser wird aber zuerst vom schwarzen Körper erreicht, und nach ihm erst von den übrigen Substanzen, geordnet nach der Gröfse ihres Absorptions- und Emissionsvermögens für die der Beobachtung unterworfenen Wellen. Ein nichtschwarzer Körper wird also im Vergleich zum schwarzen bei einer *höheren* Temperatur erscheinen, bei derjenigen nämlich, für welche seine Strahlungsintensität gerade den Schwellenwert erreicht hat. Und sagt Kirchhoff nicht dasselbe, wenn er obigem Satz hinzufügt: „Die Intensität der Strahlen von gewisser Wellenlänge, welche verschiedene Körper bei derselben Temperatur aussenden, kann aber eine sehr verschiedene sein; sie ist proportional mit dem Absorptionsvermögen der Körper für Strahlen der in Rede stehenden Wellenlänge. Bei derselben Temperatur glüht deshalb Metall lebhafter als Glas und dieses mehr als ein Gas etc."

Mithin ist gezeigt, dafs das Drapersche Gesetz schlechterdings aus dem Kirchhoffschen Satze *nicht* abgeleitet werden kann; jetzt soll bewiesen werden, *dafs es auch nicht aus den Draperschen Versuchen folgt.*

3. *Die richtige Deutung der Draperschen Versuche.* — Draper erhitzt in einem unten geschlossenen Flintenlauf die verschiedensten Substanzen Kalk, Marmor, Flufsspat, Eisen, Glas, Kohle etc. und beobachtet mit gut ausgeruhtem Auge im dunklen Zimmer den Beginn des Leuchtens. Während Kalk, Marmor und Flufsspat mit weifslichem,

1) E. Pringsheim: Wied. Ann. Bd. 45 p. 437. 1892 und Bd. 49 p. 347. 1893. Hierbei möchte ich bemerken, dafs mir die von H. Kayser und in sehr scharfer Weise von F. Paschen gegen Pringsheims Schlüsse geltend gemachten Bedenken der Begründung zu entbehren scheinen.

Digitized by Google

bezw. bläulichem Lichte *zuerst* erschienen, begannen alle Metalle, Kohle und ähnliche Körper bei 977° F. oder 525° C. *zugleich mit dem Flintenrohr rotes Licht* auszusenden. Indem Draper das vom Kalk, Flufsspat etc. ausgesandte Licht als Luminescenzlicht ausschliefst, gelangt er zu dem Schlufs, *„dafs alle festen Körper und vielleicht auch geschmolzene Metalle bei derselben Temperatur zu leuchten beginnen"* und hält diese Temperatur sogar für einen natürlichen Fixpunkt, welcher merkwürdigerweise fast gerade 1000° F. betrage.

Die Drapersche Folgerung ist falsch, da Draper alle Substanzen in einem nahe gleichtemperierten Hohlraum (geschlossener Flintenlauf) erhitzt. Denn in einem solchen Raume müssen, wie wir heute wissen, notwendig alle Substanzen gleichzeitig dieselbe Helligkeit aussenden, falls sie nicht luminescierende sind. Andrerseits ist die Drapersche Annahme, dafs Kalk, Marmor und Flufsspat luminescieren, da sie vor den anderen Substanzen zu leuchten beginnen, zwar richtig, das aber konnte Draper nicht wissen; denn erst auf Grund des Kirchhoffschen Satzes und mit Hilfe der Theorie des Hohlraumes kann das *vor* dem Glühen der meisten Substanzen eintretende Leuchten von Kalk, Marmor und Flufsspat als Ausnahme von der reinen Temperaturstrahlung angesprochen werden.

Es entbehrt die Drapersche wie die Kirchhoffsche Deduktion nicht einer gewissen Komik, wenn man sie vom heutigen Standpunkt aus betrachtet:

G. Kirchhoff zieht aus seinem Satze zwei Folgerungen, von denen die erste zur Theorie des Hohlraumes und des schwarzen Körpers, die zweite zum Draperschen Gesetz führt. Als Beweis für die zweite Folgerung sieht Kirchhoff die Versuche von Draper an und sagt, dafs die dem Draperschen Gesetz nicht folgenden Substanzen, wie Marmor, Kalk und Flufsspat als Ausnahmen von der reinen Temperaturstrahlung zu betrachten sind. Es entspinnt sich sogar eine Art Prioritätsstreit seitens Drapers, welcher betont, dafs seine Arbeiten von Kirchhoff nicht genügend gewürdigt worden seien und sein Gesetz auch ohne die Kirchhoffsche Deduktion als erwiesen hinstellt. Nun ist aber weder die Kirchhoffsche Herleitung des Draperschen Gesetzes stichhaltig, noch folgt dieses Gesetz aus den Draperschen Versuchen. Diese sind eben kein Beweis für Kirchhoffs *zweite* Folgerung, sondern nur für Kirchhoffs *erste* Folgerung, gemäfs der in einem gleichtemperierten Hohlraum die schwarze Strahlung herrscht, in welchem also alle individuellen Eigenschaften der verschiedenen Substanzen verschwinden, soweit sie ihre Strahlung der Temperatur verdanken. Erst auf Grund dieser Beweiskraft der Draperschen Versuche ist der von Draper

Digitized by Google

und Kirchhoff gemeinsam, aus falscher Prämisse erhaltene Schlufs berechtigt, das zeitlich *vor* dem Hohlraum eintretende Glühen von Kalk, Marmor und Flufsspat als Lumineszenz anzusprechen.

Noch ehe also Kirchhoff sein Gesetz formulierte, war der schwarze Körper verwirklicht gewesen. Aber auch der von W. Wien und mir im Jahre 1895 gemachte weitere Vorschlag, mittels des gleichtemperierten Hohlraumes die luminescierenden Substanzen von den Temperaturstrahlern zu scheiden, war von Draper ausgeführt worden, wenn auch die Deutung des Versuchs erst jetzt erkannt worden ist. Dafs selbst dem Schöpfer der Hohlraumtheorie deren Bedeutung und praktische Tragweite nicht ganz zum Bewufstsein gekommen ist, geht wohl daraus hervor, dafs Kirchhoff im Anschlufs an seine Folgerung vom gleichtemperierten Hohlraum sagt[1]): „Der in diesem § ausgesprochene Satz kann auch nicht aufhören zu gelten, wenn unter den gedachten Körpern sich fluorescierende befinden. Die Gleichung $E/A = e$ kann allgemein für einen solchen Körper nicht gelten, aber sie gilt für ihn, wenn er in eine vollkommen schwarze Hülle von derselben Temperatur eingeschlossen ist etc."

Hiernach hätte also Kirchhoff die vorzeitig leuchtenden Substanzen Kalk etc. auch nicht als luminescierende hinstellen dürfen, selbst wenn er sich dessen bewufst geworden wäre, dafs Drapers Versuche gar nicht zum Draperschen Gesetze führen, da doch bei ihnen alle Substanzen im schwarzen Hohlraum erhitzt worden waren.

Übrigens hat Kirchhoff in der späteren ausführlicheren Publikation seiner „Untersuchungen über das Sonnenspektrum und die Spektren der chemischen Elemente", Berlin, Dümmler 1862 obigen Passus fortgelassen. Da er aber nach wie vor das Drapersche Gesetz beibehielt, so folgt, dafs ihm entweder Drapers Versuchsanordnung unbekannt oder dafs ihm seine Hohlraumtheorie nicht bis zu ihrer letzten Konsequenz vertraut war.

Jetzt, nachdem der mit einer Öffnung versehene, gleichtemperierte Hohlraum unsere Kenntnis über die Gesetze der Strahlung so schnell und gründlich gefördert hat, scheint man von gewisser Seite nur zu geneigt, die Verwirklichung der schwarzen Strahlung als eine selbstverständliche Sache hinstellen zu wollen.

Wie sicher begründet das Drapersche Gesetz galt, ist wohl daraus zu ersehen, dafs die zu Grunde liegenden Versuche volle 40 Jahre ohne Wiederholung blieben, obgleich nach dem Kirchhoffschen Gesetz

1) G. Kirchhoff: Pogg. Ann. Bd. **109**, p. 300. 1860.

Digitized by Google

geradezu erwartet werden mufste, dafs die verschiedenen Temperaturstrahler infolge ihres verschiedenen Absorptionsvermögens bei *verschiedener* Temperatur über die Schwelle schreiten würden. Zu dieser Unerschütterlichkeit des Draperschen Gesetzes trug freilich Kirchhoffs vermeintliche theoretische Begründung wesentlich bei.[1])

4. *Die Grauglut in ihrer Beziehung zum Draperschen Gesetz.* — Erst H. F. Weber[2]) lenkte die allgemeine Aufmerksamkeit wieder den Draperschen Versuchen zu, als er den Beginn der Rotglut verschiedener Kohlefasern beobachtete, um die Ökonomie der Glühlampen zu bestimmen. Bei Ausführung dieser Beobachtungen im Dunkelzimmer bei Nacht, bemerkte er, dafs die Lichtentwickelung gar nicht mit der Rotglut beginnt, sondern der Kohlefaden anfangs ein *„düsternebelgraues"* oder *„gespenstergraues"* Licht aussendet. „Diese erste Spur düsternebelgrauen Lichtes erscheint dem Auge als etwas unstet, glimmend, auf- und abhuschend, und dieses Hin- und Herzittern verschwindet erst mit dem Auftreten der ersten Andeutung der Rotglut; von da an machte das von dem Faden ausgesandte Licht den Eindruck eines absolut ruhigen Lichtes."

Hiermit schien das Drapersche Gesetz ganz zu Falle gebracht, zumal H. F. Weber und R. Emden[3]) feststellten, dafs Gold schon bei 423° C. und Neusilber bei 403° C. Licht auszusenden beginnen, während die erste Rotglut nach Draper erst bei etwa 525° C. einsetzt.

Aber auch hier schleicht sich ein Irrtum ein, der die Schlufsfolgerung aus den Weberschen Versuchen hinfällig macht. Ehe ich dies zeige, möchte ich darauf aufmerksam machen, dafs Draper selbst ebenfalls die Grauglut beobachtet hat, ohne ihr näher nachzuspüren, noch die nötigen Konsequenzen daraus zu ziehen. Aufser den Versuchen mit dem Flintenrohr stellte Draper nämlich auch noch Sehversuche

1) Auch in dem kürzlich erschienenen I. Band des Handbuchs der Spektroskopie von H. Kayser findet sich bei Erwähnung des Draperschen Gesetzes noch der Passus: „Man hatte auch wohl nach Versuchen von Wedgewood schon die Meinung ausgesprochen, alle Körper begönnen bei derselben Temperatur zu leuchten; aber erst Draper suchte diese Frage experimentell zu entscheiden und fand die richtige Antwort, welche sich später als eine Konsequenz des Kirchhoffschen Satzes herausstellen sollte", aus welchem hervorgeht, dafs der Autor diese Konsequenz als richtig anerkennt. Unmittelbar vorher macht freilich auch H. Kayser darauf aufmerksam, dafs der Drapersche Versuch in Wahrheit nichts beweise, da sich die sämtlichen Körper in demselben Hohlraum befänden.

2) H. F. Weber: Berl. Akad. Ber. **28**, 491. 1887. Wied. Ann. **32**, 256. 1887.

3) R. Emden: Wied. Ann. **36**, 214—236. 1889.

Digitized by Google

im Spektrum an, indem er durch ein Prisma nach einem elektrisch geglühten Platindraht blickte.[1]) Dabei fand er, dafs mit der ersten Spur orange-roten Lichtes sich Licht auch *im gelben Teil des Spektrums bemerkbar machte, jedoch farblos und grünlich-grau auftrat.* Erst wenn die Temperatur stieg, verwandelte sich das farblose Grau in Gelb und gleichzeitig dehnte sich das Spektrum nach *beiden* Seiten, dem Rot und dem Violett hin aus.

Mufs somit Draper als der Entdecker der Grauglut angesehen werden, so gebührt H. F. Weber das Verdienst, ohne spektrale Zerlegung die Grauglut bemerkt und ihre phantastischen Erscheinungen beobachtet zu haben. Auch Weber dehnte seine Versuche auf das Spektrum aus, bei deren Deutung er ähnlich wie Kirchhoff den Unterschied zwischen rein subjektiven Empfindungen und den ihnen zu Grunde liegenden objektiven Vorgängen nicht genügend berücksichtigte.[2])

Soweit ich die Litteratur durchgesehen habe, scheint Lecher[3]) der Einzige gewesen zu sein, der die Drapersche Entdeckung der Grauglut beachtet und sie sogleich gegen das Drapersche Gesetz ins Feld geführt hat. Da nach Draper das Leuchten im orange-gelben Teile des Spektrums beginne, könne unmöglich das Drapersche Gesetz gelten. Aber Lecher schliefst auch unerlaubt von subjektiven Erscheinungen auf objektive Vorgänge, wenn er die Drapersche Beobachtung im Spektrum als Beweis dafür ansieht, dafs die Strahlung eines Körpers schon beim Beginn des Leuchtens dieselbe Zusammensetzung habe, wie bei den höchsten Temperaturen. Es ist bekannt, dafs auch die Sonne ihr Energiemaximum im gelben Teile des Spektrums besitzt. Da nun nach Draper die erste Lichtentwicklung ebenfalls im Gelb stattfindet, so sieht Lecher den Satz als erwiesen an, dafs das Energiemaximum bei allen Temperaturen an derselben Spektralstelle liege, ein Gesetz, welches Lecher auf theoretischem Wege aus dem Kirchhoffschen Satze gefolgert hatte, und welches durch Versuche von W. Jaques[4]) wahrscheinlich gemacht war. Die beobachteten geringen Verschiedenheiten in den Wärmespektren verschiedener fester Körper schiebt Lecher auf die Störungen, welche die aus dem Innern kommende Strahlung an der Grenzfläche durch selektive Reflexion erfährt.

1) J. W. Draper: Scientific Memoirs p. 33. London 1878.

2) Vergl. hierzu F. Stenger: Wied Ann. **32**, 271. 1887 und S. P. Langley: Philos. Mag. (5) Bd. **27**, 1—23. 1889.

3) E. Lecher: Wien. Akad. Ber. **85**, (II) p. 441—490. 1882

4) W. W. Jaques: Inaug. Diss. Johns Hopkins Univ. Baltimore. I. Wilson and Son. 1879. Proc. Amer. Acad. Bd. III, p. 865. 1879.

Digitized by Google

Wir wissen heute, dafs sich das Energiemaximum mit steigender Temperatur immer mehr vom ultraroten nach dem violetten Teile des Spektrums verschiebt, wobei das Produkt aus der absoluten Temperatur und der Wellenlänge, bei der das Maximum im Spektrum liegt, wenigstens beim schwarzen Körper und beim blanken Platin konstant bleibt.[1])

Während das Drapersche Gesetz der Theorie von Lecher im Wege stand, betrachtet R. v. Kövesligethy[2]) bei seinen theoretischen Studien zur Herleitung einer Spektralgleichung „das Drapersche Gesetz als eine theoretische Forderung des Kirchhoffschen Satzes, das weiteren Untersuchungen wohl zu Grunde gelegt werden darf".

Von dem Einwand, der dem Draperschen Gesetz durch die Grauglut erwächst, wird abgesehen. Und thatsächlich haben die Grauglut und die Rotglut auch nur das eine gemeinsam, dafs sie subjektive Erscheinungsformen derselben objektiven Ursache sind. Beide Empfindungen werden in unserem Gehirn geweckt, wenn wir im Dunkelzimmer die allmähliche Temperatursteigerung eines Körpers von der Zimmertemperatur bis zur Glühtemperatur beobachten und uns hierbei des *Auges* bedienen. Irgend ein anderer Energiemesser, wie z. B. das Bolometer, würde nur ein *kontinuierliches* Anwachsen der Energie notieren. Unser Auge aber meldet einen *zweimaligen Sprung*, erst vom Dunkel zum Gespenstergrau (Grauglut) und später von der Grauglut zur *farbigen* Glut (Rotglut). In beiden Fällen entsteht der „Sprung" durch das Überschreiten der Reizschwelle unseres Sehnerven; nur die vermittelnden Organe sind in beiden Fällen andere: die Grauglut entspricht der Reizschwelle der *Stäbchen*, die Rotglut der Reizschwelle der *Zapfen* unserer Netzhaut.[3])

5. *Wesen der Grauglut und Rotglut.* — Dank den physiologischen Errungenschaften der letzten Dezennien, gelang es mehr und mehr, die Wirkungsweise unserer beiden Netzhautorgane von einander zu trennen und ihre gesonderten Aufgaben zu ergründen. Schon A. König[4]) hatte das Farblossehen des Spektrums bei geringer Helligkeit den Stäbchen unserer Netzhaut zugeschrieben und für die Zapfen das farbige Sehen (mit Ausnahme von Blau) reserviert. J. v. Kries[5]) ging weiter und

1) O. Lummer und E. Pringsheim: Verhdlgn. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. Berlin I. Nr. **12**, 215—235. 1899.

2) R. v. Kövesligethy: „Grundzüge einer theoretischen Spektralanalyse". Halle bei H. W. Schmidt. 1890.

3) O. Lummer: Verhdlgn. d. Physik. Ges. zu Berlin **16**, 121—127. 1897 und Wiedem. Ann. **62**, 14—29. 1897.

4) A. König: Berl. Akad. Ber. 1894, p. 577.

5) J. v. Kries: Z. S. f. Psych. u. Phys. d. Sinnesorgane **9**, 81—123, 1894.

Digitized by Google

stellte die Hypothese auf, dafs die Zapfen das farbige Sehen überhaupt, die Stäbchen dagegen das farblose Sehen bei geringer Helligkeit vermitteln, bei der die Zapfen ganz ausgeschaltet sind.

Dementsprechend bezeichnet Kries die Zapfen als unseren farbentüchtigen „Hellapparat", die Stäbchen als den totalfarbenblinden „Dunkelapparat". Dabei hat der Stäbchenapparat die besondere Fähigkeit, seine hohe Empfindlichkeit gegen schwaches Licht durch den Aufenthalt im Dunkeln wesentlich zu steigern. „Dunkeladaptation" nennt Kries diese Eigenschaft der Stäbchen. Es ist interessant, dafs die vergleichenden Anatomen lange vorher schon gefunden hatten, dafs die im Dunkeln lebenden Tiere, wie die Eule, der Maulwurf etc., nur Stäbchen besitzen, während wir gerade umgekehrt auf der Stelle des deutlichsten Sehens, der *Fovea centralis* oder der Netzhautgrube, nur *Zapfen* aufweisen können.

In der citierten Arbeit: „Über Grauglut und Rotglut" habe ich gezeigt, dafs die von Weber beobachteten, merkwürdigen Glüherscheinungen ihre vollständige Erklärung finden, sobald man die *Grauglut als eine Empfindung der Stäbchen und die Rotglut als eine solche der Zapfen hinstellt.*

Betrachten wir z. B. im Dunkelzimmer bei Nacht mit gut ausgeruhtem Auge ein elektrisch geglühtes Platinblech.

Solange die Zapfen noch nicht in merkbare Erregung geraten, kommt von der Netzhautgrube auch keine Lichtmeldung zum Gehirn. Diese geht vielmehr von den Stellen des *indirekten* Sehens aus, mit denen wir für gewöhnlich nicht zu beobachten gewöhnt sind. Dann tritt der merkwürdige Zustand ein, dafs wir etwas sehen, was wir *nicht* anblicken, und dafs die Lichtempfindung aufhört und das Gesehene verschwindet, wenn wir den Blick dorthin richten, von wo die erregenden Strahlen zu kommen scheinen. So bleibt unser Bestreben, die indirekt gesehene, grau leuchtende Stelle des Platinbleches direkt zu sehen und scharf zu fixieren, fruchtlos. Dieser Umstand bewirkt offenbar jenes von Weber den Temperaturschwankungen und der Müdigkeit des Auges zugeschobene „unstete Hin- und Herzittern", welches Weber während des ganzen Stadiums der Grauglut beobachtet hat. Dieser uns ungewohnte, und weil wir auf seine Erklärung nicht verfallen, rätselhafte Zustand hört auf, sobald die Temperatur eine solche Höhe (nach Draper etwa 525° C.) erreicht hat, dafs auch die Zapfen im Gehirn eine deutliche Lichtempfindung hervorbringen. Jetzt erst meldet die Netzhautgrube „Licht", und uns erscheint auch das leuchtend, was wir fixieren.

Die Färbung dieser ersten auftretenden *farbigen* Glut (sogenannten Rotglut) hängt nicht unwesentlich von der Gröfse des getroffenen Netzhautteiles ab. Infolge des Wettstreites beider Sehapparate, ihre ge-

Digitized by Google

sonderten Meldungen im Gehirn zur alleinigen Geltung zu bringen, die Stäbchen eine *farblose*, die Zapfen eine *farbige* Empfindung, mufs notwendig eine Verschmelzung beider Empfindungen zustande kommen. Es läfst sich von vornherein daher nichts Bestimmtes über die Farbe aussagen, mit welcher die sogenannte „Rotglut" über die Schwelle tritt. Nur soviel läfst sich vermuten, dafs die Farbe infolge der Vermischung mit Weifs eine wenig gesättigte sein wird. Unter der Annahme, dafs die Zapfen zuerst auf die gelbgrüne Strahlung reagieren, für welche Spektralregion wir im Hellen am empfindlichsten sind, wird die Grauglut zunächst in eine gelblichweifse und dann in eine mehr rötliche Glut übergehen müssen, ähnlich wie Weber es beschreibt. Aber, wie schon erwähnt, die Theorie kann hier nicht viel leisten; aus ihr folgt nur, dafs je nach dem Verhältnis der Anzahl der getroffenen Stäbchen zu derjenigen der Zapfen der Verlauf ein anderer sein mufs, und dafs der Beginn der farbigen Glut nicht allein von der Höhe der Temperatur, sondern auch von der Stelle abhängt, mit welcher wir beobachten. In der That erscheint uns eine etwa die Netzhautgrube ausfüllende Fläche bei 600° C. *direkt* gesehen in schönstem Feuerrot, während sie, *indirekt* gesehen, einen gespenstergrauen, dem Sternenlicht ähnlichen Ton annimmt.

6. *Hat das Drapersche Gesetz überhaupt einen Sinn?* — Oben haben wir gezeigt, dafs das Drapersche Gesetz weder aus den Draperschen Versuchen folgt noch aus dem Kirchhoffschen Gesetz theoretisch hergeleitet werden kann. Vielmehr ist es wahrscheinlich, dafs, entsprechend ihrem verschiedenen Absorptions- und Emissionsvermögen, die verschiedenen festen Körper *nicht* bei derselben Temperatur rot zu leuchten beginnen. Die Entdeckung der Grauglut schien das Drapersche Gesetz vollständig umzustofsen. Wenn dieser Schlufs nach meiner Theorie von der Grauglut und Rotglut auch nicht mehr stichhaltig ist, so folgt aus ihr gleichzeitig, dafs das Drapersche Gesetz keinen rechten Sinn mehr hat, wenigstens aber, dafs die Fragestellung beim Draperschen Gesetz eine ganz andere werden mufs. Nicht ob alle festen Körper bei gleicher Temperatur *rot* zu leuchten beginnen, ist die Frage, sondern es hat vom Standpunkte der entwickelten Theorie der Grauglut und Rotglut aus lediglich einen Sinn zu fragen, *welche* Körper gleichzeitig die Reizschwelle der Zapfen oder der Stäbchen überschreiten und welches die Farbe ist, mit der sie erscheinen.

Abgesehen davon, dafs so spezielle Fragen lange nicht mehr das Interesse beanspruchen können, wie das Drapersche Gesetz, welchem fast die Bedeutung eines Naturgesetzes beigelegt worden war, bietet deren Beantwortung auch noch beträchtliche Schwierigkeiten. Relativ leicht gelingt die Ausschaltung der Zapfen bei Beobachtung der Grauglut

Digitized by Google

mittels der Stäbchen. Man braucht nur mit dem gut im Dunkeln ausgeruhten Auge *peripher* zu beobachten oder so grofse leuchtende Flächen zu betrachten, dafs deren Netzhautbild aufser der Fovea centralis auch die umliegende, stäbchenreiche Netzhaut bedeckt. Freilich scheint hierbei auch die Gröfse der gleichzeitig erregten Fläche eine Rolle zu spielen, sodafs vergleichbare Angaben nur bei Inanspruchnahme der ganzen Retina zu erwarten sind.

Hatten Weber und Emden beobachtet, dafs die verschiedenen Metalle innerhalb 400° C. und 423° C. grau über die Schwelle treten, so gelang es mir unter den günstigst gewählten Bedingungen, den schwarzen Körper schon bei 360° C. grau schimmern zu sehen.[1])

Schwieriger gestaltet sich die Ausschaltung der Stäbchen, um die *farbige* Glut mittels der Zapfen einwandsfrei zu beobachten. Natürlich wählt man zunächst die leuchtende Fläche so klein, dafs beim Beobachten lediglich die Fovea centralis in Thätigkeit tritt, da auf ihr die Stäbchen ganz fehlen. In diesem Falle mufs die glühende Fläche, sobald sie überhaupt gesehen wird, sogleich auch *farbig* auftreten. In Wirklichkeit ist aber auch dann die Ausschaltung der Stäbchen gerade im ersten Stadium der farbigen Glut schlechterdings unmöglich. Denn beim Beobachten im Dunkeln wird man durch die unwillkürlichen Augenbewegungen zumal bei dunkeladaptiertem Auge nur zu leicht verführt, die viel früher eintretende Grauglut zu beobachten. Sieht man aber einmal die grauleuchtende kleine Fläche, so kostet es die allergröfste Anstrengung, durch willkürliche Blickänderung ihr Bild mit der Fovea centralis zur Deckung zu bringen. Ist dies durch Zufall geglückt, dann ist die leuchtende Fläche verschwunden und das Sehfeld ganz dunkel. Aber nur auf kurze Momente ist das Hervorbrechen der grauleuchtenden, einem Sterngebilde gleichenden und immer heller werdenden Fläche trotz bester Absicht zu verhindern. Somit wird man den Eintritt der farbigen Glut erst feststellen, wenn die Konkurrenz der Stäbchen überwunden ist. Dann erst herrscht unumschränkt die Netzhautgrube. Man wird also sowohl die Temperatur der ersten farbigen Glut, als auch deren Farbe infolge der unvermeidlichen Beimengung des „Stäbchengraus" nicht einwandsfrei bestimmen.

Wir ersehen jedenfalls hieraus recht deutlich, wie genau wir erst unser Handwerkszeug, die Sinnesorgane, studieren und kennen lernen müssen, ehe wir aus der Beobachtung Schlüsse auf die Aufsenwelt oder das Kantsche „Ding an sich" ziehen dürfen.

Charlottenburg, den 31. Januar 1901.

1) O. Lummer: Z. S. f. Instrumkde **19**, 216. 1899.

Digitized by Google

Die Beziehungen der Zentralellipse eines ebenen Flächenstückes zu seinem imaginären Bilde.

Von Stanislaus Jolles in Berlin.

1. Binet hat das Trägheitsmoment $J_{\lambda\lambda}$ eines Flächenstückes $\mathfrak{F}$ einer Ebene ε hinsichtlich eines in ihr gelegenen Strahles g_λ eingeführt. Ist r_λ der parallel einer gegebenen Richtung gemessene Abstand eines Flächenelements $d\mathfrak{F}$ vom Strahle g_λ, so versteht er unter $J_{\lambda\lambda}$ das über das Flächenstück $\mathfrak{F}$ ausgedehnte Integral:

$$\int r_\lambda^2 d\mathfrak{F}.$$

Zugleich mit $J_{\lambda\lambda}$ untersucht er das jetzt meist als Zentrifugalmoment hinsichtlich der Strahlen $g_\varkappa$ und g_λ bezeichnete Integral:

$$\int r_\varkappa r_\lambda d\mathfrak{F},$$

wobei sich ebenfalls die Integration über alle Flächenelemente von $\mathfrak{F}$ erstreckt. Zwei Strahlen $g_\varkappa$ und g_λ werden zuerst nach Binet konjugiert hinsichtlich ihrer Trägheitsmomente genannt, wenn für sie die Beziehung:

$$J_{\varkappa\lambda} = 0$$

gilt. Durch jeden Punkt P von $g_\varkappa$ geht ein ihm konjugierter Strahl $g_\lambda^{(P)}$. Sind in $J_{\varkappa\varkappa}$ die $r_\varkappa$ parallel zu $g_\lambda^{(P)}$, so ist $J_{\varkappa\varkappa}$ insbesondere das $g_\varkappa$ hinsichtlich P konjugierte Trägheitsmoment $J_{\varkappa\varkappa}^{(P)}$. Der Ausdruck für $J_{\varkappa\varkappa}^{(P)}$ läfst sich auch in der Form:

$$[\varrho^{(P)}]^2 \cdot \mathfrak{F}$$

schreiben. Hierin bedeutet $[\varrho^{(P)}]^2$ das Quadrat zweier entgegengesetzt gleichen Strecken $\pm \varrho^{(P)}$, sie laufen parallel zu $g_\varkappa^{(P)}$, und heifsen jetzt die $g_\varkappa$ bezüglich P konjugierten Trägheitshalbmesser. Ihre Endpunkte liegen, wenn $g_\varkappa$ sich um P dreht, und sie von P aus der Gröfse und Richtung nach abgetragen werden, auf der Trägheitsellipse π^2 des Punktes P. Die Achsen von π^2 sind identisch mit den beiden durch P gehenden Hauptträgheitsachsen und berühren in P zwei durch P gehende konfokale Kegelschnitte, die einer bestimmten Schar angehören. Den Tangenten eines solchen Kegelschnittes sind hinsichtlich ihrer Berührungspunkte zu ihnen senkrechte Trägheitshalbmesser gleicher

Digitized by Google

Länge konjugiert. Diese grundlegenden, von Binet[1]) schon 1813 veröffentlichten Ergebnisse gerieten bald in Vergessenheit und wurden später von Anderen noch einmal gefunden, ohne dafs hierbei neue Gesichtspunkte zu Tage traten. Das Verdienst, solche wieder gegeben zu haben, gebührt Culmann und Herrn Routh. Jener wies zuerst auf ein für die Theorie der Trägheitsmomente wichtiges Polarsystem Γ^2, dem Antipolarsystem, hin[2]); dieser auf ∞^1 Dreiecke, bei denen in ihren drei Eckpunkten konzentrierte Flächenstücke von der Gröfse $\frac{1}{3}\mathfrak{F}$ dem Flächenstücke $\mathfrak{F}$ hinsichtlich seiner Trägheitsmomente gleichwertig sind.[3]) Kurz darauf zeigte Herr Reye, dafs Dreiecke, in deren Eckpunkten Flächenstücke derart konzentriert werden können, dafs sie $\mathfrak{F}$ hinsichtlich seiner Trägheitsmomente ersetzen, Poldreiecke des Polarsystems Γ^2 sind.[4]) Später kommt Hesse ebenfalls auf das Polarsystem Γ^2, dessen imaginäre Ordnungskurve nach ihm das imaginäre Bild des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ genannt wird Bezüglich ihrer Tangenten ist, wie er zuerst hervorgehoben hat, das Trägheitsmoment von $\mathfrak{F}$ gleich Null.[5])

Herr Reye und Hesse ergründen den Zusammenhang des Polarsystems Γ^2 mit der Theorie der Trägheitsachsen auf analytischem Wege. Im Folgenden wird er aus einigen ganz elementaren Eigenschaften der Trägheitsellipse synthetisch abgeleitet, und dies scheint mir mit Rücksicht auf die geometrische Mechanik, insbesondere die graphische Statik, nicht unwichtig zu sein.

2. Die Trägheitsellipse π^2 eines beliebigen Punktes P und die Zentralellipse σ^2 haben zwei reelle Tangenten mit einander gemein. Diesen Strahlen sind in Bezug auf π^2 und σ^2 wiederum parallele Durchmesser d_π und d_σ konjugiert. Zwischen den d_π und d_σ hinsichtlich P und S konjugierten Trägheitshalbmessern $\pm \delta_\pi^{(P)}$ und $\pm \delta_\sigma^{(S)}$ und dem Abstande des Schwerpunktes S vom Punkte P besteht folglich die Gleichung:

$$[\delta_\pi^{(P)}]^2 = [\delta_\sigma^{(S)}]^2 + SP^2.$$

---

1) Binet: Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des momens d'inertie des corps. Journ. de l'Ecole Polyt. **9**, 16. Heft (1813), S. 41. (Lu à l'Institut, en Mai 1811.)

2) Culmann: Die graphische Statik. Zürich 1866, 2. Abschnitt, 7. Kapitel, §. 63—67. Die ersten beiden Abschnitte erschienen, wie aus der Vorrede S. IX zu ersehen ist, als erste Lieferung schon 1864.

3) E. J. Routh: Note of the moment of inertia of a triangle. Quarterly journal, **6** (1864), S. 267.

4) Reye: Beitrag zu der Lehre von den Trägheitsmomenten, Zeitschrift für Mathematik u. Physik **10** (1865), S. 433.

5) Hesse: Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. II. Auflage, Leipzig, 1869, 25. Vorlesung.

Digitized by Google

Sie läßt sich, wenn die Kegelschnitte π^2 und σ^2 den Strahl SP (Fig. 1) in den Punktepaaren S_1, S_1' und P_1, P_1' schneiden, auch in der Form:

$$PP_1^2 = SS_1^2 + SP^2$$

schreiben. Und nunmehr folgt aus ihr:

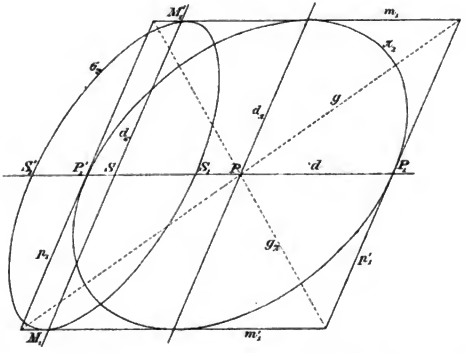
$$SS_1^2 = (PP_1 - SP)(PP_1 + SP),$$

oder da $PP_1 = P_1'P$ ist:

$$(\alpha) \qquad -SS_1^2 = SP_1 \cdot SP_1'.$$

D. h. Trägheitsellipsen π^2, deren Mittelpunkte auf einem durch den

Fig. 1.



Schwerpunkt S gehenden Strahle d liegen, schneiden ihn in Punktepaaren P_1, P_1' einer elliptischen Involution mit dem Mittelpunkte S.

Bezüglich der Zentralellipse σ^2 sind nun auf d den Punkten P_1 die Punkte P_2 konjugiert, sie bilden eine durch die Beziehung:

$$(\beta) \qquad SS_1^2 = SP_1 \cdot SP_2$$

charakterisierte hyperbolische Involution.

Aus (α) und (β) folgt ohne weiteres:

$$SP_1' = -SP_2.$$

P_1' ist also das Spiegelbild des zu P_1 bezüglich σ^2 konjugierten Punktes P_2, wenn die Spiegelung im Schwerpunkte S vor sich geht.

Die einem Punkte P_1 bezüglich der Zentralellipse σ^2 konjugierten Punkte P_2 liegen auf seiner Polare p_2 bezüglich σ^2 und gehen durch

Digitized by Google

Spiegelung in S in Punkte P_1' auf dem Spiegelbilde p_1' von p_2 über. Durchläuft P_1 einen Strahl q_1, so dreht sich p_2 um den Pol Q_2 von q_1 bezüglich σ^2, und folglich sein Spiegelbild p_1' um das Spiegelbild Q_1' von Q_2. Jedem durch P_1 gehenden Strahle q_1 entspricht also ein auf p_1' gelegener Punkt Q_1'. Die beiden konjektiven Felder $\Phi_1(P_1, \ldots, q_1, \ldots)$ und $\Phi'(p_1', \ldots, Q_1', \ldots)$ sind demnach korrelativ, und zwar bilden sie ein Polarsystem Γ^2, da in dem von den Strahlen d, d_∞ und der unendlich fernen Geraden begrenzten Dreiecke die Eckpunkte den gegenüberliegenden Seiten entsprechen. Das Polarsystem Γ^2 hat eine imaginäre Ordnungskurve, seine konjugierten Durchmesser fallen mit denen der Zentralellipse zusammen. Die Zentralellipse und die imaginäre Ordnungskurve von Γ^2 gehen in sich selbst über, wenn einer dieser Kegelschnitte in Bezug auf den anderen polarisiert wird; sie sind harmonisch einander zugeordnet[1]) oder, nach Christian Wiener, jeder eine Imaginärprojektion[2]) des anderen. Da die Polare p_2 von P_1 bezüglich σ^2 sich in S als Polare p_1' von P_1 im Polarsysteme Γ^2 spiegelt, so nennt Culmann p_1' die Antipolare von P_1 und analog P_1' den Antipol von p_1'.

Mit der Zentralellipse σ^2 des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ ist auch sein Polarsystem Γ^2 gegeben, und umgekehrt mit diesem jene. Zwei in einer Ebene gelegene Flächenstücke — gleichgültig, ob sie aus einem oder mehreren Teilen bestehen — sind also hinsichtlich ihrer Trägheitsmomente gleichwertig, wenn sie gleichen Inhalt haben und in ihren Polarsystemen Γ^2 jedem Punkte dieselbe Polare entspricht, d. h. sie aufserdem ein und dasselbe Polarsystem Γ^2 bestimmen.

3. Die beiden zum Durchmesser d parallelen Tangenten m_1 und m_1' der Trägheitsellipse π^2 eines Punktes P von d (Fig. 1) berühren jede σ^2 in dem Pole der anderen im Polarsysteme Γ^2. Das Gleiche gilt von den die Trägheitsellipse π^2 berührenden Strahlen p_1 und p_1', ihre Berührungspunkte P_1' und P_1 sind nämlich in Γ^2 konjugiert, während sie selbst parallel laufen zu dem d bezüglich π^2 konjugierten Durchmesser d_π und somit auch zu dem ihm in Γ^2 konjugierten Durchmesser d_∞. Das der Trägheitsellipse π^2 umschriebene Parallelogramm mit den Seiten m_1, m_1', p_1, p_1' ist also ein Polviereck des Polarsystemes Γ^2, und folglich sind seine Diagonalen g und g_π nicht nur bezüglich π^2, sondern auch in ihm konjugiert. Die durch das Polarsystem Γ^2 im Mittelpunkte P der Trägheitsellipse π^2 hervorgerufene Strahleninvolution hat hiernach mit dem involutorischen Strahlenbüschel der kon-

1) Schröter-Steiner: Die Theorie der Kegelschnitte. I. Auflage, Leipzig, 1867, §. 54.

2) Christian Wiener: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig, 1884, 1. Bd., VI. Abschnitt, XIII.

Digitized by Google

jugierten Durchmesser von π^2 zwei ihrer Strahlenpaare d, d_π und g, g_π gemein. D. h. die konjugierten Durchmesser der Trägheitsellipse π^2 eines beliebigen Punktes P und die sich in P schneidenden konjugierten Strahlen des Polarsystemes Γ^2 bilden dieselbe Strahleninvolution. Zwei hinsichtlich ihrer Trägheitsmomente konjugierte Strahlen sind auch in Γ^2 konjugiert, insbesondere sind die Hauptträgheitsachsen eines Punktes P die Achsen des durch Γ^2 in P hervorgerufenen involutorischen Strahlenbüschels. Für sie gelten also alle die bekannten Sätze über die konjugierten normalen Strahlen eines Polarsystemes. Fallen zwei konjugierte Strahlen eines Polarsystemes zusammen, so bilden sie eine Tangente seiner Ordnungskurve. Hinsichtlich der Tangenten der imaginären Ordnungskurve von Γ^2 ist demnach das Trägheitsmoment von $\mathfrak{F}$ gleich Null.

4. Zwei in einem Brennpunkte G_2 der Zentralellipse σ^2 sich rechtwinklig schneidende Strahlen sind bezüglich σ^2 konjugiert, sonach bilden im Polarsysteme Γ^2 die den Strahlen des Büschels G_2 konjugierten normalen Strahlen einen Strahlenbüschel. Sein Träger ist der zweite Brennpunkt G_1' von σ^2, er ist nämlich in Γ^2 der Pol der G_2 bezüglich σ^2 entsprechenden Leitlinie g_1. Die beiden Strahlenbüschel G_2 und G_1' sind projektiv und erzeugen einen Kreis, wenn jedem Strahle des einen Büschels der ihm konjugierte des anderen zugewiesen wird. Durch seine Schnittpunkte K_1 und L_1 mit der Nebenachse der Zentralellipse geht außer den in Γ^2 konjugierten normalen Strahlen G_2K_1, $G_1'K_1$ oder G_2L_1, $G_1'L_1$ noch je ein der Nebenaxe in Γ^2 konjugierter normaler Strahl. Somit sind K_1 und L_1 die Brennpunkte von Γ^2, sie stehen vom Schwerpunkte S ebensoweit ab, wie die Brennpunkte G_2 und G_1' der Zentralellipse. Konfokalen Zentralellipsen entspricht hiernach dasselbe System von Hauptträgheitsachsen.

Die Achsen der einem Punkte P in Γ^2 zukommenden Strahleninvolution hälften die Winkel der Strahlen, die die Brennpunkte K_1 und L_1 von P aus projizieren. Es folgt also hieraus ohne weiteres die bekannte Konstruktion der Hauptträgheitsachsen eines Punktes P mit Hilfe der Brennpunkte der Zentralellipse σ^2; sie werden eben bei ihr in die Brennpunkte von Γ^2 übergeführt.

5. Die Brennpunkte K_1 und L_1 des Polarsystemes Γ^2 tragen orthogonale Strahleninvolutionen und fallen sonach mit den Trägheitsbrennpunkten[1]) des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ zusammen. Ihre Trägheitsellipsen

1) Die Trägheitsbrennpunkte wurden gleichzeitig von Poisson und Binet entdeckt; man vergleiche: Poisson: Traité de mécanique. Paris 1811, Band II, S. 102—105 und S. 496—500 (Addition aux propriétés des momens d'inertie et des axes principaux). Binet a. a. O., S. 63.

Digitized by Google

sind gleich grofse Kreise, deren Halbmesser die Länge der halben Hauptsehne a von σ^2 haben. Wird den senkrechten Abständen g_k und g_l der Brennpunkte K_1 und L_1 von einer Geraden g gleiches oder verschiedenes Vorzeichen zuerteilt, je nachdem sie auf der nämlichen Seite von g liegen oder nicht, so läfst sich die absolute Länge ϱ_g des einer Geraden g konjugierten zu ihr senkrechten Trägheitshalbmessers bekanntlich[1]) durch die Formel:

$$(a^2 + g_k g_l)$$

ausdrücken. Das Produkt $g_k g_l$ bleibt konstant für alle Tangenten eines durch die Brennpunkte K_1 und L_1 und die Tangente g bestimmten Kegelschnittes γ_g^2, also bilden alle Kurven, deren Tangenten gleich lange ihnen konjugierte senkrechte Trägheitshalbmesser entsprechen, eine Schar konfokaler Kegelschnitte mit den Brennpunkten K_1 und L_1. Zu ihnen gehört nach **3.** auch die imaginäre Ordnungskurve von Γ^2.

Aus der konstanten Exzentrizität c^2 dieser konfokalen Kegelschnitte und dem Quadrate der halben Hauptsehne a_g von γ_g^2 berechnet sich

$$g_k g_l = a_g^2 - c^2,$$

und folglich, wenn b die halbe Nebensehne der Zentralellipse bedeutet:

$$(a^2 + g_k g_l) = (b^2 + a_g^2).$$

Hierin ist nicht nur b, sondern auch a_g bekannt. Es ist als halbe Hauptsehne von γ_g^2 gleich dem Halbmesser seines Fufspunktkreises, also gleich dem Abstande des Schwerpunktes S von den Fufspunkten G_k oder G_l von g_k oder g_l auf g.

Eine unmittelbare Folge hiervon ist eine *ausnehmend* einfache Konstruktion der absoluten Länge ϱ_g des einer Geraden g konjugierten zu ihr senkrechten Trägheitshalbmessers. Man fällt von einem Brennpunkte (Fig. 2), etwa K_1, des Polarsystemes Γ^2 ein Lot $K_1 G_k$ auf g, und beschreibt um den Schwerpunkt S mit SG_k einen Kreis. Er schneidet die Hauptachse der Zentralellipse in Punkten, die von den Nebenscheitelpunkten der Zentralellipse um ϱ_g abstehen. In Fig. 2. sind nach dieser Angabe die den Hauptträgheitsachsen g und h eines Punktes P konjugierten senkrechten Trägheitshalbmesser $\pm \varrho_g$ und $\pm \varrho_h$ ermittelt.

6. Der erste Beweis[2]), den Herr Reye von seinem in **1.** angeführten Satze gab, lieferte ihm das Polarsystem Γ^2. Er vereinfacht sich nunmehr und wird frei von seiner analytischen Einkleidung, da in **2.** und **3.** der Zusammenhang zwischen den Trägheitsellipsen beliebiger Punkte und dem Polarsysteme Γ^2 unabhängig von ihm synthetisch be-

1) Näheres hierüber z. B. bei E. J. Routh: An elementary treatise of the dynamics of a system of rigid bodies. Cambridge 1860, Sect. II, Arts. 19—20.

2) a. a. O., § 3 und § 4.

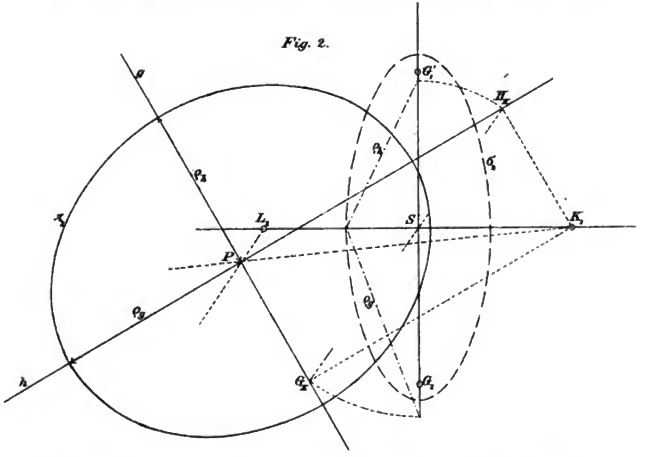
Digitized by Google

gründet wurde. Soll ein System Σ von drei in den Punkten P_1, P_2 und P_3 konzentrierten Flächenstücken $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ das Flächenstück $\mathfrak{F}$ hinsichtlich seiner Trägheitsmomente ersetzen, so mufs nach **2.**:

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}$$

sein, und Σ und $\mathfrak{F}$ dasselbe Polarsystem Γ^2 bestimmen. Nun sind die Zentrifugalmomente des Systemes Σ bezüglich je zweier Geraden u und v gleich Null, die von einem der drei Punkte P_1, P_2 und P_3 nach den beiden anderen führen, folglich erweist sich nach **3.** u und v als

Fig. 2.



ein Paar konjugierter Strahlen von Γ^2 und sonach $P_1P_2P_3$ als eines seiner Poldreiecke. Die in seinen Eckpunkten zu konzentrierenden Flächenstücke berechnen sich sehr einfach auf folgendem später von Herrn Reye[1]) angegebenen Wege. Das Poldreieck $P_1P_2P_3$ von Γ^2, in dessen Eckpunkten die noch zu suchenden Flächenstücke $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ konzentriert sind, hat denselben Schwerpunkt S, wie $\mathfrak{F}$. Es mufs somit die Verbindungslinie von S mit einem Eckpunkte des Poldreiecks durch den Schwerpunkt der in den beiden anderen Eckpunkten

1) Reye: Trägheits- und höhere Momente eines Massensystemes in Bezug auf Ebenen. Journ. f. d. reine und angew. Math. **72** (1870), S. 311.

Digitized by Google

konzentrierten Flächenstücke gehen. Demnach besteht, wenn z. B. S_{23} der Schwerpunkt der in P_2 und P_3 konzentrierten Flächenstücke $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ ist, zwischen den drei Flächenstücken $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ die Beziehung:

$$(\beta) \qquad \mathfrak{F}_1 \cdot P_1 S + (\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3) S_{23} S = 0.$$

Nun sind P_1 und S_{23} ein Paar konjugierte Punkte von Γ^2, ihre Abstände von S genügen also, wenn $-a^2$ die dem Strahle $P_1 S_{23}$ in Γ^2 zugehörige Potenz ist, der Gleichung:

$$(\gamma) \qquad S P_1 \cdot S S_{23} = -a^2.$$

Aus (α), (β) und (γ) folgt:

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{a^2}{a^2 + S P_1^2} \cdot \mathfrak{F}.$$

Sowie $\mathfrak{F}_1$, d. h. nach (α) auch $\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3$ bekannt ist, ergeben sich $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ aus der Bedingung:

$$(\delta) \qquad \mathfrak{F}_2 \cdot P_2 S_{23} + \mathfrak{F}_3 \cdot P_3 S_{23} = 0.$$

Das System Σ dieser in den Punkten P_1, P_2 und P_3 konzentriert gedachten Flächenstücke $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ genügt nunmehr auch vollständig, um $\mathfrak{F}$ hinsichtlich seiner Trägheitsmomente zu ersetzen. Nach (δ) und (β) ist S der Schwerpunkt des Systemes Σ und folglich auch der Mittelpunkt des von ihm bestimmten Polarsystemes Γ^2. Das Zentrifugalmoment von Σ für je zwei Verbindungslinien der Punkte P_1, P_2 und P_3 ist gleich Null, das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ also ein Poldreieck dieses Polarsystemes. Die beiden durch $\mathfrak{F}$ und Σ bestimmten Polarsysteme Γ^2 haben hiernach den Mittelpunkt und ein Poldreieck mit einander gemein, und sind somit identisch. Außerdem besteht die Beziehung (α), demnach können nach **2.** $\mathfrak{F}$ und die in den Ecken des Poldreiecks $P_1 P_2 P_3$ von Γ^2 konzentriert gedachten Flächenstücke $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ sich hinsichtlich ihrer Trägheitsmomente vertreten.

Halensee-Berlin, den 15. Januar 1901.

Digitized by Google

Principes de Géométrografie ou art des constructions géométriques;

Par M. E. Lemoine à Paris.[1])

Il est tout à fait extraordinaire qu'une chose aussi simple que la Géométrografie qu'on peut aprendre avec les premiers tracés des éléments, ne soit encore venue à l'idée de persone. Dans la science de la mesure on a donc précisément négligé d'essayer une évaluation des opérations courantes que l'on y exécute, et cependant, en étendant le sens précis du mot mesure tel que le définissent les matématiciens, on y arive très facilement come nous alons le montrer dans les pages suivantes.

Les solutions de la Géométrie canonique n'admètent que des droites et des cercles, les constructions de la Géométrografie canonique n'admétront donc que la règle et le compas. La Géométrografie est spéculative par essence, mais èle serre d'assez près la pratique pour y être d'une grande utilité.

Les ipotèses qui rendent la Géométrografie spéculative sont:

1° Qu'on supose indéfinie la feuille de l'épure.

2° Que le compas et la règle peuvent servir à tracer des cercles et des droites de toutes dimensions.

3° Ele supose qu'un point est déterminé parfaitement quelque petit que soit l'angle sous lequel se coupent les lignes qui le placent.

4° Ele supose l'existence matérièle du point et de la ligne.

J'apèle construction géométrografique d'un problème cèle ou cèles dont le coéficient de simplicité défini plus loin, est le plus petit; èle cesse de l'être si l'on en découvre une encore plus simple, et cèle-ci devient alors la construction géométrografique. Pas plus qu'on ne peut dire en géométrie: tèle démonstration est la plus simple possible,

1) Dans ce Mémoire nous avons conservé l'orthographe de l'auteur, c'est à dire celle de la Société philologique française.

Digitized by Google

on ne peut dire, en géométrografie, tèle construction est la plus simple possible.

Afin de rendre les constructions comparables nous suposerons — sauf convention particulière contraire — qu'on ne se sert que d'un seul compas; qu'il n'y a sur l'épure, à l'origine, que les données; que l'on n'exécute pas l'épure définitive sur les données, excepté si la chose est spécifiée par la question. Ainsi, si l'on demande de diviser une droite donée AB en moyène et extrême raison (sectio aurea), il est clair que les constructions devront se faire sur AB; si l'on demande de construire un triangle conaissant, la base BC, la médiane AL et l'angle au somet BAC, il y aura sur l'épure seulement: une longueur représentant BC, une autre représentant AL et un angle représentant BAC, mais on ne construira le triangle sur aucune de ces donées; on poura au contraire exécuter sur les donées les constructions auxiliaires dont on aurait besoin, ainsi si parmi les donées il y a une longueur AB et qu'on ait, pendant la construction que l'on exécute, à décrire un cercle de rayon $\frac{AB}{2}$, on poura diviser la donée AB en deus parties égales.

La Géométrografie a un quadruple objet:

1. Au moyen des conventions admises, èle done, pour une construction que l'on exécute, un simbole qui est une sorte de mesure de sa simplicité et des chances de son exactitude.
2. Ele conduit aus procédés qui permètent d'éfectuer le plus simplement possible, une construction déduite d'une solution géométrique.
3. Ele étudie et discute une construction dont le principe est indiqué, pour y substituer quelquefois, une construction qui peut diférer totalement de la première indication.
4. Ele permet de comparer entre èles toutes les constructions que l'on conait d'un même problème et de choisir la construction géométrografique.

Notations et conventions.

$A(\rho)$ ou $A(MN)$ désignera, pour abréger le langage, une circonférence du centre A et du rayon ρ ou MN; nous convenons que toute ligne une fois tracée, est et reste tracée en entier; que, sauf avis contraire, 1° quand un cercle est doné son centre est placé, 2° quand il est tracé son centre reste placé.

Faire passer le bord de la règle par un point placé sera l'opération R_1 ou op.: (R_1); donc, spéculativement, faire passer le bord de règle par 2 points placés sera: op.: $(2R_1)$; tracer une ligne en suivant

Digitized by Google

le bord de la règle sera: op.: (R_2); mètre une pointe quelconque du compas en un point placé sera op.: (C_1); donc, spéculativement, prendre entre les branches du compas la longueur comprise entre deus points sera: op.: $(2\,C_1)$; mètre une pointe du compas en un point indéterminé d'une ligne tracée sera op.: (C_2).[1])

Tracer le cercle sera: op.: (C_3).

L'exposition de la base de la Géométrografie est déjà terminée, et rien qu'avec cela on peut ateindre le premier des objets de la Géométrografie, qui est d'évaluer une construction éfectuée. Il reste à étudier les conséquences qu'on en peut tirer, conséquences dont la variété et quelquefois le caractère de délicate recherche sont dificiles à prévoir en partant d'une origine aussi simple.

Toute construction canonique peut donc s'exprimer finalement par le simbole op.: $(l_1 R_1 + l_2 R_2 + m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3)$; l_1, l_2, m_1, m_2, m_3 étant des nombres entiers; $l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3$, sera dit le coéficient de simplicité ou la simplicité; $l_1 + m_1 + m_2$ qui corespond aus opérations de préparation sera dit le coéficient d'exactitude ou l'exactitude; l_2 et m_3 seront, respectivement, le nombre de droites et le nombre de cercles tracés.

Constructions fondamentales des tracés.

Tracer une droite 1° arbitraire op.: (R_2), 2° passant par un point placé op.: $(R_1 + R_2)$, 3° par deus points placés op.: $(2\,R_1 + R_2)$.

Prendre une longueur donée op.: $(2\,C_1)$.

Tracer un cercle 1° arbitraire op.: (C_3), 2° arbitraire mais dont le centre est placé op.: $(C_1 + C_3)$, 3° dont le centre est placé et qui passe par un point placé op.: $(2\,C_1 + C_3)$, 4° de centre arbitraire mais dont le rayon est une longueur donée op.: $(2\,C_1 + C_3)$, 5° dont le rayon est une longueur donée et le centre un point placé op.: $(3\,C_1 + C_3)$.

Porter sur une ligne tracée à partir d'un point indéterminé de cète ligne ou à partir d'un point placé sur cète ligne, la longueur comprise entre les branches du compas op.: $(C_2 + C_3)$ ou op.: $(C_1 + C_3)$.

1) Cète opération est assez rare par raport aus autres, on pourait pratiquement l'assimiler à C_1 puisqu'il faut viser, en some, un point de la ligne pour y poser la pointe du compas; mais come il est, spéculativement, diférent de mètre la pointe du compas en un point placé ou en un point indéterminé d'une ligne, come d'ailleurs cète distinction n'a aucun inconvénient pratique, nous la conserverons à cause du caractère spéculatif des simboles géométrografiques.

Digitized by Google

Problèmes classiques élémentaires.

I. Tracer un angle droit ou tracer deus droites perpendiculaires l'une à l'autre.

(Première construction géométrografique.) — Je trace un cercle (C_3); une droite qui coupe le cercle en A et en B (R_2). Je joins A au centre O du cercle $(2R_1 + R_2)$. OA recoupe le cercle en C. Je trace CB $(2R_1 + R_2)$, l'angle CBA est droit; op.: $(4R_1 + 3R_2 + C_3)$; simplicité: 8; exactitude: 4; 3 droites, 1 cercle.

(Deusième construction géométrografique.) — Je trace deus cercles quelconques $O(\varrho)$, $O'(\varrho)$ se coupant en A et B $(2C_3)$; je trace AB et OO' $(4R_1 + 2R_2)$; op.: $(4R_1 + 2R_2 + 2C_3)$; S.: 8; E.: 4; 2 droites, 2 cercles.

(Troisième construction géométrografique.) — Je trace une droite (R_2); de deus points quelconques de cète droite come centres, je trace des cercles $(2C_2 + 2C_3)$ qui se coupent en A et en B; je trace AB $(2R_1 + R_2)$; op.: $(2R_1 + 2R_2 + 2C_2 + 2C_3)$; S.: 8; E.: 4; 2 droites, 2 cercles.

II. Construire un angle de 60° ou de 120°; de 30° ou de 150°

(Construction géométrografique.) — Je trace un cercle $O(\varrho)$ (C_3); un diamètre quelconque AA' $(R_1 + R_2)$; je trace $A(\varrho)$ $(C_1 + C_3)$ qui coupe $O(\varrho)$ en B; je trace OB $(2R_1 + R_2)$; $BOA = 60°$.

Si c'est l'angle de 30° que je désire, je trace BA' au lieu de BO; op.: $(3R_1 + 2R_2 + C_1 + 2C_3)$; S.: 8; E.: 4; 2 droites, 2 cercles.

III. Tracer un cercle passant par deus points donés A et B.

(Construction géométrografique.) — Je trace $A(\varrho)$, $B(\varrho)$ $(2C_1 + 2C_3)$, qui se coupent en O. Je trace $O(\varrho)$ $(C_1 + C_3)$; op.: $(3C_1 + 3C_3)$. S.: 6; E.: 3; 3 cercles.

IV. Trouver la longueur du rayon d'un cercle dont le centre ne serait pas placé.

(Construction géométrografique.) — P étant un point arbitraire pris sur le cercle, je trace un cercle quelconque $P(\varrho)$ $(C_2 + C_3)$ qui coupe le cercle doné en A et en B; je trace $B(\varrho)$ $(C_1 + C_3)$ qui coupe $P(\varrho)$ en 2 points; je joins l'un quelconque d'eus que j'apèle C à A $(2R_1 + R_2)$, AC coupe le cercle doné en D.

DC est la longueur du rayon; op.: $(2R_1 + R_2 + C_1 + C_2 + 2C_3)$; S.: 7; E.: 4; 1 droite, 2 cercles.

V. Placer le centre d'un cercle lorsque le centre n'est pas placé.

(Première construction géométrografique.) — Ayant opéré come dans le problème précédent, je trace D (DC) $(2C_1 + C_3)$ et

Digitized by Google

$B(DC)$ $(C_1 + C_3)$ qui se coupent au centre cherché; op.: $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + C_2 + 4C_3)$; S.: 12; E.: 7; 1 droite, 4 cercles.

(Deusième construction géométrografique.) — A, B, C étant trois points arbitraires pris sur le cercle, je décris $A(\varrho)$, $B(\varrho)$, $C(\varrho)$ $(3C_1 + 3C_3)$, puis je trace 2 intersections de ces cercles 2 à 2 $(4R_1 + 2R_2)$, èles se rencontrent au centre; op.: $(4R_1 + 2R_2 + 3C_2 + 3C_3)$; S.: 12; E.: 7; 2 droites, 3 cercles.

VI. Tracer le cercle doné par trois de ses points A, B, C.

(Construction géométrografique.) — Je trace $A(\varrho)$, $B(\varrho)$, $C(\varrho)$ $(3C_1 + 3C_3)$; je trace deus intersections de ces cercles deus à deus $(4R_1 + 2R_2)$, èles se coupent au centre O; je trace $O(OA)$ $(2C_1 + C_3)$; op.: $(4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3)$; S.: 15; E.: 9; 2 droites, 3 cercles.

VII. Par un point doné B sur une droite BC, tracer une droite qui fasse avec BC un angle doné LOM.

(Construction géométrografique.) — Je trace $B(\varrho)$, qui place C; puis $O(\varrho)$ $(2C_1 + 2C_3)$ qui place L et M; je prends LM dans le compas $(2C_1)$; je trace $C(LM)$ $(C_1 + C_3)$ qui coupe $B(\varrho)$ en A; je trace AB $(2R_1 + R_2)$; op.: $(2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3)$; S.: 11; E: 7; 1 droite, 3 cercles.

VIII. Etant donés 3 points A, B, C, placer le simétrique A' de A par raport à la droite qui joindrait BC.

(Construction géométrographique.) — Je trace $B(BA)$ $(2C_1 + C_3)$, $C(CA)$ $(2C_1 + C_3)$ qui se coupent en A'; op.: $(4C_1 + 2C_3)$; S.: 6; E.: 4; 2 cercles.

IX. Par un point C pris hors d'une droite AB abaisser une perpendiculaire sur cète droite.

(Construction géométrografique.) — Op.: $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3)$; S.: 9; E.: 5; 1 droite, 3 cercles.

X. Par un point C pris sur une droite AB élever une perpendiculaire à cète droite.

(Construction classique.) — Tracer $C(\varrho)$ qui place A et B; tracer $A(\varrho')$, $B(\varrho')$, puis l'intersection de ces deus cercles; op.: $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3)$; S.: 9; E.: 5; 1 droite, 3 cercles.

(Construction géométrografique.) — Je place une pointe du compas au hasard sur l'épure en O, je mets l'autre pointe en C (C_1), et je trace $O(OC)$ (C_3) qui coupe CA en A; je trace AO $(2R_1 + R_2)$ qui coupe $O(OC)$ en D, je trace DC $(2R_1 + R_2)$; op.: $(4R_1 + 2R_2 + C_1 + C_3)$; S.: 8; E.: 5; 2 droites, 1 cercle.

On recomande dans les éléments de géométrie cète construction seulement pour le cas où C est à l'extrémité de AB, on voit qu'èle est plus simple que la construction classique même pour le cas général.

Digitized by Google

XI. Prendre le milieu O d'une droite AB.

(Construction géométrografique.)—Op.:$(2R_1+R_2+2C_1+2C_3)$; S.: 7; E.: 4; 1 droite, 2 cercles.

XII. Par un point A mener la paralèle à la droite BC.

Suivant les pays, on indique en général une des deus constructions suivantes dans les livres classiques, la première est toujours donée en France.

(Première construction.) — On trace $A(\varrho)$ qui coupe BC en B, $B(\varrho)$ qui coupe BC en C; on prend l'arc CA $(2C_1)$ et on le reporte, dans le sens convenable, sur $A(\varrho)$ à partir de B, il place D sur $A(\varrho)$; on trace AD; op.: $(2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3)$; S. 11; E.: 7; 1 droite, 3 cercles.

(Seconde construction.) — Je trace par A une droite quelconque qui place C; je fais avec AC un angle alterne interne égal à ACB (Construction VII); op.: $(3R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 3C_3)$; S.: 13; E.: 8; 2 droites, 3 cercles.

Les deus constructions géométrografiques suivantes ne sont jamais signalées dans les livres classiques pour éfectuer le tracé.

(Première construction géométrografique.) — Je trace $A(\varrho)$ qui place B, puis $B(\varrho)$ qui place C $(2C_1 + 2C_3)$; je trace $C(\varrho)$ qui coupe $A(\varrho)$ en D $(C_1 + C_3)$, je trace AD $(2R_1 + R_2)$ op.: $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3)$; S.: 9; E.: 5; 1 droite, 3 cercles.

(Seconde construction géométrografique.) — Je trace un cercle $O(OA)$ $(C_1 + C_3)$ qui place B et C; je prends AB dans le compas $(2C_1)$, je trace $C(AB)$ $(C_1 + C_3)$ qui place D sur $O(OA)$ du même coté de BC que A; je trace AD $(2R_1 + R_2)$; op.: $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$; S.: 9; E.: 6; 1 droite, 2 cercles.

(Construction géométrografique dans le cas où les points B et C sont placés, mais la droite BC point tracée.) — Je prends BC $(2C_1)$; je trace $A(BC)$ $(C_1 + C_3)$; pendant que la pointe est en A, je prends AB (C_1); je trace $C(AB)$ $(C_1 + C_3)$ qui place D sur $A(BC)$ du côté oposé de AC que A; je trace AD $(2R_1 + R_2)$; op.: $(2R_1 + R_2 + 5C_1 + 2C_3)$; S.: 10; E.: 7; 1 droite, 2 cercles.

XIII. Diviser 1° un angle AOB, 2° l'arc AB du cercle AOB en deus parties égales.

(Construction géométrografique.) — 1° pour l'angle: op.: $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3)$; S.: 9; E.: 5; 1 droite, 3 cercles; 2° pour l'arc AB: op.: $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$; S.: 7; E.: 4; 1 droite, 2 cercles.

S'il s'agit d'un angle dont le somet est hors de l'épure, voir construction XXIII.

Digitized by Google

XIV. Décrire sur une droite donée AB, un segment capable d'un angle doné $\varepsilon\gamma\alpha$.

(Construction classique.) — Faire avec AB en B un angle ABD égal à $\varepsilon\gamma\alpha$, mener la perpendiculaire au milieu de AB et la perpendiculaire en B à AD, èles se coupent en O; tracer $O(OA)$. On trouverait op.: $(6R_1 + 3R_2 + 11C_1 + 8C_3)$; S.: 28; E.: 17; 3 droites, 8 cercles; en la conduisant avec l'économie géométrografique on pourait la réduire de $(C_1 + C_3)$, mais voici 2 constructions géométrografiques.

(Solution.) Si dans le triangle isocèle $\varepsilon\alpha\gamma$ où $\alpha\gamma = \alpha\varepsilon = AB$ $\varepsilon\gamma\alpha$ étant l'angle à la base, on apèle ω le centre du cercle circonscrit et λ le milieu de $\gamma\alpha$ et que E soit le milieu de AB et O le centre du cercle auquel apartient le segment capable cherché, les triangles rectangles OEB, $\omega\lambda\alpha$ sont égaus come ayant les angles $OBE = \omega\alpha\lambda$ et $EB = \alpha\lambda$; $\omega\alpha$ sera donc le rayon du cercle sur lequel est le segment capable.

(Première construction géométrografique.) — Je trace $\gamma(AB)$ $(3C_1 + C_3)$ qui place α; $\alpha(AB)$ $(C_1 + C_3)$ qui place ε; $\varepsilon(AB)$ $(C_1 + C_3)$, puis les intersections des cercles $\varepsilon(AB)$, $\gamma(AB)$; $\gamma(AB)$, $\alpha(AB)$ $(4R_1 + 2R_3)$ qui placent ω. Pour placer O, je trace $A(\omega\alpha)$, $B(\omega\alpha)$ $(4C_1 + 2C_3)$ et enfin je trace $O(\omega\alpha)$ $(C_1 + C_3)$; op.: $(4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 6C_3)$; S.: 22; E.: 14; 2 droites, 6 cercles.

(Deusième construction géométrografique.) — Je trace les cercles $A(AB)$, $B(AB)$ $(3C_1 + 2C_3)$, puis $\gamma(AB)$ $(C_1 + C_3)$ qui place ε sur $\gamma\varepsilon$ et α sur $\gamma\alpha$, je trace le cercle $B(\varepsilon\alpha)$ $(3C_1 + C_3)$ qui coupe $A(AB)$ en D du coté de AB où je veus que soit le segment capable; je trace $D(\varepsilon\alpha)$ $(C_1 + C_3)$ qui recoupe $A(AB)$ en D'.

Je trace le perpendiculaire au milieu de AB par l'intersection des cercles $A(AB)$, $B(AB)$ $(2R_1 + R_2)$ et BD' $(2R_1 + R_2)$ qui coupe cète perpendiculaire en I; enfin $I(IA)$ $(2C_1 + C_3)$ qui done le segment cherché; op.: $(4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 6C_3)$; S.: 22; E.: 14; 2 droites, 6 cercles, construction diférente de la précédente, mais amenant à un simbole identique.

XV. Mener par un point A pris sur un cercle de centre O la tangente à ce cercle.

(Construction classique.) — Joindre AO et mener en A la perpendiculaire sur AO; le simbole, en employant la construction géométrografique (Construction X), pour mener en A la perpendiculaire sur OA est: op.: $(6R_1 + 3R_2 + C_1 + C_3)$; S.: 11; E.: 7; 3 droites, 1 cercle.

(Construction géométrografique.) — B étant un point quel-

Digitized by Google

conque du cercle doné, je trace $B(BA)$ $(2C_1+C_3)$ qui le recoupe en A'; je trace $A(AA')$ $(2C_1+C_3)$ qui coupe $B(BA)$ en C; je trace la tangente cherchée CA $(2R_1+R_2)$ op.: $(2R_1+R_2+4C_1+2C_3)$; S.: 9; E.: 6; 1 droite, 2 cercles.

Remarquons que le tracé de C résout le problème de la géométrie du compas seul, qui demande de tracer une infinité de points C de la tangente en A à un cercle (tels cependant que $AC<2R$).

XVI. D'un point A extérieur à une circonférence donée, du centre O, mener une tangente à cète circonférence.

(Construction classique.) — Tracer OA, décrire la circonférence qui a OA pour diamètre et coupe la circonférence donée en B et B'; tracer AB, AB'; op.: $(8R_1+4R_2+4C_1+3C_3)$; S.: 19; E.: 12; 4 droites, 3 cercles.

(1ère Construction géométrografique.) — Je trace un diamètre quelconque $MM'(R_1+R_2)$; je trace $M(OA)$, $M'(OA)$ $(4C_1+2C_3)$ qui se coupent en ω; je trace $A(\omega O)$ $(3C_1+C_3)$ qui coupe la circonférence donée en B et B'; je trace les tangentes cherchées AB, AB' $(4R_1+2R_2)$; op.: $(5R_1+3R_2+7C_1+3C_3)$; S.: 18; E.: 12; 3 droites, 3 cercles.

(Deusième construction géométrografique.) — Je trace par A une droite quelconque coupant le cercle en C et C' (R_1+R_2), les 3 points se suivant dans cet ordre A, C, C'; je trace $C'(C'A)$ $(2C_1+C_3)$, $C(C'A)$ (C_1+C_3) qui coupe AC en D de l'autre côté de A que C; je trace $D(C'A)$ (C_1+C_3) qui coupe $C'(C'A)$ en E. EA est la longueur de la tangente menée de A au cercle, car les deus triangles isocèles ECA, $C'EA$ sont semblables et donent $\frac{CA}{EA}=\frac{EA}{C'A}$ d'où $EA^2=AC\cdot AC'$. Je trace donc $A(AE)$ $(2C_1+C_3)$ qui coupe le cercle doné en B et B', je trace AB, AB' $(4R_1+2R_2)$; op.: $(5R_1+3R_2+6C_1+4C_3)$; S.: 18; E.: 11; 3 droites, 4 cercles.

XVII. Tracer les 4 tangentes comunes à deus cercles de centres O et O' et de rayons R et R' $(R>R')$. Nous prendrons le cas oùles cercles sont extérieurs, laissant la discussion à faire au lecteur.

(Première construction classique.) — On trace $O'(R+R')$ et $O(R-R')$, puis on mène les tangentes de O au cercle $O'(R+R')$ et de O' au cercle $(R-R')$ etc.

En éfectuant la construction tèle qu'èle est indiquée dans tous les traités de Géométrie et sans recherche sistématique de simplifications au tracé, on arive à tracer les 4 tangentes par op.: $(28R_1+14R_2+31C_1+19C_3)$; S.: 92; E.: 59; 14 droites, 19 cercles. Sans aucun principe de Géométrografie, il y a des simplifications évidentes et

Digitized by Google

on n'ariverait pas, le plus souvent, à un simbole aussi élevé, mais exécutée devant moi par d'habiles géomètres non prévenus, èle n'a jamais été faite avec moins de 78 opérations élémentaires, soit avec une simplicité moindre que 78; traitée économiquement suivant les principes géométrografiques, sans rien changer à la solution géométrique, on arive à op.: $(24\,R_1 + 12\,R_2 + 11\,C_1 + 8\,C_3)$; S.: 55; E.: 35; 12 droites, 8 cercles.

(Deusième construction classique.) — Ele s'apuie sur la téorie des centres de similitude et, traitée avec l'économie géométrografique, èle a pour simbole op.: $(18\,R_1 + 9\,R_2 + 12\,C_1 + 8\,C_3)$; S.: 47; E.: 30; 9 droites, 8 cercles.

Avant d'exposer une construction géométrografique du problème, je crois intéressant de doner quelques explications générales dont il sera le prétexte. J'ai dit plus haut que, malgré la simplicité absolue de la métode, la recherche du simbole géométrografique était parfois assez délicate; les lecteurs qui voudront s'exercer sur les exemples qui termineront ce travail, pouront juger si mon afirmation est exacte, mais quelques mots d'historique sur l'établissement du simbole géométrografique de la construction du problème séculaire que nous traitons, montreront au moins que plusieurs fort adroits géomètres y ont coopéré et qu'il n'est arivé que peu à peu à sa forme actuèle.

Mes premiers mémoires ou notes sur le sujet datent de 1888 et se trouvent dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, dans le j[al] Mathesis et dans le Compte Rendu du Congrès d'Oran (1888) de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences. Dans ce dernier travail la Géométrografie, à laquèle aucun nom spécial n'est encore doné, est traitée come une aplication de considérations générales sur la simplicité dans les Sciences matématiques. Je crois le sujet fort intéressant et même d'une grande importance, mais il est si vaste que je me suis borné à poursuivre l'étude du modeste rameau qui forme la Géométrografie. Dès l'origine plusieurs habiles géomètres s'y sont intéressés; entre autres M. Bernès, ancien inspecteur général de l'Université, auteur de beaus mémoires sur la Géométrie du triangle, et M. G. Tarry, l'ingénieus savant dont le plus récent travail que je conaisse est la démonstration de l'impossibilité du fameus problème des 36 officiers qui, depuis Euler, avait résisté à tous les éforts des géomètres. A ce moment une corespondance presque journalière avait lieu entre eus et moi pour essayer d'établir les simboles définitifs, en fait, des principales constructions classiques de la géométrie élémentaire; c'est à leur concours que je dois d'avoir pu mètre la Géométrografie sous la forme didactique où je la présente maintenant. En 1892 je

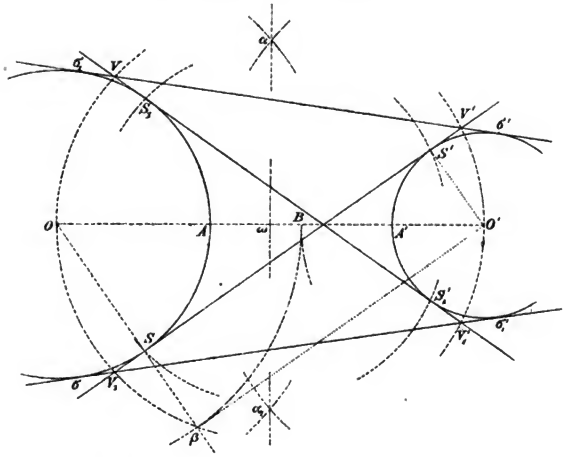
Digitized by Google

publiai au Congrès de Pau de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences un premier exposé d'ensemble de la Géométrografie canonique; les 2 constructions des tangentes comunes à 2 circonférences traitées d'après les solutions classiques y étaient amenées à peu près aus simboles que je viens de doner, à un lapsus près rectifié l'année suivante au Congrès de Besançon (1893). Désespérant de pouvoir réduire encore les simboles des constructions déduites des 2 solutions classiques, M. Tarry chercha d'autres solutions et il m'en comuniqua une que j'intercalai dans mon mémoire déjà cité du Congrès de Besançon; èle est radicalement diférente des solutions classiques, très simple, fort ingénieuse, mais, géométrografiquement, le coéficient de simplicité n'avait pu être abaissé au dessous de 47 qui est celui où amène la solution par les centres de similitude. Spéculativement équivalente à cèle-ci, la construction de M. Tarry est pratiquement bien supérieure et pour la comodité du tracé et parce qu'èle reste toujours dans la limite de l'épure. Cète question particulière ne fit plus de progrès jusqu'en 1898 où amené à remarquer quelques propriétés de la figure formée par 2 cercles et leurs quatre tangentes comunes — figure qui, pour le dire en passant, a de nombreuses propriétés et ne me semble pas avoir été étudiée sufisament — je cherchai un peu au hasard à les apliquer à la construction des tangentes comunes. J'arivai à une solution tout à fait diférente des solutions anciènes; èle se construit avec le coéficient de simplicité: 44. C'est èle que j'indique come construction géométrografique dans la note didactique sur la Géométrografie que m'avait demandée M. E. Rouché pour l'ajouter à la 7ième édition de son grand Traité de Géométrie (Rouché et feu de Comberousse) parue au comencement de 1900. Depuis cète époque, M. Tarry en utilisant plus adroitement que moi mes remarques, a réduit le coéficient de simplicité successivement à 42, 40, 39 et enfin à 36. C'est sa construction que je done come construction géométrografique dans l'étude sur la Géométrografie que publient MM. Naud et Carré dans un volume de la collection "Scientia". Enfin tout dernièrement ayant signalé à M. le Colonel Moreau les propriétés de la figure des quatre tangentes, il m'a envoyé une autre construction de coéficient de simplicité 36 come cèle de M. Tarry; c'est cèle que je vais exposer.

(Solution.) — Soient (Fig. 1) S, S' les points de contact sur O et sur O' d'une tangente intérieure, S étant en dessous de OO'; S_1, S_1' les points de contact de l'autre tangente intérieure, S_1 étant le point de contact sur la circonférence O. Si je supose décrit le cercle $O(R+R')$ et que de O' je trace la tangente $O'\beta$ à ce cercle, la figure $O'S'S\beta$

Digitized by Google

sera un rectangle, $S\beta$ passera en O et β sera sur le cercle décrit sur OO' come diamètre. Soit ω le milieu de OO'; soient σ_1, σ' les points de contact avec O et O' de la tangente extérieure située au-dessus de OO'; σ, σ_1' les points de contact analogues de l'autre tangente extérieure, V, V'' les intersections de $\sigma_1\sigma'$ avec S_1S_1' et SS', V_1, V_1' les intersections de $\sigma\sigma_1'$ avec SS' et S_1S_1'; il est facile de voir que, parmi les propriétés de la figure formée par les quatre tangentes comunes, S, S_1, S', S_1' sont sur un cercle qui a pour centre le milieu ω de OO' et



que V, V', V_1, V_1' sont sur le cercle décrit sur OO' come diamètre dont le centre est également ω. Cela posé, si je détermine β, on aura le point S en traçant $O\beta$, les points S_1, S', S_1' en traçant $\omega\,(\omega S)$ et les 2 tangentes intérieures en traçant S_1S_1', SS'; en traçant le cercle décrit sur OO' come diamètre, on aura sur ces tangentes les points V, V_1', V_1, V' et il sufira de tracer VV', V_1V_1' pour compléter la construction.

(Construction géométrografique.) — Je trace OO' qui coupe le cercle O en A et le cercle O' en A', A et A' étant entre O et O' $(2R_1 + R_2)$. Je prends sur OO' en traçant $O'\,(AA')$, $O'B = AA'$

Digitized by Google

$(3C_1+C_3)$ de sorte que $OB=OA+AB=R+R'$. Le compas étant en O', je trace $O'(\varrho)$ (C_3) ϱ étant quelconque, puis $O(\varrho)$ (C_1+C_3); $O'(\varrho)$, $O(\varrho)$ se coupent en α, α_1; le compas étant en O je trace $O(OB)$ (C_1+C_3); je trace $\alpha\alpha_1$ $(2R_1+R_2)$ qui place ω; je trace ω (ωO) $(2C_1+C_3)$ qui coupe $O(OB)$ en β; je trace $O\beta$ $(2R_1+R_2)$ qui place S; je trace $\omega(\omega S)$ qui place S_1, S', S_1' $(2C_1+C_3)$; je trace SS', S_1S_1' $(4R_1+2R_2)$, ces droites placent V, V_1, V', V_1' sur $\omega(\omega O)$; je trace enfin VV', V_1V_1' $(4R_1+2R_2)$; op.: $(14R_1+7R_2+9C_1+6C_3)$; S.: 36; E.: 23; 7 droites, 6 cercles.

Il faut remarquer que, des deus solutions classiques de ce problème, cèle qui était regardée come la plus compliquée, et l'était en éfet dans le tracé alors indiqué, c'était la solution obtenue en menant de O' et de O des tangentes aus cercles $O(R+R')$, $O'(R-R')$; l'étude géométrografique montre que ce tracé peut être ramené à être le plus simple: car dans la solution que nous venons de développer c'est le tracé de la tangente $O'\beta$ au cercle $O(R+R')$ qui a résolu le problème. Au lieu de se servir du point β situé sur le cercle $O(R+R')$ on aurait pu se servir d'un point situé sur le cercle $O'(R-R')$ et avoir une construction analogue et de simbole identique.[1])

XVIII. Construire la 4ième proportionèle X à trois lignes donées M, N, P; $X=\frac{N\cdot P}{M}$ (Construction classique). — Tracer 2 droites ox, oy; prendre sur ox: $oN=N$, $oM=M$, sur oy: $oP=P$, joindre PM et tracer par N une paralèle à PM qui coupe oy en X; oX est la 4ième proportionèle cherchée; on arive à un coéficient de simplicité 28. Si l'on construit avec l'économie géométrografique, on ariverait à 25 en ne traçant pas PM et prenant la construction donée dans XII pour le cas où il faut mener par un point une paralèle à une droite dont 2 points seuls sont placés.

(Construction géométrografique.) — Lemme. Soient $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ deus cordes paralèles d'un cercle; soit P' un point de ce cercle, soit I le point ou $P'A$ coupe CD on a, quel que soit P': $P'B\cdot AI = AC\cdot CB$. Cela résulte de la similitude des deus triangles CAI, $P'BC$. AI est donc la 4ième proportionèle entre $P'B$, CA et CB.

D'un rayon quelconque plus grand que la moitié de la plus grande

1) Quand on examine un dessin tracé géométrografiquement, tel que celui de la Fig. (1), il parait en général plus compliqué que le dessin classique que l'on conait, mais c'est une pure illusion qui tient à ce que, dans le tracé géométrografique, toutes les lignes auxiliaires sont tracées, tandis que dans le dessin du géomètre il n'y a que les lignes nécessaires à l'exposé de la solution et peu ou point des autres.

Digitized by Google

des 3 lignes données, je trace une circonférence sur laquèle je marque les points C et A tels que $CA = N\,(2\,C_1 + C_2 + C_3)$; je trace $C(P)$ $(3\,C_1 + C_3)$ qui coupe la circonférence en B dans le sens CA, puis $A(P)\,(C_1 + C_3)$ qui coupe la circonférence en D, toujours dans le sens CA, puis $B(M)\,(3\,C_1 + C_3)$ qui coupe la circonférence en P' toujours dans le même sens. Je trace CD, $AP'\,(4\,R_1 + 2\,R_2)$ qui se coupent en I. AI est la longueur cherchée. op.: $(4\,R_1 + 2\,R_2 + 10\,C_1 + 5\,C_3)$; S.: 21; E.: 14; 2 droites, 5 cercles.

Remarque: Pour qu'une construction puisse être dite la construction géométrografique d'une question générale, il faut qu'èle s'aplique quèles que soient les valeurs particulières des données, c'est-à-dire qu'èle soit générale. Ainsi voici une construction beaucoup plus simple de la 4ième proportionèle à M, N, P, mais èle n'est pas construction géométrografique du problème, car èle exige que l'on ait 2 M plus grand que la plus grande des 2 lignes N et P.

(Construction particulière.) — O étant un point quelconque je trace $O\,(M)\,(2\,C_1 + C_3)$; d'un point C quelconque de $O\,(M)$ come centre, je trace $C\,(N)\,(2\,C_1 + C_2 + C_3)$ qui coupe $O(M)$ en A, puis $A\,(P)\,(3\,C_1 + C_3)$ qui coupe $O(M)$ en B; C, A, B se suivant dans cet ordre sur $O\,(M)$. Je trace $B(P)\,(C_1 + C_3)$ qui coupe $C(N)$ en A'; AA', qu'il n'y a pas besoin de tracer, est la quatrième proportionèle cherchée; op.: $(8\,C_1 + C_2 + 4\,C_3)$; S.: 13; E.: 9; 4 cercles.

Mais on ne peut employer cète construction dans la recherche du simbole géométrografique d'une question donée, que si l'on a démontré que, pour cète question, son emploi est toujours légitime, c'est-à-dire si $M > \frac{N}{2}$ et $M > \frac{P}{2}$.

XIX. Trouver la troisième proportionèle X à 2 lignes données N et M; $X = \frac{N^2}{M}$.

(Construction classique.) — On arive au coéficient de simplicité 21; ou 20 si l'on conduit géométrografiquement le tracé.

(Construction géométrografique.) — Se déduit de cèle de XVIII où l'on fait $N = P$; op.: $(4\,R_1 + 2\,R_2 + 5\,C_1 + C_2 + 3\,C_3)$; S.: 15; E.: 10; 2 droites, 3 cercles.

(Construction particulière.) — Si $2\,M > N$ en apliquant le même procédé que pour la construction particulière de XVIII, on a op.: $(6\,C_1 + C_2 + 4\,C_3)$; S.: 11; E.: 7; 4 cercles.

XX. Construire la moyenne proportionèle X entre deus droites données A et B; $X^2 = A \cdot B$. Soit $A > B$.

Il y a trois constructions classiques généralement employées.

Digitized by Google

(Première construction classique.) — On prend sur une droite et à partir du même point C, les deus longueurs CD et $C\overline{E}$ respectivement égales à A et à B; sur CD come diamètre on décrit une circonférence, et on élève en E une perpendiculaire à CD qui coupe la circonférence en F. On trace FC. Cète construction, économiquement exécutée, et par conséquent sans le tracé final inutile de FC, a pour simbole op.: $(4R_1 + 3R_2 + 9C_1 + C_2 + 5C_3)$; S.: 22; E.: 14; 3 droites, 5 cercles.

(Deusième construction classique.) — On prend à la suite l'une de l'autre sur une droite deus longueurs CD, DE respectivement égales à A et à B; sur CE come diamètre on décrit une circonférence et par D on élève une perpendiculaire à CE qui coupe la circonférence en F. DF est la longueur cherchée. On arive au simbole $(4R_1 + 3R_2 + 12C_1 + C_2 + 8C_3)$; S.: 28; E.: 17; 3 droites, 8 cercles et avec les précautions géométrografiques on le réduit à op.: $(4R_1 + 3R_2 + 10C_1 + C_2 + 6C_3)$; S.: 24; E.: 15; 3 droites, 6 cercles.

(Troisième construction classique.) — On prend sur une droite $\overline{CD}$ et CE égales à A et à B; on décrit une circonférence sur ED come diamètre; puis on trace la tangente CG menée par C à cète circonférence. Si G est le point de contact CG est la longueur cherchée. On ariverait au simbole $(6R_1 + 4R_2 + 12C_1 + C_2 + 7C_3)$; S.: 30; E.: 19; 4 droites, 7 cercles. Conduite géométrografiquement come il suit, on diminue ce simbole. Tracer une droite quelconque et prendre sur èle $CD = A$, $CE = B$ $(R_2 + 5C_1 + C_2 + 2C_3)$, tracer sur DE come diamètre une circonférence $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3)$ dont le centre est O; la perpendiculaire à DE qui passe en O et a été tracée pour placer O, coupe la circonférence $O(OD)$ en α, α', je trace $\alpha(CO)$ $(3C_1 + C_3)$ qui coupe CO en β. $O\beta$ qui (voir Construction XVI, 1ère Construction géométrografique) serait la longueur de la tangente menée de C à $O(OD)$ est donc la moyène proportionèle cherchée op.: $(2R_1 + 2R_2 + 12C_1 + C_2 + 6C_3)$; S.: 23; E.: 15; 2 droites, 6 cercles.

La construction dérivant de la 3ième solution de ce problème était regardée come plus compliquée que les deus autres, on voit qu'il n'en est rien, èle est même plus simple que l'une d'èles; mais on n'avait avant la Géométrografie aucune métode pour conduire les constructions et aucun critère pour juger des simplicités, et les juger sans conteste. La construction géométrografique suivante est un exemple de la nécessité absolue d'un critère, car èle a sur toutes les autres un avantage énorme. Ele n'était pas ignorée puisqu'on la trouve (Wallis: A treatise of algebra both historical and practical, London 1685) dans une lètre de Thomas Struve datée de 1684, qu'èle est même

Digitized by Google

dans quelques ouvrages come Les Leçons de Statique grafique de M. Favaro (Trad. Terrier 2ième partie p. 68, 1885) etc. et cependant on ne l'a pas, finalement, remarquée entre toutes et èle n'est pas classique.

(Construction géométrografique.) — Soit $A > B$. Je trace une droite quelconque (R_2) et, O étant un point de cète droite, je trace $O(A)(2C_1 + C_2 + C_3)$ qui coupe la droite en C et en C', le point C, étant placé à gauche de O; je trace $C(B)(3C_1 + C_3)$ qui place E dans le sens CC' sur CC'; je trace $E(B)(C_1 + C_3)$ et en traçant l'intersection des 2 cercles $C(B)$, $E(B)(2R_1 + R_2)$ j'ai la perpendiculaire au milieu L de CE, èle coupe $O(A)$ en F; FC ou FE, qu'il n'y a pas besoin de tracer, est la longueur de la moyène proportionèle cherchée; op.: $(2R_1 + 2R_2 + 6C_1 + C_2 + 3C_3)$; S.: 14; E.: 9; 2 droites, 3 cercles.

On le démontre en remarquant que dans le triangle rectangle CFC' on aurait $CF^2 = CL \cdot CC' = \frac{B}{2} \cdot 2A = A \cdot B$.

XXI. Diviser une droite AB en moyène et extrême raison. (Sectio aurea.)

(Construction classique.) — On élève en B une perpendiculaire sur laquèle on prend $BC = \frac{AB}{2}$; on trace AC, puis le cercle $C(CB)$ qui coupe AC en D et en D'; soit $AD < AD'$, on trace $A(AD)$ qui coupe AB en M entre A et B et $A(AD')$ qui coupe AB en M' dans le sens BA. M et M' sont les points cherchés.

En construisant come on le fait ordinairement sans recherche de simplicité sistématique, on a le simbole op.: $(8R_1 + 3R_2 + 11C_1 + 9C_3)$; S.: 29; E.: 17; 3 droites, 9 cercles, qu'on peut réduire géométrografiquement come il suit: on ne se sert de la perpendiculaire élevée en B à AB que pour obtenir le point C, donc, si on peut obtenir le point C directement en utilisant des tracés nécessaires au reste de la construction avec une addition d'opérations élémentaires et que le tout fasse une économie, nous diminuerons le simbole total; on peut y ariver. Je trace la perpendiculaire au milieu O de AB $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$, je trace $B(BO)$, $O(BO)(3C_1 + 2C_3)$, cète dernière circonférence coupe en E la perpendiculaire élevée au milieu de AB; je trace $E(BO)(C_1 + C_3)$ qui coupe $B(BO)$ en C. Je continue come précédemment en traçant $AC(2R_1 + R_2)$, puis $C(BO)(C_1 + C_3)$ qui place D et D', puis $A(AD)$, $A(AD')(3C_1 + 2C_3)$ qui placent M et M'; op.: $(4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 8C_3)$; S.: 24; E.: 14; 2 droites, 8 cercles.

Il y a un très grand nombre de constructions plus simples que la construction classique et en particulier plusieurs constructions géométrografiques; je vais seulement indiquer une de cèles-ci.

Digitized by Google

(Construction géométrografique.) — Je trace $A(AB)(2C_1+C_3)$ qui coupe AB en B'; je trace $B'(AB)(C_1+C_3)$ qui coupe $A(AB)$ en F et en F'; je trace $FF'(2R_1+R_2)$ qui coupe AB en G; je trace $G(AB)(C_1+C_3)$ qui coupe FF' en H; pendant que j'ai la pointe en G, je prends GB dans le compas (C_1), puis je trace $B(BG)(C_1+C_3)$ qui coupe AB en M et en M'; op.: $(2R_1+R_2+6C_1+4C_3)$; S.: 13; E.: 8; 1 droite, 4 cercles; de 29 à 13 voilà la simplification obtenue.

Ce qui précède est sufisant pour permètre d'apliquer la Géométrografie; il est surprenant qu'èle ait pu réduire presque toutes les constructions fondamentales donées depuis les Grecs et avec lesquèles tant de générations de Géomètres ont fait leurs études et ont travaillé; par cela même beaucoup n'ont été simplifiées que d'une, deus, trois opérations élémentaires; mais si ce que nous avons dit, sufit pour compter et disposer moins maladroitement les tracés, il faut quelques exercices pour se rendre habile. On s'apercevra vite que, si la réduction par exemple de 2, 3, 4 unités (suivant la construction classique usitée dans le pays où le lecteur a fait son éducation géométrique) que nous avons opérée sur le tracé de mener par un point doné une paralèle à une droite et des réductions sur d'autres constructions simples, ont une certaine importance par la répétition de ces économies dans un tracé, la recherche sistématique des simplifications, laquèle est un art comparable à celui de résoudre les problèmes de géométrie élémentaire, en a une bien plus grande encore. La réduction finale opérée par l'emploi de la métode dépasse quelquefois ce que l'on aurait pu admètre à priori; nous avons déjà vu que le tracé géométrografique de la moyenne proportionèle entre deus longueurs réduit de 28 à 14 le coéficient de simplicité, celui de la division en moyène et extrême raison de 29 à 13, celui des 4 tangentes comunes à 2 circonférences de 92 à 36 etc., mais il y a des exemples où la réduction ateint une proportion beaucoup plus considérable. Je tiens à en citer un qui est caractéristique. En 1893 j'eus l'idée de me rendre compte expérimentalement du quantum possible de la réduction, en faisant faire pour moi, par un géomètre ne conaissant rien de l'idée géométrografique, le plan, assez détaillé pour que je puisse la mesurer exactement, d'une construction un peu compliquée que moi j'aurais étudiée géométrografiquement, et de faire ensuite la comparaison des deus simboles obtenus. L'expérience n'était pas très comode à réaliser impartialement, parceque si je demandais cela à un géomètre de mes relations parmi ceus — qui n'étaient pas, alors surtout, dificiles à trouver — n'ayant jamais examiné la Géométrografie, il était certain qu'ils la conaissaient de nom et que la nature de la demande venant

Digitized by Google

de moi leur aurait fait indiquer même involontairement des constructions qu'ils auraient sistématiquement simplifiées autant que possible et c'est un comencement de Géométrografie! Je n'aurais donc pas fait là une expérience concluante. Je demandais alors à M. Jung, le savant professeur à l'Ecole des ingénieurs de Milan avec lequel j'avais l'honeur d'être en relations, s'il voulait bien se prêter à mon expérience en demandant à un jeune géomètre de ses bons élèves de faire, en une page, l'esquisse écrite d'un tracé que j'indiquerai et que M. Jung m'enverrait. Il eut la complaisance d'y consentir. Voici la construction que je donai: On a sur l'épure un triangle ABC, il faut y placer le point Φ dont les coordonées normales sont

$$\frac{b^2a^2+c^2a^2-b^2c^2}{a},\ \frac{c^2b^2+a^2b^2-c^2a^2}{b},\ \frac{a^2c^2+b^2c^2-a^2b^2}{c}.$$

Ce point Φ a de nombreuses propriétés; avec leur aide il se place assez simplement, mais le géomètre ne les conaissait pas et il était convenu d'ailleurs, que le tracé devait être fait sans le secours d'aucune propriété *particulière* à rechercher du point Φ. Le tracé qui me fut indiqué come réponse avait pour simbole op.: $81\,R_1+46\,R_2+211\,C_1+121\,C_3$); Simplicité: 459; Exactitude: 292; 46 droites, 121 cercles.

Le tracé géométrografique que je fis de la même question, sans me servir non plus des propriétés du point Φ, avait pour simbole op.: $(14\,R_1+7\,C_2+48\,C_1+22\,C_3)$; S.: 91; E.: 62; 7 droites, 22 cercles. Mais M. E. Bernès, dont j'ai déjà parlé, trouva un autre arangement de la construction et ariva à un simbole de simplicité 64! De 459 à 64! c'était plus de 7 fois plus compliqué que le tracé conduit géométrografiquement. La construction qu'on m'avait envoyée, était fort logique; au point de vue Géométrique il n'y avait rien à dire et moi-même j'aurais pu en doner une analogue il y a quelques années, mais au point de vue géométrografique, qui n'existait pas pour l'auteur du tracé, il est clair qu'il avait eu la main malheureuse; je n'ai pas renouvelé l'expérience mais il doit y avoir rarement de tèles diférences.

(A suivre.)

Digitized by Google

Ein Satz über geodätische Linien.

Von V. Kommerell in Reutlingen.

Bezieht man die Gleichung einer Fläche auf ein Koordinatensystem, dessen xy-Ebene die Tangentialebene eines Flächenpunktes ist, und dessen x- und y-Achse in die Hauptkrümmungsrichtungen fallen, so läfst sich bekanntlich die Fläche in der nächsten Umgebung dieses Punktes verwechseln mit einem Paraboloid, dem sogenannten „Schmiegungsparaboloid", dessen Gleichung in Cylinderkoordinaten (ξ, ϱ, φ) lautet

$$2\xi = \varrho^2 \left(\frac{\cos^2\varphi}{r_1} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2}\right), \tag{1}$$

wo r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche sind, während ξ und ϱ unendlich kleine Werte der Koordinaten bezeichnen. Stellt man nun für eine Normale im Punkte ϱ, φ den Neigungswinkel $d\omega$ gegen die ξ-Achse, d. h. gegen die Flächennormale, und ihre kürzeste Entfernung dl von derselben auf, so findet man:

$$dl = \frac{\varrho \sin\varphi \cos\varphi \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}{\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{r_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2^2}}}, \tag{2}$$

$$d\omega = \varrho \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{r_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2^2}}. \tag{3}$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen ergiebt sich:

$$dl\, d\omega = \varrho^2 \sin\varphi \cos\varphi \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \tag{4}$$

Für ϱ kann auch das Linienelement ds der Fläche gesetzt werden, da die hierbei vernachlässigte Gröfse unendlich klein von der zweiten Ordnung ist. Ferner lassen sich vermöge der Eulerschen Gleichung:

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\varphi}{r_1} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2}$$

$\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ in Funktion von r (= Krümmungsradius des durch φ bestimmten Normalschnitts) ausdrücken, und zwar ist:

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}}, \qquad \sin\varphi = \sqrt{\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}}.$$

Digitized by Google

Gleichung (4) geht hierdurch über in:

$$\frac{dl}{ds}\frac{d\omega}{ds} = \sqrt{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r}\right)}. \tag{5}$$

Bildet man für eine Fläche $f(x, y, z) = 0$ in einem beliebigen Punkt den Ausdruck für die kürzeste Entfernung und den Winkel zweier unendlich benachbarten Normalen, so erhält man:

$$dl = \frac{\begin{vmatrix} a & da & dx \\ b & db & dy \\ c & dc & dz \end{vmatrix}}{\sqrt{da^2+db^2+dc^2}}, \tag{6}$$

wo a, b, c die Cosinus der Neigungswinkel der Flächennormalen sind. Ferner:

$$d\omega = \sqrt{da^2+db^2+dc^2}. \tag{7}$$

Multipliziert man (6) und (7) und dividiert beiderseits mit ds^2, so erhält man:

$$\frac{dl}{ds}\frac{d\omega}{ds} = \frac{\begin{vmatrix} a & da & dx \\ b & db & dy \\ c & dc & dz \end{vmatrix}}{ds^2},$$

oder nach (5):

$$\frac{\begin{vmatrix} a & da & dx \\ b & db & dy \\ c & dc & dz \end{vmatrix}}{ds^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r}\right)}. \tag{8}$$

Die linke Seite ist aber die negative Torsion der in der Richtung $dx : dy : dz$ gehenden geodätischen Linie[1]), $\frac{1}{r}$ ist die Krümmung des zugehörigen Normalschnitts, oder, was dasselbe ist, ebenfalls der geodätischen Linie. Durch Quadrieren der Gleichung (8) erhält man also den bemerkenswerten Satz:

Für eine geodätische Linie ist das Quadrat der Torsion gleich dem Produkt aus den Differenzen ihrer Krümmung gegen die beiden Hauptkrümmungen der Fläche in dem betreffenden Punkte.

1) Vgl. H. Stahl und V. Kommerell: Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie, § 15.

Digitized by Google

Über die Reduktion des elliptischen Integrals erster Gattung auf die Weierstrafssche Normalform mit Hülfe einer Hermiteschen Substitution.

Von Emil Haentzschel in Berlin.

1. Weierstrafs hat in seinen Vorlesungen gezeigt, dafs man das elliptische Integral erster Gattung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

wo $$R(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$$

ist, in die nach ihm benannte Normalform

$$\int \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

wo
$$S = 4s^3 - g_2s - g_3,$$
$$g_2 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2,$$
$$g_3 = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2 - a_2^3$$

ist, überführen kann mit Hülfe der Substitution:

$$(1)\quad x = x_0 + \frac{\sqrt{R(x_0)}\sqrt{S} + \frac{1}{2}R'(x_0)[s - \frac{1}{24}R''(x_0)] + \frac{1}{24}R(x_0)R'''(x_0)}{2[s - \frac{1}{24}R''(x_0)]^2 - \frac{1}{48}R(x_0)R^{(4)}(x_0)},$$

wenn x_0 eine beliebige reelle oder komplexe Konstante bedeutet.

Es ist bemerkenswert, dafs Weierstrafs bei der Herleitung dieser Formel ganz elementar vorging, dafs er vor allem keinerlei Vorkenntnisse aus der Theorie der binären Formen, also über Kovarianten und Invarianten, voraussetzte. Die Formel (1) entsteht bekanntlich als die Wurzel der sowohl in x als auch in s quadratischen Gleichung:

$$(2)\quad \begin{cases} \quad ([s - \frac{1}{24}R'(x_0)]^2 - \frac{1}{96}R(x_0)R^{(4)}(x_0))(x - x_0)^2 \\ - (\frac{1}{2}R(x_0)[s - \frac{1}{24}R'(x_0)] + \frac{1}{24}R(x_0)R'''(x_0))(x - x_0) \\ - (R(x_0)s + \frac{1}{12}R(x_0)R''(x_0) - \frac{1}{16}R'(x_0)^2) = 0, \end{cases}$$

die ja den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet. Im besonderen ist x diejenige der beiden Wurzeln, für welche *das Pluszeichen vor der Quadratwurzel* zu nehmen ist.

Digitized by Google

Ordnen wir die Gleichung (2) so um, dafs s die Unbekannte der quadratischen Gleichung wird, so ergiebt sich, wenn auch hier wieder *das Pluszeichen vor der Wurzel* genommen wird, für s der Wert:

$$(3)\quad s = \frac{\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} + R(x_0) + \frac{1}{2}R'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}R''(x_0)(x-x_0)^2}{2(x-x_0)^2},$$

welcher erkennen läfst, dafs s für $x = x_0$ unendlich grofs wird. Zwischen den beiden oben niedergeschriebenen elliptischen Integralen besteht nach Weierstrafs die Beziehung

$$(4)\quad \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{S}} = 0.$$

2. Weierstrafs pflegte in seinen Vorlesungen zwei Sonderfälle der Formel (1) mitzuteilen.

Erstens, es sei x_0 eine Wurzel der Gleichung $R(x_0) = 0$. Dann hat die Gleichung (2) eine Doppelwurzel, so dafs

$$(1^a)\quad x = x_0 + \frac{\frac{1}{2}R'(x_0)}{s - \frac{1}{24}R''(x_0)},$$

bez.

$$(3^a)\quad s = \frac{1}{24}R''(x_0) + \frac{\frac{1}{2}R'(x_0)}{x - x_0}$$

ist.

Zweitens, es sei $x_0 = \infty$.

Es ist dann

$$(1^b)\quad x = \frac{\sqrt{a_0}\sqrt{S} + 2a_1 s + a_0 a_3 - a_1 a_2}{2(a_1^2 - a_0 a_2) - 2a_0 s},$$

bez.

$$(3^b)\quad s = \frac{1}{2}\sqrt{a_0}\sqrt{R(x)} + \frac{1}{2}(a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2).$$

Bedenkt man, dafs x_0 als Wurzel von $R(x_0) = 0$ im ersten Falle sich als eine *algebraische* Funktion der Koeffizienten von $R(x)$ darstellt, so erkennt man, dafs keine der drei angeführten Transformationsformeln *eine rationale Funktion der Koeffizienten* $a_0, \ldots, a_4$ ist. *Und doch existiert eine solche;* sie rührt von Hermite her (Crelle's Journal **52**, S. 7—8, 1856). Herr Fricke nennt sie in F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, eine „merkwürdige Transformation vierten Grades" (S. 24). Merkwürdig ist in der That, dafs Weierstrafs von ihr in seinen Vorlesungen, soviel mir bekannt, nicht gesprochen hat. Sicher ist sie älter als die Weierstrafsschen Formeln (1) und (3), die sich zuerst in der Dissertation von W. Biermann (Berlin 1865) gedruckt finden. Diese Hermitesche Transformationsformel lautet:

$$(I)\quad s = -\frac{h(x)}{R(x)},$$

Digitized by Google

wo $h(x)$ die Hessiana von $R(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$ und daher gegeben ist durch

$$(5)\quad \begin{cases} h(x) = (a_0a_2 - a_1^2)\,x^4 + 2\,(a_0a_3 - a_1a_2)\,x^3 + (a_0a_4 + 2a_1a_3 - 3a_2^2)\,x^2 \\ \qquad + 2\,(a_1a_4 - a_2a_3)\,x + (a_2a_4 - a_3^2). \end{cases}$$

Hermite fand die Formel (I) bei Untersuchungen über Kovarianten und Invarianten von binären quadratischen Formen; von solchen ausgehend, giebt Halphen in seinem Traité des fonctions elliptiques (Bd. II, S. 360, 1888) eine Darstellung der bisher aufgeführten Formeln.

Mir ist nicht bekannt, dafs schon versucht worden wäre, (I) *aus* (3) *in elementarer Weise abzuleiten. Dies ist der Zweck der folgenden Zeilen.*

3. Wir machen zuerst folgende Beobachtung an der Gleichung (2). Berechnet man

$$\tfrac{1}{12}\,R(x_0)\,R''(x_0) - \tfrac{1}{16}\,R'(x_0)^2,$$

so erhält man

$$(5^a)\qquad h(x_0).$$

Ersetzt man demnach in (2) die Grölse x_0 durch x, so erhält man direkt aus (2)

$$(\mathrm{I})\qquad s = -\frac{h(x)}{R(x)}.$$

Es geht demnach (I) aus (2) dadurch hervor, dafs man $x_0 = x$ setzt. Dadurch wird nun freilich die Integralgleichung (4) illusorisch; wir müssen also sehen, welche neue Gleichung an die Stelle von (4) treten wird, zugleich aber (I) ganz streng aus (3) herzuleiten suchen.

Dazu wollen wir die Gleichung (3) derartig umformen, dafs wir die Irrationalität aus dem Zähler in den Nenner bringen; wir ziehen *vorläufig* aber beide Wurzeln von (2) in die Rechnung hinein. Wir setzen deswegen

$$(6)\qquad G(x) = R(x_0) + \tfrac{1}{2}\,R'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{12}\,R''(x_0)(x - x_0)^2$$

in (3) ein und erhalten

$$(3)\qquad s = \frac{\pm\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} + G(x)}{2\,(x - x_0)^2},$$

$$s = \frac{(\pm\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} + G(x))\,(\pm\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} - G(x))}{2\,(x - x_0)^2\,(\pm\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} - G(x))},$$

$$s = \frac{R(x_0)\,R(x) - G^2(x)}{2\,(x - x_0)^2\,(\pm\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} - G(x))}.$$

Nun hat Weierstrafs selbst schon gezeigt, dafs

$$(7)\qquad R(x_0)\,R(x) - G^2(x) = 4\,(x - x_0)^2\,R(x, x_0)$$

Digitized by Google

ist, wo

$$(8)\begin{cases} R(x,x_0)=(a_0a_2-a_1^2)x^2x_0^2+(a_0a_3-a_1a_2)(x+x_0)xx_0+ \\ \frac{1}{4}(a_0a_4-a_2^2)(x+x_0)^2+2(a_1a_3-a_2^2)xx_0+(a_1a_4-a_2a_3)(x+x_0)+(a_2a_4-a_3^2) \end{cases}$$

bedeutet. Demnach ist

$$(3^a) \qquad s=\frac{2\,R(x,x_0)}{\pm\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)}-G(x)}.$$

Setzen wir jetzt in (3^a):

$$x_0=x,$$

so wird

$$(6^a) \qquad [G(x)]_{x_0=x}=R(x),$$

$$(8^a) \qquad R(x,x)=h(x),$$

wie man letzteres aus (5) ersehen kann. Aber (3^a) wird für $x_0=x$ nur dann ein brauchbares Resultat ergeben, wenn man *das Minuszeichen, also die zweite Wurzel der Gleichung* (2) *nimmt.* Dann geht nämlich aus (3^a) direkt (I) hervor.

Damit ist ein Teil des gesteckten Zieles erreicht; jetzt gilt es, die Integralgleichung selbst aufzustellen. Wir wenden uns zu diesem Zwecke der Gleichung (1) zu und setzen $x_0=x$, so wird sich ergeben:

$$(9) \qquad \sqrt{R(x)}\sqrt{S}+\tfrac{1}{2}R'(x)\left[s-\tfrac{1}{24}R'(x)\right]+\tfrac{1}{24}R(x)R''(x)=0,$$

oder wegen

$$(I) \qquad s=-\frac{\frac{1}{12}R(x)R''(x)-\frac{1}{16}R'^2(x)}{R'(x)},$$

$$R(x)\sqrt{R(x)}\sqrt{S}=-\tfrac{1}{32}R'^3(x)-\tfrac{1}{24}R^2(x)R''''(x)+\tfrac{1}{16}R(x)R'(x)R''(x).$$

Also ist

$$(10) \qquad \sqrt{S}=\frac{-\frac{1}{32}R'^3(x)-\frac{1}{24}R^2(x)R''''(x)+\frac{1}{16}R(x)R'(x)R''(x)}{(\sqrt{R(x)})^3}.$$

Zur Berechnung des Zählers dieses Ausdrucks setzen wir einerseits

$$(I) \qquad s=-\frac{h(x)}{R'(x)};\quad R^2\frac{ds}{dx}=-R(x)\frac{dh(x)}{dx}+h(x)R'(x),$$

und andererseits

$$s=-\frac{\frac{1}{12}R(x)R''(x)-\frac{1}{16}R'(x)^2}{R'(x)},$$

$$-R^2\frac{ds}{dx}=2\left(\tfrac{1}{32}R'(x)^3+\tfrac{1}{24}R^2(x)R'''(x)-\tfrac{1}{16}R(x)R'(x)R''(x)\right).$$

Bezeichnen wir daher den Zähler von (10) mit t, so ist

$$(10) \qquad \sqrt{S}=\frac{t}{(\sqrt{R(x)})^3},$$

und

$$2t=-R(x)\frac{dh(x)}{dx}+h(x)R'(x),$$

Digitized by Google

also durch Einsetzen von R und h:

$$(11)\quad \begin{cases} t = (a_0^3 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3)x^5 + (a_0^2 a_4 + 2a_0 a_1 a_3 - 9a_0 a_2^2 + 6a_1^2 a_2)x^5 \\ \quad + 5\,(a_0 a_1 a_4 - 3a_0 a_2 a_3 + 2a_1^2 a_3)\,x^4 + 10\,(a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2)\,x^3 \\ +5(-a_0 a_3 a_4 + 3a_1 a_2 a_4 - 2a_1 a_3^2)x^2 + (9a_4 a_2^2 - a_4^2 a_0 - 2a_1 a_3 a_4 - 6a_3^2 a_2)x \\ \quad + (3a_2 a_3 a_4 - a_1 a_4^2 - 2a_3^3). \end{cases}$$

Indem wir nun

$$R^2 \frac{ds}{dx} = 2t$$

und

$$(10^a)\qquad (\sqrt{R(x)})' \sqrt{S} = t$$

kombinieren, ergiebt sich

$$\frac{\sqrt{R(x)}}{\sqrt{S}} \frac{ds}{dx} = 2,$$

d. h.

$$\frac{ds}{\sqrt{S}} = 2\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Weil aber aus (I) hervorgeht, dafs s unendlich grofs wird für eine Wurzel x_0 von $R(x)$, wenn x einen solchen Wert annimmt, so ist

$$(II)\qquad \int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{S}} = 2\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Damit ist das gesteckte Ziel erreicht. In Beziehung auf t leiten wir noch aus (10) die Gleichung ab:

$$t^2 = S \cdot R^3 = 4s^3 R^3 - g_2 s R \cdot R^2 - g_3 R^3$$

oder

$$t^2 = -4h^3(x) + g_2 h(x) R^2(x) - g_3 R^3(x).$$

4. Wir behandeln noch folgenden interessanten *Sonderfall*. Es sei

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{g_2}{4},\ a_4 = -g_3,$$

so ist

$$R(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3;\ h(x) = -\left(x^4 + \frac{g_2}{2}x^2 + 2g_3 x + \frac{g_2^2}{16}\right) = -\left(x^2 + \frac{g_2}{4}\right)^2 - 2g_3 x,$$

$$(I^a)\qquad s = \frac{\left(x^2 + \frac{g_2}{4}\right)^2 + 2g_3 x}{4x^3 - g_2 x - g_3},$$

$$(II^a)\qquad \int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = 2\int_{\lambda}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

Setzt man

$$\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = -du \text{ und } \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = -du',$$

so ist

$$u = 2u' \text{ und } s = \wp(u),\ x = \wp(u') = \wp\left(\frac{u}{2}\right),$$

Digitized by Google

demnach

$$(\mathrm{I}^{\alpha}) \qquad \wp(u) = \frac{\left[\wp^2\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{g_2}{4}\right]^2 + 2g_3\wp\left(\frac{u}{2}\right)}{4\wp^3\left(\frac{u}{2}\right) - g_2\wp\left(\frac{u}{2}\right) - g_3},$$

also erhält man die bekannte Gleichung für die Division durch 2. Die Gleichung (I^{α}) erlaubt nun aber auch die Berechnung von x durch s; es ist nämlich

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x + (\sqrt{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)} - e_\lambda)}{x - (\sqrt{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)} + e_\lambda)} \\ = \left[\dfrac{\sqrt{(s - e_\mu)(s - e_\nu)} - \sqrt{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)} - (s - e_\lambda)}{\sqrt{(s - e_\mu)(s - e_\nu)} + \sqrt{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)} - (s - e_\lambda)}\right]^{\frac{1}{2}}. \end{array} \right.$$

Berlin, den 11. Januar 1901.

Digitized by Google

Die Geraden der Reyeschen Konfiguration.

Von Ernst Steinitz in Charlottenburg.

Die Reyesche Kf. und die zu ihr gehörige *Transformationsgruppe* sind der Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen. Zweck dieser Notiz ist die Einführung einer symmetrischen Bezeichnung, welche, anknüpfend an allgemein geläufige Vorstellungen, viele von den merkwürdigen Eigenschaften der Kf. unmittelbar hervortreten läfst, aber auch bei allen weiteren Untersuchungen sich als ein brauchbares Hilfsmittel bewährt. Dabei fällt den Geraden der Kf. eine bedeutsame Rolle zu; ihre überaus einfache, aber bisher wenig beachtete Gruppierung nimmt die folgende Darstellung zum Ausgangspunkt.

Auf die in Rede stehende Kf. wurde zuerst Poncelet bei Betrachtung der Ähnlichkeitspunkte von 4 Kugeln aufmerksam. Bei 3 Kugeln bilden bekanntlich die 6 Ähnlichkeitspunkte die Figur eines vollständigen Vierseits, von dessen Seiten — „Ähnlichkeitsachsen" — die eine die drei äufseren, die anderen je einen äufseren und zwei innere Ähnlichkeitspunkte enthalten. Geht man von vier Kugeln K_1, K_2, K_3, K_4 aus, so erhält man 12 Ähnlichkeitspunkte, welche sich zu drei und drei auf 16 Ähnlichkeitsachsen verteilen. Von den letzteren gehen je 4 durch jeden der 12 Punkte.

Es bezeichne $pqrs$ jede Anordnung der Ziffern 1 2 3 4, (pq) den äufseren, $(\overline{pq})$ den inneren Ähnlichkeitspunkt von K_p und K_q; ferner (pqr) die durch (pq), (pr), (qr), endlich $(pq\bar{r})$ die durch (pq), $(\overline{pr})$, $(\overline{qr})$ gehende Ähnlichkeitsachse. Dann lassen sich die Achsen zu dem folgenden quadratischen Tableau zusammenstellen:

$$\begin{array}{cccc}
(234) & (134) & (12\bar{4}) & (123) \\
(1\bar{3}4) & (\bar{2}34) & (123) & (\bar{1}24) \\
(12\bar{4}) & (\bar{1}23) & (\bar{2}3\bar{4}) & (134) \\
(123) & (124) & (\bar{1}34) & (23\bar{4}).
\end{array}$$

In diesem Tableau haben zwei Achsen, die weder derselben Zeile noch derselben Kolonne angehören, stets einen Ähnlichkeitspunkt gemein, während zwei zu derselben Zeile oder zu derselben Kolonne ge-

Digitized by Google

hörige Achsen keinen gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt haben. Man sieht auch leicht, dafs die Geradenpaare der letzteren Art windschief sind, wofern nur die Mittelpunkte der 4 Kugeln nicht in einer Ebene liegen.

I.

Als *„Reyesches System"* bezeichnen wir
ein System von 16 quadratisch angeordneten Geraden

$$(1)\qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

von der Beschaffenheit, dafs die einer Zeile oder Kolonne zugehörigen Geraden zu einander windschief sind, während je 2 Geraden, die weder derselben Zeile noch derselben Kolonne angehören, einander schneiden.

Es wurde bemerkt, dafs die Ähnlichkeitsachsen von 4 Kugeln ein solches System bilden; doch soll darauf nicht weiter Bezug genommen werden. Für die *Existenz* Reyescher Systeme wird später durch Angabe einer einfachen Konstruktion noch ein Beweis erbracht werden. Zunächst wollen wir jedoch, die Existenz voraussetzend, aus der Definition (1) einige Folgerungen ziehen.

Wenn man im Reyeschen System (a_{ik}) die Zeilen und ebenso die Kolonnen unter einander vertauscht, so bleibt sein Charakter erhalten. Diese Permutationen bezeichnen wir durch

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} z_1 z_2 z_3 z_4 & c_1 c_2 c_3 c_4 \\ z_p z_q z_r z_s & c_t c_u c_v c_w \end{pmatrix},$$

worin z_i und c_k $(i, k = 1, \ldots, 4)$ diejenige Zeile und Kolonne angeben, welche das Element a_{ik} gemein haben, $p\,q\,r\,s$ und $t\,u\,v\,w$ aber irgend zwei Anordnungen der Ziffern 1 2 3 4 bedeuten. Zu diesen $4! \cdot 4! = 576$ Permutationen kommen noch ebensoviele Permutationen

$$(3)\qquad \begin{pmatrix} z_1 z_2 z_3 z_4 & c_1 c_2 c_3 c_4 \\ c_t c_u c_v c_w & z_p z_q z_r z_s \end{pmatrix},$$

bei denen die Zeilen mit den Kolonnen vertauscht sind. Damit sind aber alle zulässigen Vertauschungen erschöpft; sie bilden insgesamt eine *Gruppe* $\mathfrak{R}$ von der Ordnung 1152. — Auf die geometrische Bedeutung der Permutationen gehen wir später ein.

Operieren wir mit den Symbolen a_{ik} der Geraden wie mit unbestimmten Gröfsen, so stellt $\mathfrak{R}$ die Permutationsgruppe der Elemente a_{ik} dar, welche die Determinante $|a_{ik}|$, abgesehen vom Vorzeichen, ungeändert läfst. Diejenigen Permutationen, welche auch das Vorzeichen nicht ändern,

Digitized by Google

bilden eine invariante Untergruppe $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$ vom Index 2, also von der Ordnung 576. Eine zweite invariante Untergruppe $\mathfrak{S}$ von der Ordnung 576 wird von den Permutationen (2) gebildet. Jede solche Permutation ist das Produkt einer Zeilenpermutation $\begin{pmatrix} z_1 z_2 z_3 z_4 \\ z_p z_q z_r z_s \end{pmatrix}$ und einer Kolonnenpermutation $\begin{pmatrix} c_1 c_2 c_3 c_4 \\ c_t c_u c_v c_w \end{pmatrix}$, welche in beliebiger Reihenfolge zu nehmen sind. Die Gruppe $\mathfrak{S}$ ist daher das direkte Produkt aus der Gruppe $\mathfrak{S}'$ der Zeilen- und der Gruppe $\mathfrak{S}''$ der Kolonnenpermutationen. — Von anderen invarianten Untergruppen führen wir noch eine Gruppe $\mathfrak{T}$ von der Ordnung 16 an, welche das direkte Produkt ist aus der Gruppe $\mathfrak{T}'$ der Zeilenpermutationen 1 (= Identität) $(z_1 z_2)(z_3 z_4)$, $(z_1 z_3)(z_2 z_4)$, $(z_1 z_4)(z_2 z_3)$ und der Gruppe $\mathfrak{T}''$ der entsprechenden Kolonnenpermutationen. Die Gruppe $\mathfrak{T}$ ist dadurch ausgezeichnet, dafs alle ihre Operationen mit einander vertauschbar sind.

II.

Die 24 Terme der Determinante $|a_{ik}|$, deren 12 positives und 12 negatives Vorzeichen erhalten, *lassen sich sehr einfach geometrisch interpretieren.* Die Faktoren eines jeden Terms repräsentieren 4 einander schneidende Geraden, welche also entweder alle durch einen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen müssen. Es bezeichne $pqrs$ irgend eine Anordnung der Ziffern 1 2 3 4. Wir greifen von den 4 Geraden, welche durch die Faktoren von $a_{1p}\, a_{2q}\, a_{3r}\, a_{4s}$ bezeichnet werden, 3 heraus, etwa a_{1p}, a_{2q}, a_{3r}. Die Gerade a_{3s} schneidet (nach (1)) a_{1p} und a_{2q}, ist dagegen zu a_{3r} windschief. Daraus folgt, dafs unmöglich die Geraden a_{1p}, a_{2q}, a_{3r} gleichzeitig sowohl in einer Ebene liegen als auch durch einen Punkt gehen können. Da dies von irgend 3 der Geraden a_{1p}, a_{2q}, a_{3r}, a_{4s} gilt, so sind nur zwei Fälle möglich: Die 4 Geraden gehen entweder durch einen Punkt, alsdann liegen keine 3 von ihnen in einer Ebene, oder sie liegen alle in einer Ebene, dann können nicht 3 von ihnen durch einen Punkt gehen. Wir sehen im ersten Falle den Schnittpunkt der Geraden, im zweiten ihre Verbindungsebene als das geometrische Bild des Determinantenterms $a_{1p}\, a_{2q}\, a_{3r}\, a_{4s}$ an. Betrachten wir nun zwei Terme $a_{1p}\, a_{2p}\, a_{3r}\, a_{4s}$ und $a_{1p}\, a_{2q}\, a_{3s}\, a_{4r}$, welche durch eine einzige Transposition zweier Kolonnenindices in einander übergehen. Ein jeder von ihnen stellt entweder den Schnittpunkt oder die Verbindungsebene der Geraden a_{1p} und a_{2q} dar; und da sie nicht beide das Nämliche darstellen können, weil sonst alle 6 Geraden a_{1p}, a_{2q}, a_{3r}, a_{4s}, a_{3s}, a_{4r} einander schneiden würden, während doch a_{3r}, a_{3s} windschief sein sollen, so mufs der eine Term den Schnittpunkt,

Digitized by Google

der andere die Verbindungsebene repräsentieren. Als weitere Folgerung hieraus ergiebt sich, dafs von den beiden Klassen, in welche die 24 Terme von $|a_{ik}|$ zerfallen, die eine nur Punkte, die andere nur Ebenen darstellt. Diese 12 Punkte und 12 Ebenen, mit welchen alle Schnittpunkte und Verbindungsebenen der 16 Geraden erschöpft sind, stellen im Verein mit diesen Geraden die Reyesche Kf. dar. Die Betrachtung des quadratischen Systems (a_{ik}) und seiner Determinante zeigt nämlich sofort, dafs jede Gerade mit 3 Punkten und 3 Ebenen inzident ist, dafs die in einer Ebene gelegenen Geraden und Punkte ein vollständiges Vierseit, die durch einen Punkt gehenden Geraden und Ebenen ein vollständiges Vierkant bilden. Man sieht ferner, dafs ein Punkt und eine Ebene dann und nur dann inzident sind, wenn die zugehörigen Determinantenterme durch eine einzige Transposition der Kolonnenindices in einander übergehen. Wenn man den Term $a_{1p}a_{2q}a_{3r}a_{4s}$ durch das einfache Zeichen $pqrs$ ersetzt, so ergiebt sich also:

Von den 24 Anordnungen der Ziffern 1234 stellen die zwölf der einen Klasse Punkte, die der anderen Klasse Ebenen dar. Ein Punkt und eine Ebene sind inzident, wenn die zugehörigen Anordnungen durch eine einzige Vertauschung zweier Elemente in einander übergehen (und nur dann).

Anstatt des unter (1) beschriebenen Systems von Geraden kann man auch das soeben beschriebene System von Punkten und Ebenen der Betrachtung zu Grunde legen und von diesem zu jenem gelangen.

Im Anschlufs hieran lassen sich leicht diejenigen Eigenschaften der Kf. ableiten, welche sich auf die Anordnung ihrer Punkte und Ebenen zu *desmischen Tetraedern* beziehen und zur *konjugierten Kf.* führen; doch soll hierauf nicht weiter eingegangen werden.

III.

Eine einfache *Konstruktion eines Reyeschen Systems*

$$\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}$$

erhält man, wenn man von denjenigen Geraden ausgeht, die zu einer Geraden, z. B. a_{11}, windschief sind. Diese müssen zwei Gruppen a_{12}, a_{13}, a_{14}; a_{21}, a_{31}, a_{41} von je 3 windschiefen Geraden bilden, und jede Gerade der einen Gruppe mufs jede der anderen schneiden, so dafs

Digitized by Google

also die Gruppen den beiden Regelscharen einer Fläche II. Ordnung angehören. Hat man die 6 Geraden den angegebenen Bedingungen gemäfs gewählt, so folgt die Konstruktion der Geraden

$$\begin{matrix} a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \\ a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \\ a_{42}\, a_{43}\, a_{44}. \end{matrix} \tag{4}$$

Jede von ihnen mufs 2 von den Geraden a_{12}, a_{13}, a_{14} und 2 von den Geraden a_{21}, a_{31}, a_{41} schneiden, und da diese 4 Geraden ein windschiefes Viereck bilden, so mufs die gesuchte Gerade eine Diagonale dieses Vierecks sein. Um die hierbei noch verbleibende Zweideutigkeit zu beseitigen, hat man noch eine Festsetzung darüber zu treffen, ob für das zu konstruierende Reyesche System (a_{ik}) die positiven Glieder der Determinante $|a_{ik}|$ Punkte, die negativen Ebenen repräsentieren sollen oder umgekehrt. Jede dieser Festsetzungen führt zu einem bestimmten Reyeschen System. Es genügt, dies für die eine zu zeigen. Verfügen wir also: Die positiven Terme von $|a_{ik}|$ sollen Punkte repräsentieren. Dann mufs z. B. die Gerade a_{22} durch den Schnittpunkt von a_{13} und a_{41} und durch den von a_{14} und a_{21} gehen; sie liegt, so bestimmt, auch in der Verbindungsebene von a_{13} und a_{31} und in der von a_{14} und a_{41}. In derselben Weise bestimmen sich alle Geraden (4), und man erkennt leicht, dafs die bisher konstruierten Geraden den vorgeschriebenen Bedingungen genügen. Nun *schneiden* die Geraden a_{22}, a_{33}, a_{44} einander; in einer *Ebene* aber liegen sie *nicht*, weil die durch $a_{22}\, a_{33}$ bestimmte Ebene noch die zu a_{44} windschiefen Geraden a_{14}, a_{41} enthält. Also gehen a_{22}, a_{33}, a_{44} durch einen Punkt. Auf diese Weise ergiebt sich, dafs in der Determinante von (4) jeder der 3 positiven Terme einen Punkt als Schnittpunkt, jeder der 3 negativen eine Ebene als Verbindungsebene der durch seine Faktoren bezeichneten Geraden liefert. Nun hat aber jeder positive Term mit jedem negativen ein Element gemein, und es ist daher jeder von den 3 Schnittpunkten mit jeder der 3 Verbindungsebenen inzident. Daher müssen sich die 3 Ebenen in einer Geraden schneiden, welche auch die 3 Punkte enthält. Diese Gerade ist die einzige, welche die 9 Geraden (4) sämtlich schneidet; sie haben wir daher für a_{11} zu wählen. Endlich ergiebt sich, dafs auch die letzte Bedingung erfüllt, dafs nämlich a_{11} gegen a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{31}, a_{41} windschief ist. Die Geraden a_{11} und a_{12} z. B. sind windschief, weil sie beide die 3 windschiefen Geraden a_{22}, a_{33}, a_{43} schneiden.

Bezeichnen wir den Schnittpunkt von a_{i1}, a_{1k} mit $P_{ik}\,(i, k = 2, 3, 4)$, so haben die 5 Punkte P_{22}, P_{23}, P_{32}, P_{33}, P_{44} *allgemeine* Lage, d. h. keine 4 von ihnen liegen in einer Ebene, und man kann die Kon-

Digitized by Google

struktion in der Weise beginnen, dafs man diese 5 Punkte in allgemeiner Lage, im übrigen willkürlich, wählt. Alsdann sind die Geraden a_{1i}, a_{i1} $(i = 2, 3, 4)$ bestimmt und die Konstruktion ist wie oben fortzusetzen. Nun leuchtet ein, dafs jede *lineare Transformation (Kollineation* oder *Korrelation)* ein Reyesches System wieder in ein solches überführt; aus den letzten Resultaten aber ergiebt sich mittels bekannter Schlüsse, *dafs* umgekehrt *zu zwei Reyeschen Systemen* (a_{ik}), (b_{ik}) *stets eine bestimmte lineare Transformation gehört, welche jede Gerade* a_{ik} *in die* (durch dieselben Indices bezeichnete) *Gerade* b_{ik} *überführt.* Je nachdem die die Punkte der Kf. bezeichnenden Terme der Determinanten $|a_{ik}|$, $|b_{ik}|$ gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben, ist die Transformation eine Kollineation oder Korrelation.

IV.

Hiernach ist auch die *geometrische Bedeutung der 1152 Permutationen* klar, welche ein Reyesches System (a_{ik}) in sich überführen: *sie werden durch* ebenso viele völlig bestimmte *lineare Transformationen verwirklicht,* und zwar diejenigen, welche das Vorzeichen der Determinante (a_{ik}) ungeändert lassen, durch Kollineationen, die andern durch Korrelationen. Die ersteren nämlich führen die Punkte der Reyeschen Kf. in einander über und ebenso die Ebenen, die letzteren vertauschen die Punkte mit den Ebenen. Wir bezeichnen diese Transformationen durch die Permutationen, welche sie unter den Geraden bez. unter den Zeilen und Kolonnen des Reyeschen Systems hervorrufen ((2) und (3)). Es ist sehr leicht, nach dieser Bezeichnung einen Überblick zu gewinnen über die Einteilung der Transformationen in Typen von solchen, die innerhalb der ganzen Gruppe $\mathfrak{R}$ gleichberechtigt auftreten. Doch soll diese Einteilung hier nicht in allen Einzelheiten ausgeführt werden.

Die Transformation $(z_1 z_2)$ ist von der zweiten Ordnung, d. h. ihre zweimalige Anwendung ergiebt die Identität. $(z_1 z_2)$ kann also nur Polar- oder Nullsystem sein. Nun läfst aber $(z_1 z_2)$ die Geraden von z_3 ungeändert, und diese gehören, da sie windschief sind und 3 von ihnen von a_{44} geschnitten werden, die vierte aber nicht, keiner Regelschar an. $(z_1 z_2)$ kann also nicht Polarsystem, sondern nur Nullsystem sein. Man kann dies auch daran erkennen, dafs $(z_1 z_2)$ jedes Element (Punkt, Ebene) der Kf. in ein mit ihm inzidentes überführt und die Punkte der Kf. nicht alle auf einer Fläche II. O. gelegen sind. So erhält man, den 6 Zeilen- und 6 Kolonnenpermutationen entsprechend, 12 Nullsysteme. Jedes Nullsystem ist bekanntlich eine *„eigentliche" Transformation,* d. h. die bei der analytischen Darstellung auftretende Transformationsdeterminante ist positiv. Daher müssen auch allen aus beliebig vielen

Digitized by Google

Zeilen- und Kolonnentranspositionen resultierenden Permutationen eigentliche Transformationen entsprechen. Das sind aber die sämtlichen (unter (2) dargestellten) Permutationen der Gruppe $\mathfrak{S}$. Um zu zeigen, dafs die übrigen (unter (3) bezeichneten) Permutationen *uneigentlichen Transformationen* entsprechen, hat man dies nur für eine von ihnen nachzuweisen; denn aus dieser einen ergeben sich durch Zusammensetzung mit allen Permutationen (2) alle Permutationen (3). Nun stellt sich aber die Transformation zweiter Ordnung $(z_1c_1)(z_2c_2)(z_3c_3)(z_4c_4)$, welche a_{ik} und a_{ki} vertauscht, indem sie die mit einem Punkt oder einer Ebene inzidenten Geraden $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ in sich überführt, als eine zentrisch-involutorische Verwandtschaft und damit als uneigentliche Transformation dar.

V.

Die 8 Geraden der Zeilen z_1 und z_2 werden durch das Nullsystem (z_3z_4) nicht verändert, gehören mithin einem linearen Komplex an. Die durch die Nullsysteme (z_2z_4) und (z_3z_4) bestimmten Komplexe haben eine lineare Strahlenkongruenz gemein. Die 4 Geraden von z_1 gehören dieser Kongruenz an, und sie bestimmen dieselbe, da sie in keiner Regelschar enthalten sind. Wir bezeichnen diese Kongruenz mit Z_1 und allgemein die durch die Geraden von z_i bez. c_i bestimmte Kongruenz mit Z_i bez. C_i. Da die Kongruenz Z_1 in den durch die Nullsysteme (z_2z_3), (z_2z_4), (z_3z_4) bestimmten Komplexen enthalten ist, so läfst jede der 6 Transformationen, welche nur die drei letzten Zeilen permutieren, jeden Strahl von Z_1 ungeändert. Die Kollineation $(z_2z_3z_4)$ unterwirft die Punkte eines solchen Strahles einer cyklisch-projektiven Vertauschung von der Ordnung 3. Die Doppelpunkte einer solchen Projektivität sind bekanntlich konjugiert imaginär, dasselbe gilt daher auch von den Directricen der Kongruenz Z_1. Die Strahlen von Z_1 erfüllen den ganzen reellen Raum in der Art, dafs jeder Punkt auf einem und nur auf einem Strahl von Z_1 liegt. — Gleiches gilt für jede der Kongruenzen Z_i und C_i.

Zwei Kongruenzen Z_i (zwei Kongruenzen C_i) können einen reellen Strahl nicht gemein haben: Nehmen wir an, Z_1 und Z_2 hätten die reelle Gerade g gemein. Dann läfst jedes Nullsystem (z_iz_4) diese Gerade ungeändert, so dafs g auch den Kongruenzen Z_3 und Z_4 angehört. g gehört ebenso zu der Kongruenz, welche die durch die Nullsysteme (z_1z_2) und (z_3z_4) bestimmten Komplexe gemein haben. Diese beiden Nullsysteme sind vertauschbar (liegen in Involution), und die aus ihnen komponierte involutorische Kollineation $(z_1z_2)(z_3z_4)$ führt jede Gerade der zuletzt erwähnten Kongruenz in sich selbst über, indem sie die Punkte der Geraden involutorisch paart. Auf diese Weise wird durch jede der 3 Kollineationen $(z_1z_2)(z_3z_4)$, $(z_1z_3)(z_2z_4)$, $(z_1z_4)(z_2z_3)$ unter

Digitized by Google

den Punkten von g eine Involution hervorgerufen; die drei Involutionen sind unter einander vertauschbar, und das Produkt zweier von ihnen ist die dritte. Nun ist bekannt, dafs unter drei miteinander vertauschbaren reellen Involutionen in einem reellen Gebilde erster Stufe stets zwei sind, die reelle Doppelelemente besitzen, während die dritte kein reelles Doppelelement besitzt. (Handelt es sich um Involutionen unter den Punkten eines Kegelschnittes, so bilden die drei Involutionszentren ein Poldreieck.) Im vorliegenden Falle ist aber die Realität der Doppelelemente bedingt durch die Realität der Directricen, welche zu den durch die Involutionen $(z_1z_2)(z_3z_4)$, $(z_1z_3)(z_2z_4)$, $(z_1z_4)(z_2z_3)$ bestimmten Kongruenzen gehören. Dafs diese Directricen sämtlich imaginär sind, würde durch eine nähere Untersuchung gezeigt werden können. Ohne weiteres aber leuchtet ein, dafs zwischen den drei Kongruenzen kein Unterschied hinsichtlich der Realität ihrer Directricen bestehen kann, da durch die Transformationsgruppe $\mathfrak{S}'$ mit den Zeilen auch die Kongruenzen und ihre Directricen vertauscht werden. So führt die Annahme einer reellen, den Kongruenzen Z_1, Z_2 gemeinsamen Geraden zu einem Widerspruch.

VI.

Die weiteren Untersuchungen werden wesentlich erleichtert, wenn man die von v. Staudt begründete Theorie der imaginären Elemente zu Hilfe nimmt. — Im Anschlufs an den zuletzt geführten Beweis bemerken wir, *dafs eine den Kongruenzen Z_1, Z_2 gemeinsame Gerade auch nicht einen reellen Punkt enthalten kann.* Denn durch einen reellen Punkt geht nur ein Strahl der Kongruenz Z_1, und zwar ein reeller, welcher also nicht zu Z_2 gehören kann. Die Directricen einer Kongruenz $Z_i(C_i)$ sind windschief. Die 8 Directricen von $Z_1, \ldots, Z_4$ sind alle windschief; denn wenn etwa zwei zu Z_1 bez. Z_2 gehörige Directricen sich schnitten, so würden die beiden andern sich in dem conjugiert imaginären Punkte schneiden. Die Verbindungsgerade der beiden Punkte wäre eine reelle, Z_1 und Z_2 gemeinsame Gerade. — Wir betrachten nun die Kongruenzen Z_1 und C_1. Die Directricen von $Z_1(C_1)$ sind Leitstrahlen der durch a_{12}, a_{13}, a_{14} (a_{21}, a_{31}, a_{41}) bestimmten Regelschar, gehören also der durch a_{21}, a_{31}, a_{41} (a_{12}, a_{13}, a_{14}) bestimmten Regelschar an. Daher müssen die Directricen von C_1 von den Directricen von Z_1 geschnitten werden. Dasselbe gilt von jedem Kongruenzpaar Z_i, C_i. Daher gehören die Directricen von $Z_1, \ldots, Z_4$ einer Regelschar R', die von $C_1, \ldots, C_4$ der zugehörigen Leitschar R'' an.

Die Directricen von Z_1 gehören als Strahlen der von a_{21}, a_{31}, a_{41} bestimmten Regelschar auch der Kongruenz C_1 an. Allgemein ergiebt

Digitized by Google

sich: Die Directricen von jeder Kongruenz $Z_i(C_i)$ sind in jeder Kongruenz $C_i(Z_i)$ enthalten. Hieraus folgt weiter: *Die Kongruenzen Z_i haben die Geraden der Regelschar R'', die Kongruenzen C_i die Strahlen der zugehörigen Leitschar R' gemein. Die Fläche P zweiter Ordnung, welche diese Regelscharen enthält, ist imaginär.*

Die Directricen von Z_i und C_k bilden ein windschiefes Viereck. Die Diagonalen dieses Vierecks sind inbezug auf P polar; sie sind die einzigen Geraden, welche Z_i und C_k zugleich angehören, und sie sind reell, weil die Gegenecken des Vierecks konjugiert-imaginär sind. Eine von ihnen ist die Gerade a_{ik}, die andere sei mit a'_{ik} bezeichnet $(i, k = 1, \ldots, 4)$. Da das Polarsystem der Fläche P die Geraden a_{ik} und a'_{ik} vertauscht, so ist (a'_{ik}) ein Reyesches System, es heifst das zu (a_{ik}) *„conjugierte" System.* Da beide Systeme reell sind, so stellt das Polarsystem von P eine reelle Transformation dar. Die Zeilen und Kolonnen von (a'_{ik}) bestimmen dieselben Kongruenzen wie die des ursprünglichen Systems. Von (a'_{ik}) ausgehend, gelangt man daher zu derselben Fläche P und erhält (a_{ik}) als konjugiertes System. — Die zu (a'_{ik}) gehörige Transformationsgruppe ist mit der zu (a_{ik}) gehörigen Gruppe $\mathfrak{R}$ identisch; denn man erkennt sofort, dafs jede Transformation von $\mathfrak{R}$ die Geraden a'_{ik} in derselben Weise wie die Geraden a_{ik} permutiert.

Die Operationen von $\mathfrak{R}$ transformieren die Fläche P in sich, die Operationen von $\mathfrak{S}$ führen, da sie nur die Zeilen (Kolonnen) und daher auch die Directricen der aus ihnen hervorgehenden Kongruenzen unter einander vertauschen, jede der Regelscharen R', R'' in sich über, die übrigen Operationen von $\mathfrak{R}$ vertauschen die beiden Regelscharen. Die Geraden der Regelschar $R'(R'')$ werden, da sie den 4 Kongruenzen $C_i(Z_i)$ $(i, k = 1, \ldots, 4)$ zugleich angehören, von den Operationen der Gruppe $\mathfrak{S}''(\mathfrak{S}')$ nicht verändert.

Es stellt sich also $\mathfrak{R}$ als Untergruppe einer Gruppe $\mathfrak{P}$ dar, bestehend aus den sämtlichen Operationen, welche die Fläche II. O. P unverändert lassen. In $\mathfrak{P}$ hat man eine Untergruppe $\mathfrak{Q}$ vom Index 2, bestehend aus den Operationen, welche jede Regelscharen von P in sich überführen. $\mathfrak{Q}$ endlich hat zwei Untergruppen $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}''$, von denen die eine jeden Strahl der einen, die andere jeden Strahl der andern Regelschar in sich überführt. Die Operationen von $\mathfrak{Q}'$ sind mit denen von $\mathfrak{Q}''$ vertauschbar, und jede Operation von $\mathfrak{Q}$ läfst sich, und zwar im wesentlichen nur auf eine Art, als ein Produkt aus einer Operation von $\mathfrak{Q}'$ und einer solchen von $\mathfrak{Q}''$ darstellen. Die Gruppen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$ sind bez. in $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}''$ als Untergruppen enthalten.

Charlottenburg, im Februar 1901.

Digitized by Google

Über die Nullstellen der Besselschen Funktionen zweiter Art.

Von Paul Schafheitlin in Berlin.

Von Herrn Hurwitz[1]) ist bewiesen worden, dafs die sämtlichen Nullstellen der Besselschen Funktionen erster Art $J^n(x)$ für reelle positive Indices reell sind; über deren Lage habe ich kürzlich[2]) Genaueres zu ermitteln versucht, ebenso wie über die der reellen Wurzeln der Besselschen Funktionen zweiter Art $Y^n(x)$. Andere Ergebnisse über die Nullstellen der Funktionen $Y^n(x)$, speziell über deren Realität, sind mir nicht bekannt. Die Sache liegt bei der Funktion $Y^n(x)$ insofern etwas verwickelter, als dieselbe keine eindeutige Funktion wie $J^n(x)$ ist, sondern eine mehrdeutige Funktion mit unendlich vielen Werten wie der Logarithmus. Es ist:

$$(1)\quad \begin{cases} J^n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Pi p\, \Pi(n+p)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}, \\ \frac{\pi}{2}\, Y^n(x) = \left\{ \Psi(n) - \log \frac{x}{2} \right\} J^n(x) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} \frac{\Pi n}{p\, \Pi(n-p)} \left(\frac{2}{x}\right)^p J^{n-p}(x) \\ \qquad\qquad + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{n+2p}{p(n+p)} J^{n+2p}(x), \end{cases}$$

wo Ψ die bekannte Gaufssche Transcendente bedeutet. Wie derjenige Wert des Logarithmus, wofür das Argument von x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, der Hauptwert genannt wird, so will ich denjenigen Wert von $Y^n(x)$, wofür das Argument von x zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, den Hauptwert nennen; vom Hauptwerte des Logarithmus unterscheiden

1) Über die Nullstellen der Besselschen Funktion. Math. Ann. **33**, 246—266.

2) Die Nullstellen der Besselschen Funktionen. Journ. für reine u. angew. Math. **122**, 299—321.

Digitized by Google

sich alle übrigen um ganze Vielfache von $2\pi i$; etwas Ähnliches gilt für $Y^n(x)$. Setzt man:

$$x = (\varrho, \vartheta) = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

so folgt aus (1):

$$Y^n(\varrho, \pi + \vartheta) = (-1)^n \{ Y^n(\varrho, \vartheta) - 2iJ^n(\varrho, \vartheta) \}$$

und allgemein:

$$(2) \qquad Y^n(\varrho, m\pi + \vartheta) = (-1)^{mn} \{ Y^n(\varrho, \vartheta) - 2miJ^n(\varrho, \vartheta) \}.$$

Man erkennt hieraus, dafs, abgesehen vom Vorzeichen der Funktionen mit ungeradem Index, alle übrigen Werte von dem Hauptwerte sich um ganzzahlige Vielfache von $2iJ^n(x)$ unterscheiden.

Hier will ich nun zeigen, dass die Hauptwerte der Funktionen $Y^0(x)$ und $Y^1(x)$ keine komplexen Nullstellen haben.

Die Differentialgleichung, der die beiden Funktionen $J^n(x)$ und $Y^n(x)$ genügen, lautet:

$$\frac{d^2 Z^n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dZ^n(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) Z^n(x) = 0;$$

sie kann leicht transformiert werden in:

$$\frac{d^2 \sqrt{x}\, Z^n(x)}{dx^2} = \left(\frac{4n^2 - 1}{x^2} - 1\right) \sqrt{x}\, Z^n(x)$$

und durch Verwandlung des Arguments in rx:

$$\frac{d^2 \sqrt{x}\, Z^n(rx)}{dx^2} = \left(\frac{4n^2 - 1}{x^2} - r^2\right) \sqrt{x}\, Z^n(rx).$$

Bedeutet s einen von r verschiedenen Parameter, bildet man die der letzten Gleichung entsprechende für s, multipliziert alsdann die Gleichung für $\sqrt{x}\, Z^n(rx)$ mit $Z^n(sx)$ und umgekehrt, so erhält man durch Subtraktion beider Gleichungen:

$$\frac{d}{dx}\left\{ \sqrt{x}\, Z^n(rx) \frac{d\sqrt{x}\, Z^n(sx)}{dx} - \sqrt{x}\, Z^n(sx) \frac{d\sqrt{x}\, Z^n(rx)}{dx} \right\} = (r^2 - s^2)\, x\, Z^n(rx) Z^n(sx)$$

und hieraus:

$$\left[x\, Z^n(rx) \frac{dZ^n(sx)}{dx} - x\, Z^n(sx) \frac{dZ^n(rx)}{dx} \right]_a^b = (r^2 - s^2) \int_a^b x\, Z^n(rx) Z^n(sx)\, dx.$$

Benutzt man die für beide Besselsche Funktionen giltige Formel:

$$\frac{dJ^n(x)}{dx} = \frac{n}{x} J^n(x) - J^{n+1}(x),$$

so erhält man:

$$(3) \qquad \int_a^b x\, Z^n(rx)\, Z^n(sx)\, dx = \frac{1}{r^2 - s^2} \left[rx Z^n(sx) Z^{n+1}(rx) - sx Z^n(rx) Z^{n+1}(sx) \right]_a^b.$$

Digitized by Google

Diese Formel rührt von Lommel[1]) her; wählt man unendlich als Integrationsgrenze, so dürfen rx und sx keine komplexen Werte annehmen; wählt man Null als Integrationsgrenze, so dürfen nicht beide Funktionen Z^n Funktionen zweiter Art sein, sobald $n > 1$ ist, wie aus den Entwicklungen (1) folgt; im übrigen können die Grenzen beliebig gewählt werden.

Ist $n = 0$, so folgt aus (3) mit Rücksicht auf (1):

$$(4)\begin{cases}\int_0^1 x J^0(rx) J^0(sx)\,dx = \frac{1}{r^2-s^2}\left\{r J^0(s) J^1(r) - s J^0(r) J^1(s)\right\},\\ \int_0^1 x J^0(rx) Y^0(sx)\,dx = \frac{1}{r^2-s^2}\left\{r Y^0(s) J^1(r) - s J^0(r) Y^1(s) + \frac{2}{\pi}\right\},\\ \int_0^1 x Y^0(rx) Y^0(sx)\,dx = \frac{1}{r^2-s^2}\left\{r Y^0(s) Y^1(r) - s Y^0(r) Y^1(s) - \frac{4}{\pi^2}\log\frac{r}{s}\right\}.\end{cases}$$

Von nun an sollen r und s zwei konjugierte komplexe Gröfsen bedeuten; es soll also

$$r = (\varrho, \vartheta) \text{ und } s = (\varrho, -\vartheta)$$

sein; ist alsdann r eine Nullstelle von $Y^0(x)$, so folgt aus (1), dafs auch s eine Nullstelle derselben Funktion ist. Wählt man diese Werte von r und s in der letzten Formel (4), so ergiebt sich:

$$(5)\quad \int_0^1 x Y^0(rx) Y^0(sx)\,dx = -\frac{4}{\pi^2(r^2-s^2)}\cdot\log\frac{r}{s} = -\frac{4\vartheta}{\pi^2\varrho^2\sin 2\vartheta}.$$

Diese Gleichung kann für den Hauptwert von Y^0 nicht bestehen; denn alsdann ist die linke Seite positiv, die rechte dagegen negativ, d. h. *der Hauptwert von $Y^0(x)$ hat keine komplexen Nullstellen.*

Setzt man:

$$r = (\varrho, m\pi + \vartheta),$$

so folgt:

$$\int_0^1 x Y^0(rx) Y^0(sx)\,dx = -\frac{4(m\pi+\vartheta)}{\pi^2\varrho^2\sin 2\vartheta}.$$

Hieraus erkennt man, dafs sich der obige Satz dahin erweitern läfst, dafs $Y^0(x)$ keine komplexen Nullstellen hat, deren Argument in den positiven oder negativen ungeraden Quadranten liegt.

Wie schon erwähnt, darf in (3) für höhere Indices die Grenze Null nicht gewählt werden; um aber wenigstens noch für $Y^1(x)$ zu einer

1) Zur Theorie der Besselschen Funktionen. Math. Ann. **14**. 510—536.

Digitized by Google

brauchbaren Formel zu gelangen, differentiiere man die letzte Formel (4) nach r, so ergiebt sich:

$$-\int_0^1 x^2\, Y^1(rx)\; Y^0(sx)\, dx$$

$$= \frac{1}{r^2 - s^2}\left\{ Y^0(s)\, Y^1(r) + r\, Y^0(s)\, \frac{dY^1(r)}{dr} + s\, Y^1(r)\, Y^1(s) - \frac{4}{\pi^2 r}\right\}$$

$$- \frac{2r}{(r^2 - s^2)^2}\left\{ r\, Y^0(s)\, Y^1(r) - s\, Y^0(r)\, Y^1(s) - \frac{4}{\pi^2}\log\frac{r}{s}\right\}.$$

Ist nun r eine Nullstelle von $Y^1(r)$, so erhält man die einfachere Formel:

$$-\int_0^1 x^2\, Y^1(rx)\; Y^0(sx)\, dx$$

$$= \frac{1}{r^2 - s^2}\left\{ r\, Y^0(s)\, \frac{dY^1(r)}{dr} - \frac{4}{\pi^2 r}\right\} + \frac{2r}{(r^2 - s^2)^2}\left\{ s\, Y^0(r)\, Y^1(s) + \frac{4}{\pi^2}\log\frac{r}{s}\right\}.$$

Differentiiert man diese Gleichung nach s und wählt alsdann s als Nullstelle von $Y^1(x)$, so folgt:

$$\int_0^1 x^3\, Y^1(rx)\; Y^1(sx)\, dx = \frac{2s}{(r^2 - s^2)^2}\left\{ r\, Y^0(s)\, \frac{dY^1(r)}{dr} - \frac{4}{\pi^2 r}\right\}$$

$$+ \frac{2r}{(r^2 - s^2)^2}\left\{ s\, Y^0(r)\, \frac{dY^1(s)}{ds} - \frac{4}{\pi^2 s}\right\} + \frac{32\, rs}{\pi^2 (r^2 - s^2)^3}\log\frac{r}{s}.$$

Aus der Formel:

$$Y^{n-1}(x) = \frac{n}{x}\, Y^n(x) + \frac{d\, Y^n(x)}{dx}$$

ergiebt sich, wenn x eine Nullstelle von $Y^n(x)$ ist:

$$Y^{n-1}(x) = \frac{d\, Y^n(x)}{dx}.$$

Hierdurch wird die letzte Gleichung:

$$(6)\qquad \int_0^1 x^3\, Y^1(rx)\, Y^1(sx)\, dx = \frac{4\, rs}{(r^2 - s^2)^2}\, Y^0(r)\, Y^0(s) - \frac{8\,(r^2 + s^2)}{\pi^2 rs\,(r^2 - s^2)^2}$$

$$+ \frac{32\, rs}{\pi^2 (r^2 - s^2)^3}\log\frac{r}{s}.$$

Sind nun r und s wieder die konjugierten Werte (ϱ, ϑ) und $(\varrho, -\vartheta)$, so ist:

$$rs = \varrho^2, \qquad r^2 + s^2 = 2\varrho^2 \cos 2\vartheta, \qquad r^2 - s^2 = 2i\varrho^2 \sin 2\vartheta,$$

Digitized by Google

und es wird:

$$(7)\quad \int_0^1 x^3\, Y^1(rx)\, Y^1(sx)\, dx = -\frac{1}{\varrho^2 \sin^2 2\vartheta}\cdot Y^0(r)\, Y^0(s) + \frac{4\cos 2\vartheta}{\pi^2 \varrho^4 \sin^2 2\vartheta} - \frac{8\vartheta}{\pi^3 \varrho^4 \sin^3 2\vartheta} = -\frac{1}{\varrho^2 \sin^2 2\vartheta}\, Y^0(r)\, Y^0(s) - \frac{2(4\vartheta - \sin 4\vartheta)}{\pi^2 \varrho^4 \sin^3 2\vartheta}.$$

Diese Gleichung kann für den Hauptwert von $Y^1(x)$ nicht bestehen; die linke Seite ist positiv, die rechte dagegen negativ, d. h. *der Hauptwert von $Y^1(x)$ hat keine komplexen Nullstellen.*

Auch dieser Satz läfst, wie man sofort erkennt, die Erweiterung zu, dafs $Y^1(x)$ keine komplexen Nullstellen hat, deren Argument in den positiven oder negativen ungeraden Quadranten liegt.

Berlin, den 10. Januar 1901.

Digitized by Google

Über einen zahlentheoretischen Satz.

Von E. Landau in Berlin.

Die Zahl $x = 30$ hat die Eigenschaft, dafs die $\varphi(30) = 8$ unter ihr liegenden zu ihr teilerfremden Zahlen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 sämtlich Primzahlen sind, wobei 1 zu den Primzahlen gerechnet wird. Von den Zahlen $x < 30$ haben, wie man sich leicht überzeugt, neun dieselbe Eigenschaft, dafs keine unter x liegende zusammengesetzte Zahl zu x teilerfremd ist; es sind dies

$$x = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24.$$

Oberhalb 30 begegnet man aber zunächst keiner solchen Zahl, so dafs man zu der Vermutung[1]) geführt wird:

Es giebt keine Zahl $x > 30$, für welche die $\varphi(x)$ zu x relativen Primzahlen $< x$ absolute Primzahlen sind.

Wenn x eine Zahl der verlangten Art ist, so geht offenbar jede Primzahl $p < \sqrt{x}$ in x auf; denn sonst wäre ja gegen die Voraussetzung p^2 eine zu x teilerfremde, unterhalb x liegende, aber dennoch zusammengesetzte Zahl. Ist umgekehrt x durch jede Primzahl $p < \sqrt{x}$ teilbar, so ist jede zu x teilerfremde Zahl unter x Primzahl; denn sie könnte nur durch Primzahlen $\geqq \sqrt{x}$ teilbar sein, ist also eine solche Primzahl, da schon das Produkt zweier $> x$ wäre. Also ist der zu beweisende Satz mit dem folgenden identisch:

Keine Zahl $x > 30$ ist durch alle Primzahlen $< \sqrt{x}$ teilbar.

Unter Benutzung des Tschebyschefschen Satzes, dafs für jedes ganze oder gebrochene $a > 1$ zwischen a und $2a$ mindestens eine Primzahl liegt, ist dies sehr leicht beweisbar, am einfachsten wohl auf folgendem, abgesehen von einer geringen Modifikation von Herrn Maillet[2]) angegebenen Wege: Es seien, der Gröfse nach geordnet, $p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$ die Primzahlen $< \sqrt{x}$ und $p_{\varrho+1}$ die erste $\geqq \sqrt{x}$. Da x durch $p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$

1) Vgl. de Rocquigny: Intermédiaire des Mathématiciens **6**, S. 243, 1899.
2) Intermédiaire des Mathématiciens **7**, S. 254, 1900.

Digitized by Google

also durch das Produkt $p_1 p_2 \dots p_\varrho$ teilbar ist, erhält man die Ungleichungen

$$p_1 \dots p_{\varrho-2}\, p_{\varrho-1}\, p_\varrho \leq x < p_{\varrho+1}^2.$$

Nach dem Tschebyschefschen Satz ist aber

$$p_{\varrho+1} < 2p_\varrho < 4p_{\varrho-1},$$

also

$$p_1 \dots p_{\varrho-2}\, p_{\varrho-1}\, p_\varrho < 2p_\varrho \cdot 4p_{\varrho-1},$$

$$p_1 \dots p_{\varrho-2} < 8,$$

somit, da das Produkt der drei ersten Primzahlen bereits 8 übersteigt,

$$p_{\varrho-2} \leqq 3, \quad p_{\varrho-1} \leqq 5, \quad p_\varrho \leqq 7, \quad p_{\varrho+1} \leqq 11,$$

$$x < p_{\varrho+1}^2 < 121.$$

Zwischen 30 und 121 giebt es aber keine Zahl der verlangten Art; denn aus $x > 30$ folgt successive: x ist durch 2, 3, 5, also durch 30 teilbar, also $\geqq 60$, folglich wegen $7^2 < 60$ durch 7, also durch 210 teilbar, kann daher nicht < 121 sein, womit die Behauptung allgemein bewiesen ist, da ja nach dem Obigen höchstens Zahlen < 121 das Verlangte leisten könnten.

Aber der Tschebyschefsche Satz erfordert zum Beweise seinerseits sehr umständliche Entwickelungen, wie alles auf die Verteilung der Primzahlen Bezügliche; er war auch zuerst von Bertrand vermutet und als Postulat angewendet worden, ehe Tschebyschef seinen Beweis fand. Ein direkter Beweis des am Anfang ausgesprochenen Satzes ist bisher nicht geliefert worden; der Zweck dieser Arbeit ist, einen solchen zu führen.

Folgender Umstand ermöglicht einen derartigen Nachweis. Während die Anzahl der zwischen zwei Grenzen gelegenen Primzahlen mit diesen Grenzen sich äußerst unregelmäßig ändert, kann man mit großer Genauigkeit die Anzahl derjenigen in einem Intervalle $(t \dots u)$ gelegenen Zahlen abschätzen, welche durch kein von 1 verschiedenes Quadrat teilbar, also nur aus verschiedenen Primfaktoren zusammengesetzt sind. Ihre genaue Anzahl ist bekanntlich[1])

$$\sum_{k=1}^{[\sqrt{u}]} \mu(k) \left(\left[\frac{u}{k^2}\right] - \left[\frac{t}{k^2}\right] \right) = \frac{6}{\pi^2}(u-t) + R,$$

wo der Fehler R höchstens von der Größenordnung $\sqrt{u}$ ist. Doch

1) Hierbei wird die untere Grenze t nicht zum Intervall gerechnet. Unter $[y]$ wird, wie gewöhnlich, die größte nicht oberhalb y gelegene ganze Zahl verstanden.

Digitized by Google

soll hiervon kein Gebrauch gemacht werden; es genügt vielmehr für den gegenwärtigen Zweck, eine untere Grenze für die Anzahl der quadratfreien Zahlen zwischen $\frac{5}{8}t$ (excl.) und t (incl.) zu finden, speziell nachzuweisen, dafs jene Anzahl von einem angebbaren t ab gröfser als 1 ist. Diese Hilfsbetrachtung, deren Zweck sich später ergeben wird, soll vorweggenommen werden, um den Gang des nachfolgenden Beweises nicht unterbrechen zu müssen.

Jede nicht quadratfreie Zahl zwischen $\frac{5}{8}t$ und t ist durch mindestens eine der Zahlen $2^2, 3^2, 4^2, \ldots, [\sqrt{t}]^2$ teilbar; zieht man also von der Anzahl $[t]-[\frac{5}{8}t]$ der ganzen Zahlen $\frac{5}{8}t$ und t die Anzahl der zwischen $\frac{5}{8}t$ und t gelegenen Vielfachen jedes ν^2 ($\nu = 2, 3, 4, \ldots, [\sqrt{t}]$) ab, so verkleinert man die Anzahl Q der quadratfreien Zahlen; denn für jede nicht quadratfreie Zahl ist ja mindestens eine Einheit (nämlich die Anzahl der quadratischen Teiler der Zahl) von der Gesamtmenge der Zahlen des Intervalles abgezogen worden. Die Anzahl der Vielfachen von ν^2 zwischen $\frac{5}{8}t$ und t ist aber

$$\left[\frac{t}{\nu^2}\right]-\left[\frac{\frac{5}{8}t}{\nu^2}\right]<\frac{t}{\nu^2}-\left(\frac{\frac{5}{8}t}{\nu^2}-1\right)=\frac{\frac{3}{8}t}{\nu^2}+1;$$

also erhält man

$$\begin{aligned}
Q &> [t]-[\tfrac{5}{8}t]-\sum_{\nu=2}^{[\sqrt{t}]}\left(\frac{\frac{3}{8}t}{\nu^2}+1\right)\\
&> t-1-\tfrac{5}{8}t-\tfrac{3}{8}t\sum_{\nu=2}^{[\sqrt{t}]}\frac{1}{\nu^2}-([\sqrt{t}]-1)\\
&> \tfrac{3}{8}t-\tfrac{3}{8}t\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}-\sqrt{t}=\tfrac{3}{8}t-\tfrac{3}{8}t\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)-\sqrt{t}\\
&> \tfrac{3}{8}t-\tfrac{3}{8}t\,(\tfrac{10}{6}-1)-\sqrt{t}=\frac{t}{8}-\sqrt{t},
\end{aligned}$$

also >1 für $t\geqq 81$, da es für $t=81$ der Fall ist, und da für $t\geqq 81$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{8}-\sqrt{t}\right)=\tfrac{1}{8}-\frac{1}{2\sqrt{t}}\geqq\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{18}>0.$$

Ein Blick auf die Zahlen <81 zeigt, dafs bereits von $t=11$ an zwischen $\frac{5}{8}t$ und t mehr als eine quadratfreie Zahl liegt.

Nach dieser Vorbereitung gehe ich zum Beweise des Satzes über. Aus der Annahme, dafs für ein $x>30$ die relativen Primzahlen zu x, die unter x liegen, sämtlich Primzahlen sind, ist ein Widerspruch herzuleiten. Zunächst läfst sich zeigen, dafs ohne Beschränkung der

Digitized by Google

Allgemeinheit x als quadratfrei vorausgesetzt werden kann. Anderenfalls ist nämlich das Produkt ξ der verschiedenen Primfaktoren von x auch so beschaffen,

1) dafs $\xi > 30$ ist; denn, wie schon auf Seite 139 bemerkt wurde, wäre x durch 2, 3, 5, 7 teilbar, ξ also auch;

2) dafs die unter ξ liegenden zu ξ teilerfremden Zahlen Primzahlen sind; denn sie sind erstens $< \xi \leq x$ und zweitens zu jedem Primfaktor von ξ, also zu jedem Primfaktor von x, folglich zu x teilerfremd, daher Primzahlen.

ξ würde also mit x den Voraussetzungen genügen; aus dem nachher zu erbringenden Nachweise der Nichtexistenz eines $\xi > 30$ folgt daher, dafs kein $x > 30$ existiert, so dafs man berechtigt ist, x gleich selbst als quadratfrei anzunehmen.

x ist durch jede Primzahl $< \sqrt{x}$ teilbar, also durch jede quadratfreie Zahl unter $\sqrt{x}$.[1]) d sei eine solche, dann ist $\frac{x}{d}$ eine ganze Zahl zwischen $\sqrt{x}$ und x, also $\frac{x}{d} - d$ eine ganze Zahl zwischen 1 und $x - 1$. Dieselbe ist zu x teilerfremd; denn ein gemeinsamer Primfaktor p von x und $\frac{x}{d} - d$ würde, wie sich successive ergiebt, $x - d^2$, d^2, d, $\frac{x}{d}$ teilen, während er thatsächlich in $\frac{x}{d}$ nicht mehr vorkommt, da x jeden Primfaktor nur einmal enthält. Die Zahl $\frac{x}{d} - d$ liegt also zwischen 1 und $x - 1$ und ist relativ prim zu x, sie ist also nach Voraussetzung Primzahl (1 zu den Primzahlen gerechnet). Der Ausdruck $\frac{x}{d} - d$, als Funktion von d betrachtet, nimmt für $d < \sqrt{x}$ mit wachsendem d ab, da der Minuend $\frac{x}{d}$ abnimmt und der Subtrahend d wächst, und zwar erreicht er für $d = \sqrt{x}$ den Wert 0; nun soll aber d eine ganze Zahl und sogar ein Teiler von x sein; der Ausdruck $\frac{x}{d} - d$ erreicht also thatsächlich seinen kleinsten Wert für den zunächst unter $\sqrt{x}$ liegenden Teiler von x, also für die gröfste quadratfreie Zahl unter $\sqrt{x}$. Dieser kleinste Wert ist eine ganze Zahl ≥ 1. Der zweitkleinste Wert, auf den es allein ankommt, ist ≥ 2 und wird für die zweitgröfste quadratfreie Zahl d unter $\sqrt{x}$ erreicht. Dieselbe liegt aber, wie oben bewiesen wurde, für $t = \sqrt{x} \geq 11$, $x \geq 121$ oberhalb $\frac{5}{8}\sqrt{x}$. Für diesen zwischen $\frac{5}{8}\sqrt{x}$ und $\sqrt{x}$ gelegenen Teiler d

1) Da x quadratfrei ist, ist $\sqrt{x}$ für $x > 1$ irrational.

Digitized by Google

von x ist aber die nach dem Obigen nicht in x aufgehende und von 1 verschiedene Primzahl

$$\frac{x}{d} - d < \frac{x}{\frac{5}{8}\sqrt{x}} - \frac{5}{8}\sqrt{x} = (\tfrac{8}{5} - \tfrac{5}{8})\sqrt{x} = \tfrac{39}{40}\sqrt{x} < \sqrt{x}.$$

Es gäbe also oberhalb 1 und unterhalb $\sqrt{x}$ eine Primzahl, die x nicht teilt, gegen die Voraussetzung. Für $x \geq 121$ entsteht also ein Widerspruch; es giebt also oberhalb 121 keine den Annahmen entsprechende Zahl; da es auch zwischen 30 und 121 keine giebt, ist der Satz bewiesen.

Berlin, den 14. Dezember 1900.

Digitized by Google

Zur neueren Dreiecksgeometrie.

Von F. Caspary in Charlottenburg.

In den Untersuchungen über die neuere Dreiecksgeometrie wird dem Lemoineschen Punkte und den beiden Brocardschen Punkten eine besondere Bedeutung zugewiesen. Zwischen diesen und gewissen anderen Punkten des Dreiecks bestehen merkwürdige und einfache Beziehungen, welche den Gegenstand der neueren Dreiecksgeometrie bilden und unter einheitlichen Gesichtspunkten von den Herren J. Neuberg[1]) und A. Emmerich[2]) dargestellt worden sind.

Da geometrische Beziehungen mit Hilfe der Grafsmannschen Methoden zu Identitäten führen, welche in den verschiedensten Gebieten der Mathematik und namentlich in der Theorie der Thetafunktionen erfolgreich verwendet werden können, habe ich vor einigen Jahren versucht, die neuere Dreiecksgeometrie mit den Grafsmannschen Methoden zu behandeln. Im Verlaufe dieser Untersuchungen bin ich zu dem überraschenden Ergebnis geführt worden, dafs ein grofser Teil der Sätze der neueren Dreiecksgeometrie erhalten bleibt, wenn man den Lemoineschen Punkt durch einen ganz beliebigen ersetzt, und dafs die so hervorgehenden Sätze eben so einfach und übersichtlich sind, wie die entsprechenden speziellen.

Von meinen Untersuchungen und deren Ergebnissen habe ich im Sommer 1899 meinem Freunde, Herrn E. Jahnke, Kenntnis gegeben, der dieselben in drei Abhandlungen weiter geführt hat, von denen die eine als wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht der 8. Realschule zu Berlin, Ostern 1900, Programm Nr. 124 und die beiden anderen im 123. Bande des Journals für reine und angewandte Mathematik bereits veröffentlicht sind.

Nachdem ich in einem an Herrn E. Lemoine gerichteten Briefe (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. XIX, février 1900

1) Rouché et de Comberousse: Traité de Géométrie. 6ième éd. Paris 1891 p. 429—485. Note III. Sur la Géométrie récente du triangle.

2) Die Brocardschen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks. Berlin 1891, Georg Reimer.

Digitized by Google

p. 75) einige der von mir gefundenen Sätze mitgeteilt, hat Herr L. Ripert meine Untersuchungen aufgenommen und in bemerkenswerter Weise vervollständigt. Herr Ripert hat die Güte gehabt, mir in zwei Schreiben vom 1. September und 28. Oktober 1900 von seinen wichtigen und schönen Ergebnissen, die demnächst in diesem Archiv zur Veröffentlichung gelangen werden, Kenntnis zu geben.

Im folgenden will ich mir erlauben, einen Teil seiner und meiner Theoreme einheitlich mit den Grafsmannschen Methoden zu beweisen. Zu dem Zwecke schicke ich in § 1 eine knappe Darlegung derselben voraus, aber nur in dem Umfange, in welchem ich von ihnen in der vorliegenden Arbeit Gebrauch mache, und verweise für ein eingehenderes Studium auf meine im Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 92, 95, 100; im Bulletin des sciences mathématiques, 2e série, t. XI und t. XIII, sowie neuerdings in den Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. XVII und t. XVIII veröffentlichten Abhandlungen.

Die im folgenden eingeführten Punkte B_1, B_2, B_3; D_2, D_3 (§ 2), R (§ 3); O, H, N (§ 4); C_1, C_2, C_3 (§ 5) gehen in dem Sonderfalle, dafs der beliebige Punkt X der Lemoinesche Punkt wird, bez. über in die Ecken des *ersten* Brocardschen Dreiecks; die beiden Brocardschen Punkte; den Steinerschen Punkt; den Mittelpunkt des um das Dreieck $A_1A_2A_3$ beschriebenen Kreises; den Höhenschnittpunkt; den Tarryschen Punkt; die Ecken des *zweiten* Brocardschen Dreiecks. Aufser diesen Punkten werden noch andere, wie die mit S, W, Z, Y, T bezeichneten, eingeführt und ihre gegenseitigen Beziehungen entwickelt. Dies geschieht, zur Vereinfachung der Rechnungen, unter möglichster Verwendung von Übertragungsprinzipien, die überdies aus den vorhandenen Punkten neue hervorgehen lassen. Die Aufstellung der Eigenschaften und Abhängigkeiten dieser Punkte sowie ihre Erzeugung bildet den Gegenstand der nachfolgenden Abhandlung.

§ 1.

1. Es seien A_1, A_2, A_3 die Ecken eines Bezugsdreiecks und X ein beliebiger Punkt in der Ebene desselben. Stellt man den Punkt X durch den Ausdruck

$$(x_1 + x_2 + x_3)\, X = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3$$

dar, so bedeuten die Koeffizienten x_1, x_2, x_3 die Flächenkoordinaten desselben; d. h. x_1, x_2, x_3 sind den Flächeninhalten der Dreiecke XA_2A_3, XA_3A_1, XA_1A_2 und die Summe $x_1 + x_2 + x_3$ ist dem Flächeninhalte des Bezugsdreiecks $A_1A_2A_3$ proportional.

Digitized by Google

2. Geht der Punkt X in den Schwerpunkt G des Dreiecks $A_1A_2A_3$ über, so sind die Dreiecke GA_2A_3, GA_3A_1, GA_1A_2 flächengleich. Demgemäfs wird *der Schwerpunkt des Dreiecks* $A_1A_2A_3$ durch

$$3\,G = A_1 + A_2 + A_3$$

dargestellt.

3. Liegt der Punkt X auf einer Dreiecksseite, etwa als Punkt O auf A_1A_2, so ist der Inhalt des Dreiecks OA_1A_2 gleich Null, während die Dreiecke $A_1A_2A_3$, OA_2A_3, OA_3A_1 bez. den Längen $\overline{A_1A_2}$, $\overline{OA_2}$, $\overline{A_1O}$ proportional sind. Daher wird *der auf* A_1A_2 *liegende Punkt* O durch

$$\overline{A_1A_2}\cdot O = \overline{OA_2}\cdot A_1 + \overline{A_1O}\cdot A_2$$

dargestellt. In dem besonderen Falle, dafs O in den Mittelpunkt M von A_1A_2 rückt, wird $\overline{A_1O} = \overline{OA_2}$, und daher erhält man als *Ausdruck für den Mittelpunkt* M *von* A_1A_2

$$2\,M = A_1 + A_2.$$

4. Da $\overline{A_1O} + \overline{OA_2} = \overline{A_1A_2}$ ist, nimmt der Ausdruck

$$\overline{A_1A_2}\cdot O = \overline{OA_2}\cdot A_1 + \overline{A_1O}\cdot A_2$$

auch die Form

$$\overline{A_1O}\cdot(O - A_2) = \overline{OA_2}\,(A_1 - O)$$

an. Differenzen von der Form $O - A_2$ stellen nach *Richtung, Richtungssinn* und *Länge Vektoren*[1]) dar; $O - A_2$ einen Vektor, der in A_2 beginnt und bei O endet. Wenn daher O, A, P, B vier Punkte bedeuten, die nicht in einer Geraden liegen, so sagt die Gleichung

$$O - A = P - B$$

aus, dafs die Strecken AO und BP parallel, gleich gerichtet und gleich lang sind. Ebenso sagt die allgemeine Gleichung

$$O - A = \lambda\,(P - B)$$

aus: 1. dafs die Strecken AO und BP parallel, 2. dafs sie gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, je nachdem λ positiv oder negativ ist, 3. dafs die Länge der Strecke AO sich zur Länge der Strecke BP wie $\lambda : 1$ verhält.

5. Es seien K und L durch

$$\begin{cases} (\alpha + \beta)\,K = \alpha A + \beta B, \\ (\alpha - \beta)\,L = \alpha A - \beta B \end{cases}$$

---

1) Vgl. meine Abhandlung in den Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, **18**, 248.

Digitized by Google

definierte Punkte, dann folgt

$$\begin{cases} \alpha\,(K-A) = \beta\,(B-K), \\ \alpha\,(L-A) = \beta\,(L-B). \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich für die Strecken AK, KB, AL, BL

$$\begin{cases} \alpha \cdot AK = \beta \cdot KB, \\ \alpha \cdot AL = \beta \cdot BL \end{cases}$$

oder

$$AK : KB = AL : BL.$$

Aus dieser Proportion ergiebt sich, dafs die vier Punkte A, K, B, L vier harmonische Punkte sind. Daher folgt:

Die beiden simultanen Gleichungen

$$\begin{cases} (\alpha+\beta)\,K = \alpha A + \beta B, \\ (\alpha-\beta)\,L = \alpha A - \beta B \end{cases}$$

sagen aus, dafs die vier Punkte A, B, K, L auf einer Geraden liegen und vier harmonische Punkte sind. Zugeordnet sind A, B und K, L.

6. Der in Nr. **1.** aufgestellte Ausdruck für X läfst sich dadurch vereinfachen, dafs man ihn durch $x_1 + x_2 + x_3$ dividiert. Wenn man diese vereinfachte Form für die drei Punkte P, Q, R benutzt, so kann man setzen:

$$\begin{cases} P = p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 & (p_1 + p_2 + p_3 = 1), \\ Q = q_1 A_1 + q_2 A_2 + q_3 A_3 & (q_1 + q_2 + q_3 = 1), \\ R = r_1 A_1 + r_2 A_2 + r_3 A_3 & (r_1 + r_2 + r_3 = 1). \end{cases}$$

Multipliziert man P mit Q und ersetzt die Produkte A_iA_i, A_iA_k $(i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k)$ durch die Ausdrücke $[A_iA_i]$, $[A_iA_k]$, die man den Bedingungen

$$[A_iA_i] = 0, \quad [A_iA_k] = -[A_kA_i]$$

unterwirft, so erhält man, wenn man mit $[PQ]$ den auf diese Weise aus PQ hervorgehenden Ausdruck bezeichnet:

$$[PQ] = g_{23}[A_2A_3] + g_{31}[A_3A_1] + g_{12}[A_1A_2],$$

wobei zur Abkürzung

$$g_{ik} = p_iq_k - p_kq_i \qquad (i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k)$$

gesetzt ist.

In derselben Weise, wie man aus dem Produkt PQ den Ausdruck $[PQ]$ erhält, gelangt man von dem Produkt PQR zu dem Ausdruck $[PQR]$, und zwar findet man

$$[PQR] = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} [A_1A_2A_3].$$

7. Die Ausdrücke $[PQ]$ und $[PQR]$ werden *äufsere Produkte* und der Algorithmus, durch den sie hervorgehen, *äufsere Multiplikation* ge-

Digitized by Google

nannt. Das die äufsere Multiplikation charakterisierende Funktionszeichen ist die *eckige Klammer:* [ ].

Die Koeffizienten g_{ik}, die auf der rechten Seite des Ausdruckes für $[PQ]$ vorkommen, sind den Längen der Lote proportional, die von den Ecken des Bezugsdreiecks auf die Gerade PQ gefällt werden können, also den Koordinaten dieser Geraden. *Daher stellt* $[PQ]$ *die durch die Punkte* P *und* Q *gehende Gerade dar. Ebenso stellt das äufsere Produkt* $[PQR]$ *den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks* PQR *dar.* Ist dieser Flächeninhalt gleich Null, so liegen die Punkte P, Q, R in einer Geraden; also *ist* $[PQR] = 0$ *die Bedingung, dafs die drei Punkte* P, Q, R *auf einer Geraden gelegen sind.* In diesem Falle besteht nach Nr. **3.** zwischen den Punkten P, Q, R eine lineare Beziehung von der Form

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0,$$

und zwischen den Koeffizienten α, β, γ die Beziehung

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

8. Ebenso wie das äufsere Produkt zweier Punkte die durch sie hindurchgehende Gerade darstellt, stellt reciprok das äufsere Produkt zweier Geraden den gemeinschaftlichen Schnittpunkt und das äufsere Produkt dreier Geraden den Flächeninhalt des von den drei Geraden umschlossenen Dreiecks dar. Ist dieser Flächeninhalt gleich Null, so gehen die drei Geraden durch einen und denselben Punkt; *es stellt* daher, wenn p, q, r drei gerade Linien bedeuten, $[pqr] = 0$ *die Bedingung dar, dafs die drei Geraden* p, q, r *einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt besitzen.* In diesem Falle besteht zwischen den Geraden p, q, r eine lineare Beziehung von der Form

$$\pi p + \varkappa q + \varrho r = 0,$$

wobei

$$\pi + \varkappa + \varrho = 0$$

ist.

9. Sind die Geraden in der Form gegeben, wie $[PQ]$ in Nr. 6., so bedarf es zur Aufstellung ihrer äufseren Produkte noch der folgenden Bedingungsgleichungen

$$\begin{cases} [A_3A_1\ A_1A_2] = A_1 \cdot [A_1A_2A_3], \\ [A_1A_2\ A_2A_3] = A_2 \cdot [A_1A_2A_3], \\ [A_2A_3\ A_3A_1] = A_3 \cdot [A_1A_2A_3]. \end{cases}$$

Dabei ist zur Vereinfachung der Schreibweise statt $[[A_iA_k][A_kA_l]]$, mit Weglassung der inneren Klammern, $[A_iA_k\ A_kA_l]$ geschrieben; von dieser vereinfachten Schreibweise werde ich stets bei denjenigen äufseren Produkten Gebrauch machen, bei denen die einzelnen Faktoren selber äufsere Produkte sind.

Digitized by Google

§ 2.

10. Vertauscht man in dem Ausdrucke für den beliebigen Punkt X

$$(1) \qquad x X = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 \qquad (x = x_1 + x_2 + x_3)$$

der Reihe nach x_2 und x_3, x_3 und x_1, x_1 und x_2, so möge der Punkt X in die Punkte B_1, B_2, B_3 übergehen. Für diese Punkte findet man aus (1) die Ausdrücke:

$$(2) \qquad \begin{cases} x B_1 = x_1 A_1 + x_3 A_2 + x_2 A_3, \\ x B_2 = x_3 A_1 + x_2 A_2 + x_1 A_3, \\ x B_3 = x_2 A_1 + x_1 A_2 + x_3 A_3. \end{cases}$$

Bildet man aus (2) die äufseren Produkte $[A_1 B_i]$, $[A_2 B_k]$, $[A_3 B_l]$, wobei die Indices i, k, l der Reihe nach die Werte 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2 annehmen, so findet man, dafs das äufsere Produkt dieser drei äufseren Produkte verschwindet. Es schneiden sich daher nach Nr. 8. die drei Geraden $A_1 B_i$, $A_2 B_k$, $A_3 B_l$ in *einem* Punkte D_i. Diese drei Punkte D_1, D_2, D_3 sind durch folgende Ausdrücke bestimmt:

$$(3) \qquad \begin{cases} \delta D_1 = x_2 x_3 A_1 + x_3 x_1 A_2 + x_1 x_2 A_3, \\ \delta D_2 = x_1 x_2 A_1 + x_2 x_3 A_2 + x_3 x_1 A_3, \\ \delta D_3 = x_3 x_1 A_1 + x_1 x_2 A_2 + x_2 x_3 A_3. \end{cases}$$

11. Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt:

$$(4) \qquad \begin{cases} \delta D_1 = \omega_1 A_1 + x x_1 B_1, \\ \qquad = \omega_2 A_2 + x x_2 B_2, \\ \qquad = \omega_3 A_3 + x x_3 B_3; \\ \delta D_2 = \omega_3 A_1 + x x_3 B_2, \\ \qquad = \omega_1 A_2 + x x_1 B_3, \\ \qquad = \omega_2 A_3 + x x_2 B_1; \\ \delta D_3 = \omega_2 A_1 + x x_2 B_3, \\ \qquad = \omega_3 A_2 + x x_3 B_1, \\ \qquad = \omega_1 A_3 + x x_1 B_2, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung

$$(5) \qquad \delta = x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2$$

und

$$(6) \qquad \omega_i = x_k x_l - x_i^2$$

gesetzt ist.

Addiert man die Gleichungssysteme (2) und (3), so erhält man unter Berücksichtigung von Nr. 2.:

$$(7) \qquad B_1 + B_2 + B_3 = D_1 + D_2 + D_3 = A_1 + A_2 + A_3 = 3\,G,$$

und durch Addition der Gleichung (1) zu jeder der Gleichungen (2)

$$(8) \qquad x(X + B_i) = 3(x_k + x_l)\,G - (x_k + x_l - 2x_i)\,A_i,$$

$$(i, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2).$$

Digitized by Google

Subtrahiert man die Gleichung (1) von jeder Gleichung (2), so ergiebt sich

$$x\,(B_i - X) = (x_k - x_l)\,(A_l - A_k). \tag{9}$$

12. Die Durchschnittspunkte $X^{(i)}$ der Transversalen $A_i X$ mit den Dreiecksseiten $A_k A_l$ sind durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\left\{\begin{array}{l} (x_2 + x_3)\,X^{(1)} = x\,X - x_1 A_1 = x_2 A_2 + x_3 A_3, \\ (x_3 + x_1)\,X^{(2)} = x\,X - x_2 A_2 = x_3 A_3 + x_1 A_1, \\ (x_1 + x_2)\,X^{(3)} = x\,X - x_3 A_3 = x_1 A_1 + x_2 A_2, \end{array}\right. \tag{10}$$

aus denen sich durch äufsere Multiplikation ergiebt:

$$(x_2 + x_3)\,(x_3 + x_1)\,(x_1 + x_2)\,[X^{(1)} X^{(2)} X^{(3)}] = 2 x_1 x_2 x_3\,[A_1 A_2 A_3]. \tag{11}$$

13. Bestimmt man auf der Dreiecksseite $A_2 A_3$ den Punkt $B_1^{(1)}$ durch die Festsetzung $X^{(1)} A_2 = A_3 B_1^{(1)}$, sowie die Punkte $B_2^{(1)}$ und $B_3^{(1)}$ als Schnittpunkte von $A_2 A_3$ mit den Parallelen, die durch $X^{(3)}$ zu $A_3 A_1$ und durch $X^{(2)}$ zu $A_1 A_2$ gezogen sind, so findet man

$$\left\{\begin{array}{l} (x_2 + x_3)\,B_1^{(1)} = x_3 A_3 + x_2 A_2, \\ (x_1 + x_2)\,B_2^{(1)} = x_2 A_2 + x_1 A_1, \\ (x_3 + x_1)\,B_3^{(1)} = x_1 A_2 + x_3 A_3, \end{array}\right. \tag{12}$$

und durch cyklische Permutation:

$$\left\{\begin{array}{l} (x_3 + x_1)\,B_2^{(2)} = x_1 A_3 + x_3 A_1, \\ (x_2 + x_3)\,B_3^{(2)} = x_3 A_3 + x_2 A_1, \\ (x_1 + x_2)\,B_1^{(2)} = x_2 A_3 + x_1 A_1; \end{array}\right. \tag{13}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (x_1 + x_2)\,B_3^{(3)} = x_2 A_1 + x_1 A_2, \\ (x_3 + x_1)\,B_1^{(3)} = x_1 A_1 + x_3 A_2, \\ (x_2 + x_3)\,B_2^{(3)} = x_3 A_1 + x_2 A_2. \end{array}\right. \tag{14}$$

14. Wählt man aus den Gleichungssystemen (12), (13), (14) je die drei Gleichungen aus, die auf der linken Seite den nämlichen Faktor $x_2 + x_3$, oder $x_3 + x_1$, oder $x_1 + x_2$ aufweisen, und addiert sie, so erhält man

$$\left\{\begin{array}{l} B_1^{(1)} + B_3^{(2)} + B_2^{(3)} = B_2^{(1)} + B_1^{(2)} + B_3^{(3)} = B_3^{(1)} + B_2^{(2)} + B_1^{(3)} \\ = A_1 + A_2 + A_3 = 3\,G. \end{array}\right. \tag{15}$$

Ebenso ergeben die Gleichungssysteme (12), (13), (14) durch äufsere Multiplication

$$\left\{\begin{array}{l} [B_1^{(1)} B_2^{(2)} B_3^{(3)}] = [B_2^{(1)} B_3^{(2)} B_1^{(3)}] = [B_3^{(1)} B_1^{(2)} B_2^{(3)}] \\ = \dfrac{2 x_1 x_2 x_3}{(x_2 + x_3)\,(x_3 + x_1)\,(x_1 + x_2)}\,[A_1 A_2 A_3] \end{array}\right. \tag{16}$$

Digitized by Google

und in Verbindung mit den Gleichungen (4):

$$(17)\quad \begin{cases} \delta D_1 = x_2x_3A_1 + x_1(x_2+x_3)B_1^{(1)}, \\ \quad = x_3x_1A_2 + x_2(x_3+x_1)B_2^{(2)}, \\ \quad = x_1x_2A_3 + x_3(x_1+x_2)B_3^{(3)}; \\ \delta D_2 = x_1x_2A_1 + x_3(x_1+x_2)B_2^{(1)}, \\ \quad = x_2x_3A_2 + x_1(x_2+x_3)B_3^{(2)}, \\ \quad = x_3x_1A_3 + x_2(x_3+x_1)B_1^{(3)}; \\ \delta D_3 = x_3x_1A_1 + x_2(x_3+x_1)B_3^{(1)}, \\ \quad = x_1x_2A_2 + x_3(x_1+x_2)B_1^{(2)}, \\ \quad = x_2x_3A_3 + x_1(x_2+x_3)B_2^{(3)}. \end{cases}$$

15. Bezeichnet man die Längen der Dreiecksseiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, bezw. durch a_1, a_2, a_3 und setzt $x_1 = a_1^2$, $x_2 = a_2^2$, $x_3 = a_3^2$, so geht der beliebige Punkt X in denjenigen über, der 1847 von Grebe[1]) aufgestellt und seit 1873 von Herrn Lemoine[2]) zum Ausgangspunkte seiner wichtigen Untersuchungen gemacht worden ist. Der Punkt $a_1^2A_1 + a_2^2A_2 + a_3^2A_3$ wird daher in Deutschland[3]) als Grebescher Punkt, in Frankreich[4]) als Lemoinescher Punkt bezeichnet.

16. Die in diesem Paragraphen gegebenen Entwickelungen lassen sich in folgende Theoreme zusammenfassen:

I. In der Ebene eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ sei ein beliebiger Punkt X gegeben und die Schnittpunkte der Transversalen A_1X, A_2X, A_3X bez. mit den Dreiecksseiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 seien durch $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$ bezeichnet. Es sei ferner auf der Dreiecksseite A_2A_3 der Punkt $B_1^{(1)}$ durch die Festsetzung $X^{(1)}A_2 = A_3B_1^{(1)}$ bestimmt, sowie die beiden weiteren Punkte $B_2^{(1)}$ und $B_3^{(1)}$ als Schnittpunkte von A_2A_3 mit den Parallelen, die durch $X^{(3)}$ zu A_3A_1 und durch $X^{(2)}$ zu A_1A_2 gezogen sind. Endlich mögen aus $B_1^{(1)}$, $B_2^{(1)}$, $B_3^{(1)}$ durch cyklische Permutation die Punkte $B_2^{(2)}$, $B_3^{(2)}$, $B_1^{(2)}$; $B_3^{(3)}$, $B_1^{(3)}$, $B_2^{(3)}$ hervorgehen. Alsdann schneiden sich die Geraden $A_1B_i^{(1)}$, $A_2B_i^{(2)}$, $A_3B_i^{(3)}$ im Punkte B_i, wobei der Index i die Werte 1, 2, 3 annimmt.

---

1) Dieses Archiv, **9**, 250.

2) E. Lemoine: Sur quelques propriétés d'un point remarquable du triangle (Association Française pour l'avancement des sciences, Congrès de Lyon 1873). Betreffs der Punkte D_2 und D_3 vgl. H. Brocard: Nouv. Ann. (2e série) **14** question 1166, 1879 und Educational Times **67**, 89. Brocard: Question 13420. Fortschritte der Mathematik **28**, 1897, S. 454.

3) Emmerich: l. c. Vorwort. IV. Fussnote.

4) Neuberg: l. c. p. 453 und Mémoire sur le tétraèdre. Tome XXXVII des Mémoires couronnés et autres Mémoires, publiés par l'Académie royale de Belgique. 1884. No. 1.

Digitized by Google

II. Die Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ sind dreifach perspektiv, und zwar schneiden sich die Geraden A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 im Punkte D_1, die Geraden A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 im Punkte D_2, und die Geraden A_1B_3, A_2B_1, A_3B_2 im Punkte D_3.

III. Die Punkte D_1, D_2, D_3 sind auch die Perspektivitätszentra des Dreiecks A_1, A_2, A_3 und bez. der Dreiecke $B_1^{(1)}B_2^{(2)}B_3^{(3)}$, $B_1^{(1)}B_3^{(2)}B_1^{(3)}$, $B_3^{(1)}B_1^{(2)}B_2^{(3)}$.

IV. Die Dreiecke $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $B_1^{(1)}B_3^{(2)}B_2^{(3)}$, $B_2^{(1)}B_1^{(2)}B_3^{(3)}$, $B_3^{(1)}B_2^{(2)}B_1^{(3)}$, $D_1D_2D_3$ besitzen den nämlichen Schwerpunkt G.

V. Die Dreiecke $B_1^{(1)}B_2^{(2)}B_3^{(3)}$, $B_3^{(1)}B_2^{(2)}B_1^{(3)}$, $B_3^{(1)}B_1^{(2)}B_2^{(3)}$ haben denselben Flächeninhalt wie das Dreieck $X^{(1)}X^{(2)}X^{(3)}$.

VI. Die Geraden XB_i sind den Dreiecksseiten A_kA_i parallel; oder mit anderen Worten:

VIa. Zieht man durch die Punkte B_1, B_2, B_3 Parallelen, bez. zu den Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, so schneiden sich dieselben in einem Punkte, nämlich in X.

VII. Die Mittelpunkte der Strecken XB_i liegen bez. auf den Geraden A_iG.

Aus Theorem *II* folgt unmittelbar das Gleichungssystem:

$$(18)\qquad \begin{cases} [A_1B_1D_1]=0,\ [A_2B_2D_1]=0,\ [A_3B_3D_1]=0, \\ [A_1B_2D_2]=0,\ [A_2B_3D_2]=0,\ [A_3B_1D_2]=0, \\ [A_1B_3D_3]=0,\ [A_2B_1D_3]=0,\ [A_3B_2D_3]=0. \end{cases}$$

Fafst man die in derselben Vertikale stehenden Gleichungen zusammen, so folgt:

VIII. Die Geraden B_1D_1, B_2D_2, B_3D_3 schneiden sich in A_1, die Geraden B_2D_1, B_3D_2, B_1D_3 schneiden sich in A_2, die Geraden B_3B_1, B_1D_2, B_2B_3 schneiden sich in A_3; folglich sind die Dreiecke $B_1B_2B_3$ und $D_1D_2D_3$ dreifach perspektiv, und die Punkte A_1, A_2, A_3 bilden die drei Perspektivitätszentra.

Das Gleichungssystem (18) geht in sich selbst über, wenn man A_i und B_i, aber gleichzeitig auch D_2 und D_3 mit einander vertauscht. Daher folgt aus VIII:

IX. Die Geraden A_1D_1, A_2D_3, A_3D_2 schneiden sich in B_1, die Geraden A_2D_1, A_3D_3, A_1D_2 schneiden sich in B_2, die Geraden A_3D_1, A_1D_3, A_2D_2 schneiden sich in B_3; folglich sind die Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $D_1D_3D_2$ dreifach perspektiv und die Punkte B_1, B_2, B_3 bilden die drei Perspektivitätszentra.[1])

1) Vgl. E. Jahnke: Programm. Theorem II. S. 9.

Digitized by Google

§ 3.

17. Kehrt man das Gleichungssystem

$$(2)\qquad \begin{cases} xB_1 = x_1A_1 + x_3A_2 + x_2A_3, \\ xB_2 = x_3A_1 + x_2A_2 + x_1A_3, \\ xB_3 = x_2A_1 + x_1A_2 + x_3A_3 \end{cases} \qquad (x = x_1 + x_2 + x_3)$$

um, so folgt

$$(19)\qquad \begin{cases} \omega A_1 = \omega_1B_1 + \omega_3B_2 + \omega_2B_3, \\ \omega A_2 = \omega_3B_1 + \omega_2B_2 + \omega_1B_3, \\ \omega A_3 = \omega_2B_1 + \omega_1B_2 + \omega_3B_3, \end{cases} \qquad (\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$$

wo nach (6)

$$(\mathfrak{A}_1)\qquad \begin{cases} \omega_1 = x_2x_3 - x_1^2, \\ \omega_2 = x_3x_1 - x_2^2, \\ \omega_3 = x_1x_2 - x_3^2. \end{cases}$$

Substituiert man die Werte der ωA_i aus (19) in das Gleichungssystem (3)

$$(3)\qquad \begin{cases} \delta D_1 = x_2x_3A_1 + x_3x_1A_2 + x_1x_2A_3, \\ \delta D_2 = x_1x_2A_1 + x_2x_3A_2 + x_3x_1A_3, \\ \delta D_3 = x_3x_1A_1 + x_1x_2A_2 + x_2x_3A_3, \end{cases}$$

wobei

$$\delta = x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2$$

ist, so ergiebt sich:

$$(20)\qquad \begin{cases} \delta\omega D_1 = \omega_2\omega_3B_1 + \omega_3\omega_1B_2 + \omega_1\omega_2B_3, \\ \delta\omega D_2 = \omega_1\omega_2B_1 + \omega_2\omega_3B_2 + \omega_3\omega_1B_3, \\ \delta\omega D_3 = \omega_3\omega_1B_1 + \omega_1\omega_2B_2 + \omega_2\omega_3B_3 \end{cases}$$

und

$$\delta\omega = \omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_1 + \omega_1\omega_2.$$

Die Gleichungssysteme (2) und (19), (3) und (20) setzen in Evidenz, dafs, *wenn man x_i mit ω_i und A_i mit B_i vertauscht, auch D_2 mit D_3 sich vertauschen, während D_1 unverändert bleibt.*

18. Wendet man dieses Übertragungsprinzip, durch das bereits Theorem *VIII* in Theorem *IX* übergeführt wurde, auf Theorem *VIa* an, so folgt:

X. Zieht man durch die Punkte A_1, A_2, A_3 Parallelen bez. zu den Seiten B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2, so schneiden sie sich in einem Punkte R [1])

Da dieser Punkt R dem Punkte X entspricht, so folgt aus

$$(1)\qquad xX = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$$

für R der Ausdruck

$$(21)\qquad \omega R = \omega_1B_1 + \omega_2B_2 + \omega_3B_3,$$

1) Vgl. J. Neuberg: Sur le point de Steiner. Journ de Mathém. spéciales. 1886.

Digitized by Google

und die Substitution von (2) ergiebt

$$\begin{cases} x\omega R = (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_3 + \omega_3 x_2)\, A_1 \\ \qquad\quad + (\omega_1 x_3 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_1)\, A_2 \\ \qquad\quad + (\omega_1 x_2 + \omega_2 x_1 + \omega_3 x_3)\, A_3; \end{cases}$$

da aber wegen $(\mathfrak{A}_1)$

$$(\mathfrak{A}_2) \quad \begin{cases} \omega_1 x_1 + \omega_2 x_3 + \omega_3 x_2 = x\,(x_3 - x_1)\,(x_1 - x_2) = x p_1, \\ \omega_1 x_3 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_1 = x\,(x_1 - x_2)\,(x_2 - x_3) = x p_2, \\ \omega_1 x_2 + \omega_2 x_1 + \omega_3 x_3 = x\,(x_2 - x_3)\,(x_3 - x_1) = x p_3, \end{cases}$$

so ergiebt sich

$$(22) \qquad \omega R = p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3,$$

wobei

$$(23) \quad \begin{cases} p_1 = (x_3 - x_1)\,(x_1 - x_2), \\ p_2 = (x_1 - x_2)\,(x_2 - x_3), \\ p_3 = (x_2 - x_3)\,(x_3 - x_1) \end{cases}$$

und wegen (22)

$$(\mathfrak{A}_3) \qquad \omega = p_1 + p_2 + p_3$$

ist.

Ersetzt man in (23) x_i durch ω_i, so verwandelt sich p_1, weil

$$(\mathfrak{A}_4) \quad \begin{cases} \omega_1 - \omega_3 = x\,(x_3 - x_1), \\ \omega_2 - \omega_1 = x\,(x_1 - x_2), \\ \omega_3 - \omega_2 = x\,(x_2 - x_3) \end{cases}$$

ist, in $x^2 p_1$; ebenso verwandeln sich p_2 und p_3 bez. in $x^2 p_2$ und $x^2 p_3$. Durch die Vertauschung von x_i mit ω_i und die gleichzeitige von A_i mit B_i, geht (22) in

$$(24) \qquad \omega X = p_1 B_1 + p_2 B_2 + p_3 B_3$$

über.

Multipliziert man noch die Gleichungen (2) der Reihe nach mit ω_1, ω_3, ω_2 und addiert, so folgt

$$\begin{aligned} x\,(\omega_1 B_1 + \omega_3 B_2 + \omega_2 B_3) = {} & (x_1\omega_1 + x_3\omega_3 + x_2\omega_2)\, A_1 \\ & + (x_3\omega_1 + x_2\omega_3 + x_1\omega_2)\, A_2 \\ & + (x_2\omega_1 + x_1\omega_3 + x_3\omega_2)\, A_3. \end{aligned}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung gleich $x\omega A_1$ ist, so liefert die Gleichsetzung der Koeffizienten von A_i:

$$(\mathfrak{A}_5) \quad \begin{cases} x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3 = x\omega, \\ x_1\omega_2 + x_2\omega_3 + x_3\omega_1 = 0, \\ x_1\omega_3 + x_2\omega_1 + x_3\omega_2 = 0. \end{cases}$$

19. Aus (2) folgt

$$x\,(B_2 + B_3) = (x_2 + x_3)\, A_1 + (x_1 + x_2)\, A_2 + (x_3 + x_1)\, A_3$$

und daher

$$x\,[A_1\,(B_2 + B_3)] = (x_1 + x_2)\,[A_1 A_2] - (x_3 + x_1)\,[A_3 A_1].$$

Digitized by Google

Setzt man

$$B_k + B_l = 2B_{kl},$$

bezeichnet also mit B_{23}, B_{31}, B_{12} die Mittelpunkte der Strecken B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2, so folgt

$$(24a)\quad \begin{cases} 2x\,[A_1B_{23}] = (x_1+x_3)\,[A_1A_3] - (x_3+x_1)\,[A_3A_1], \\ 2x\,[A_2B_{31}] = (x_2+x_3)\,[A_2A_3] - (x_1+x_3)\,[A_1A_3], \\ 2x\,[A_3B_{12}] = (x_3+x_1)\,[A_3A_1] - (x_2+x_3)\,[A_2A_3]. \end{cases}$$

Da die Summe der rechten Seiten dieser Gleichungen gleich Null ist, so schneiden sich die drei Geraden A_1B_{23}, A_2B_{31}, A_3B_{12} in *einem* Punkte, der mit S bezeichnet werde.

Bildet man aus den rechten Seiten zweier Gleichungen (24a) das äußere Produkt, so ergiebt sich für S der Ausdruck:

$$(25)\quad (x^2+\delta)S = (x_1+x_2)(x_3+x_1)A_1 + (x_2+x_3)(x_1+x_2)A_2 + (x_3+x_1)(x_2+x_3)A_3.$$

Wenn man für die A_i die Ausdrücke in (19) benutzt, so erhält man für den Punkt S, ausgedrückt durch die B_i:

$$\sigma S = \omega_1(\omega_2+\omega_3-\omega_1)\,B_1 + \omega_2(\omega_3+\omega_1-\omega_2)\,B_2 + \omega_3(\omega_1+\omega_2-\omega_3)\,B_3,$$

wobei

$$\begin{aligned} \sigma &= \omega_1(\omega_2+\omega_3-\omega_1) + \omega_2(\omega_3+\omega_1-\omega_2) + \omega_3(\omega_1+\omega_2-\omega_3) \\ &= 2(\omega_2\omega_3+\omega_3\omega_1+\omega_1\omega_2) - (\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2) \end{aligned}$$

ist.

Löst man die beiden letzten Gleichungen in $(\mathfrak{A}_5)$ nach x_1, x_2, x_3 auf, so folgt

$$\begin{aligned} \varphi \cdot x_1 &= \omega_2\omega_3 - \omega_1^2, \\ \varphi \cdot x_2 &= \omega_3\omega_1 - \omega_2^2, \\ \varphi \cdot x_3 &= \omega_1\omega_2 - \omega_3^2, \end{aligned}$$

und durch Subtraktion

$$\varphi\,(x_3 - x_1) = \omega\,(\omega_1 - \omega_3)$$

oder wegen $(\mathfrak{A}_4)$

$$\varphi\,(x_3 - x_1) = \omega \cdot x \cdot (x_3 - x_1).$$

Demnach ist $\varphi = \omega \cdot x$, und man erhält

$$(\mathfrak{A}_6)\quad \begin{cases} \omega_2\omega_3 - \omega_1^2 = \omega \cdot x x_1, \\ \omega_3\omega_1 - \omega_2^2 = \omega \cdot x x_2, \\ \omega_1\omega_2 - \omega_3^2 = \omega \cdot x x_3, \end{cases}$$

und durch Addition

$$\omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_1 + \omega_1\omega_2 - (\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2) = \omega x^2.$$

Da nach (20)

$$\delta\omega = \omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_1 + \omega_1\omega_2$$

ist, so folgt

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \omega\,(\delta - x^2)$$

und

$$\sigma = 2\omega\delta - \omega\,(\delta - x^2) = \omega\,(x^2 + \delta).$$

Digitized by Google

Daher hat man

$$(25_1)\quad \begin{cases} \omega(x^2+\delta)S=\omega_1(\omega_2+\omega_3-\omega_1)B_1+\omega_2(\omega_3+\omega_1-\omega_2)B_2+\omega_3(\omega_1+\omega_2-\omega_3)B_3 \\ \qquad = \omega_1(\omega-2\omega_1)B_1+\omega_2(\omega-2\omega_2)B_2+\omega_3(\omega-2\omega_3)B_3, \end{cases}$$

und

$$(25_2)\quad \begin{cases} \omega_2\omega_3+\omega_3\omega_1+\omega_1\omega_2 = \omega\delta, \\ \omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2 = \omega(\delta-x^2), \\ 3\delta-\omega = x^2. \end{cases}$$

20. Da in dem unter (25) gegebenen Ausdruck für S der Koeffizient von A_1

$$\begin{aligned} (x_1+x_2)(x_3+x_1) &= xx_1 + x_2x_3, \\ &= x_1^2 + \delta, \\ &= x_1(x_2+x_3)+(x_2x_3+x_1^2), \\ &= 2x_1(x_2+x_3)-(x_1-x_2)(x_3-x_1) \end{aligned}$$

ist, und die Werte der Koeffizienten von A_2 und A_3 durch cyklische Permutation daraus hervorgehen, so findet man

$$(26)\quad \begin{cases} sS = x^2X + \delta D_1, \\ \quad = wW + 3\delta G, \\ \quad = zZ + \delta(D_2+D_3), \\ \quad = -\omega R + 2\delta(D_2+D_3), \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung

$$(27)\quad \begin{cases} wW = x_1^2A_1 + x_2^2A_2 + x_3^2A_3, \\ zZ = (x_2x_3+x_1^2)A_1+(x_3x_1+x_2^2)A_2+(x_1x_2+x_3^2)A_3 \end{cases}$$

und

$$(28)\quad \begin{cases} s = x^2+\delta = 4\delta-\omega, \\ w = x^2-2\delta = \delta-\omega, \\ z = x^2-\delta = 2\delta-\omega \end{cases}$$

gesetzt ist. Durch Subtraktion der Gleichungen (27) folgt noch

$$(29)\qquad zZ - wW = \delta D_1.$$

21. Multipliziert man die dritte Gleichung (26) mit 2 und subtrahiert davon die vierte, so ergiebt sich

$$sS = 2zZ + \omega R.$$

Nach (25_1) aber erhält man

$$\omega sS = \omega^2 R - 2(\omega_1^2B_1+\omega_2^2B_2+\omega_3^2B_3),$$

daher

$$(30)\qquad \omega zZ = -(\omega_1^2B_1+\omega_2^2B_2+\omega_3^2B_3)$$

und wegen (29)

$$(31)\quad \omega wW = -\{(\omega_2\omega_3+\omega_1^2)B_1+(\omega_3\omega_1+\omega_2^2)B_2+(\omega_1\omega_2+\omega_3^2)B_3\}.$$

Die Gleichungen (27) und (30), (31) zeigen, dafs bei Vertauschung von x_i mit ω_i, wW und zZ bez. in $-\omega zZ$ und $-\omega wW$ übergehen.

Digitized by Google

22. Setzt man[1])

$$W_i = [A_k B_l \quad A_l B_k] \quad (i, k, l = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2) \quad (i + k + l), \tag{32}$$

so folgt

$$w_i W_i = x_k x_l A_i + x_k^2 A_k + x_l^2 A_l \tag{33}$$

und

$$w_i = x_k x_l + x_k^2 + x_l^2. \tag{34}$$

Setzt man in (33) für die $A_m (m = i, k, l)$ die in (19) angegebenen Werte ein, so erhält man

$$\omega w_i W_i = \omega_k \omega_l B_i + \omega_k^2 B_k + \omega_l^2 B_l \tag{35}$$

und

$$\omega w_i = \omega_k \omega_l + \omega_k^2 + \omega_l^2. \tag{$\mathfrak{A}_8$}$$

Für $i = 1$, $k = 2$, $l = 3$ lassen sich der Gleichung (33) die folgenden Formen geben:

$$\begin{aligned}
w_1 W_1 = \quad & x_2 x_3 A_1 + x_2^2 A_2 + x_3^2 A_3, \\
= & -(x_3 x_1 - x_2^2) A_2 + x_3 (x_2 A_1 + x_1 A_2 + x_3 A_3), \\
= & -(x_1 x_2 - x_3^2) A_3 + x_2 (x_3 A_1 + x_2 A_2 + x_1 A_3), \\
= & \quad (x_2 x_3 - x_1^2) A_1 + x_1^2 A_1 + x_2^2 A_2 + x_3^2 A_3, \\
= & -x_1 (x_1 A_1 + x_3 A_2 + x_2 A_3) + (x_2 x_3 + x_1^2) A_1 + (x_3 x_1 + x_2^2) A_2 \\
& + (x_1 x_2 + x_3^2) A_3,
\end{aligned}$$

und entsprechende Gleichungen gelten für $w_2 W_2$ und $w_3 W_3$. Daher folgt

$$\left\{\begin{aligned}
w_i W_i &= -\omega_k A_k + x x_l B_l, \\
&= -\omega_l A_l + x x_k B_k, \\
&= \quad \omega_i A_i + w W, \\
&= -x x_i B_i + z Z,
\end{aligned}\right. \tag{36}$$

wobei

$$w_i = -\omega_k + x x_l = -\omega_l + x x_k = \omega_i + w = -x x_i + z. \tag{$\mathfrak{A}_9$}$$

Ebenso folgt

$$\left\{\begin{aligned}
x_i w_i W_i &= \quad x_k \omega_l A_k + x_l \delta D_2, \\
&= \quad x_l \omega_k A_l + x_k \delta D_3; \\
\omega_i w_i W_i &= x x_k \omega_l B_l + \omega_k \delta D_2, \\
&= x x_l \omega_k B_k + \omega_l \delta D_3,
\end{aligned}\right. \tag{37}$$

---

1) Vgl. E. Jahnke: Programm 1900. Die Punkte W_i sind daselbst durch B_{11}, B_{22}, B_{33} bezeichnet und gehören zu der Gruppe von 9 Punkten, welche von Herrn Jahnke als die *Veroneseschen Punkte eines Brocardschen Dreiecks inbezug auf das Fundamentaldreieck* eingeführt worden sind.

Digitized by Google

wobei

$$(\mathfrak{A}_{10}) \qquad \begin{cases} x_i w_i = & x_k\omega_i + x_i\delta, \\ & = x_i\omega_k + x_k\delta; \\ \omega_i w_i = x x_k\omega_i + \omega_k\delta, \\ & = x x_i\omega_k + \omega_i\delta. \end{cases}$$

23. Die Gleichungen (32), (36) und (37) ergeben:

XI. Die Schnittpunkte W_i der Geradenpaare A_kB_i, A_iB_k sind auch die Schnittpunkte der Geradenpaare A_kD_i, A_iD_k und B_iD_i, B_kD_k. Die Geraden A_iW_i schneiden sich in W, die Geraden B_iW_i in Z; oder mit anderen Worten:

XIa. Das Dreieck $W_1W_2W_3$ ist sowohl zum Dreieck $A_1A_2A_3$ als zum Dreieck $B_1B_2B_3$ dreifach perspektiv; die Perspektivitätszentra sind W, D_3, D_2 bez. Z, D_3, D_2.

Die Ergebnisse der Nummern **19.** und **20.** lassen sich, wie folgt, zusammenfassen:

XII. Bezeichnet man mit B_{ii}, D_{ii} die Mittelpunkte der Segmente B_iB_i, D_kD_i, so schneiden sich die drei Geraden A_iB_{ii} in einem Punkte S, der gleichzeitig der Schnittpunkt der drei Geraden XD_1, WG, RZ ist.

Subtrahiert man die ersten beiden und letzten beiden Gleichungen (26), so folgt

$$(38) \qquad \begin{cases} x^2 X - w W = 2\delta D_{23}, \\ \omega R + z Z = 2\delta D_{23}, \end{cases}$$

woraus sich ergiebt[1]):

XIII. Die Geraden XW und RZ schneiden sich im Mittelpunkte D_{23} des Segmentes D_2D_3.

24. Nimmt man zu Gleichung (27)

$$z Z = (x_2x_3 + x_1^2)A_1 + (x_3x_1 + x_2^2)A_2 + (x_1x_2 + x_3^2)A_3$$

hinzu

$$(39) \qquad \omega Y = (x_2x_3 - x_1^2)A_1 + (x_3x_1 - x_2^2)A_2 + (x_1x_2 - x_3^2)A_3$$

oder nach $(\mathfrak{A}_1)$

$$(39^*) \qquad \omega Y = \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3,$$

so folgt durch Addition und Subtraktion:

$$(40) \qquad \begin{cases} z Z + \omega Y = 2\delta D_1, \\ z Z - \omega Y = 2 w W. \end{cases}$$

Ganz ebenso ergiebt sich, wenn man

$$(41) \qquad x T = x_1 B_1 + x_2 B_2 + x_3 B_3$$

1) Vgl. E. Jahnke: Programm 1900. Theorem XIII.

Digitized by Google

setzt und ($\mathfrak{A}_6$) und (31) beachtet:

$$(42)\qquad \begin{cases} -wW + x^2T = 2\delta D_1, \\ uW + x^2T = 2zZ. \end{cases}$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (40) folgt

$$(43)\qquad \omega Y = \delta \cdot D_1 - wW,$$

und da nach (38)

$$x^2X = \delta(D_2 + D_3) + wW,$$

so folgt

$$(44)\qquad \omega Y + x^2X = 3\delta G.$$

Ebenso ergiebt sich aus (42) und (38)

$$(45)\qquad x^2T + \omega R = 3\delta G,$$

und aus (44) und (45)

$$(46)\qquad x^2(X - T) = \omega(R - Y).$$

Die Gleichungen (40) bis (46) ergeben:

XIV. Bezeichnet man die Schnittpunkte der Geraden WD_1 mit den Geraden RG und XG bez. mit T und Y, so sind die Geraden XT und RY parallel.

XV. Auf der Geraden WD_1 liegt aufser den Punkten T und Y noch der Punkt Z. Von diesen fünf Punkten sind Z, Y; D_1, W und W, T; D_1, Z je vier harmonische.

(Fortsetzung folgt im nächsten Heft.)

Digitized by Google

Étude élémentaire du conoïde de Plücker.

Par M. Maurice d'Ocagne à Paris.

1. La remarquable surface réglée du 3e ordre qui a reçu le nom de *conoïde de Plücker*, en mémoire de son premier inventeur, joue un rôle important en Géométrie Supérieure. Cayley l'a étudiée sous le nom de *cylindroïde*. M. Mannheim, dans ses études de Géométrie cinématique, Sir R. Ball, dans ses études de Statique, en ont fait un usage fréquent. MM. Lindemann et Picquet lui ont aussi consacré des travaux intéressants.[1])

Il n'est peut-être pas sans utilité, vu son importance, de montrer que ses principales propriétés peuvent être obtenues par un procédé purement élémentaire; tel est l'objet de la présente Note.

2. La définition la plus simple qui puisse être adoptée en vue d'une telle étude, définition qui sera généralisée par la suite, est celle-ci: *Le conoïde de Plücker est engendré par une droite perpendiculaire aux génératrices d'un cylindre de révolution, s'appuyant sur une section plane quelconque de ce cylindre et sur une des génératrices G du cylindre passant par un des sommets de la section plane.*

Cette dernière restriction visant la génératrice G, commode pour l'application du procédé élémentaire ici envisagé, peut être supprimée comme on le verra plus loin.

Représentons le cylindre et le plan de la section directrice en prenant un plan horizontal perpendiculaire aux génératrices du cylindre, et un plan vertical perpendiculaire au plan de la directrice. Soit $t'q'$ la trace verticale de celui-ci (Fig. 1). Les génératrices du conoïde étant toutes comprises entre le plan horizontal du point t' et celui du point q', nous appelons la distance h entre ces plans la *hauteur du conoïde*, et nous disons que le plan de la section directrice coupe le cylindre *sur la hauteur h*.

---

1) Man vergleiche auch die Darstellung und die Litteratur bei Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Teil 2, S. 217 ff., besonders S. 235 u. 236.

Digitized by Google

Si, par la droite projetée verticalement en t', suivant laquelle le plan $t'q'$ coupe le plan tangent au cylindre le long de la génératrice ii, nous faisons passer un plan quelconque, et si nous prenons l'intersection $(l \cdot l')$ de ce plan avec une génératrice quelconque $(am \cdot a'm')$ du conoïde, nous voyons que

$$\frac{al}{am} = \frac{a'l'}{a'm'}.$$

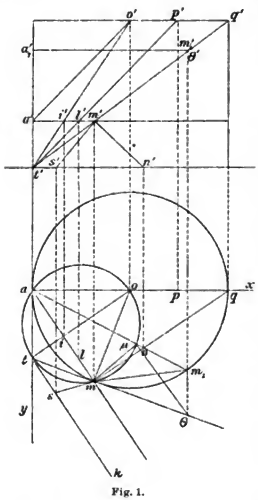


Fig. 1.

Ce dernier rapport étant constant il en résulte que le lieu du point l est homothétique de celui du point m par rapport au point a; c'est donc le cercle de diamètre ap. En d'autres termes, la section du conoïde par le plan de trace $t'q'$ est située sur le cylindre de révolution vertical dont la base est le cercle de diamètre ap. Par suite, *tout plan mené par la droite projetée verticalement en t' coupe le conoïde suivant une conique appartenant au cylindre de révolution dont $a't'$ est une génératrice de contour apparent et que ce plan coupe sur la hauteur h.* Une quelconque de ces coniques peut être prise pour directrice du conoïde. Nous appellerons ces coniques les coniques Γ_1.

3. Le plan tangent en $(m \cdot m')$ est déterminé par la génératrice $(am \cdot a'm')$ et la tangente $(mt \cdot m't')$ à la conique Γ_1 passant en ce point.

Remarquons que, puisque la droite ot passe par le milieu i de am, la droite $i't'$ passe par le centre o' de la section droite de cote h, c'est-à-dire située sur la génératrice supérieure du conoïde. Ce point o' restant le même quel que soit le point $(m \cdot m')$ pris sur la conique Γ_1, il en résulte que tous les plans tangents le long de cette conique passent par le point $(o \cdot o')$. Donc: *L'enveloppe des plans tangents au conoïde le long d'une conique Γ_1 est un cône ayant pour sommet le point où l'axe du cylindre de révolution qui passe par cette conique rencontre la génératrice supérieure du conoïde.*

Cherchons maintenant l'intersection du conoïde et de son plan tangent en $(m \cdot m')$. Pour cela, déterminons le point où la génératrice $(am_1 \cdot a_1'm_1')$ rencontre ce plan. Le plan projetant verticalement cette

Digitized by Google

génératrice coupe $(mt \cdot m't')$ en $(\theta \cdot \theta')$ et $(am \cdot a'm')$ à l'infini; son intersection avec le plan tangent considéré se projette donc horizontalement suivant la parallèle à am menée par θ, qui donne sur am le point μ cherché.

La figure montre immédiatement que

$$\widehat{\theta m m_1} = \widehat{m a m_1}$$

(même mesure dans le cercle amq); d'où résulte que

$$\widehat{\theta m m_1} = \widehat{\theta \mu m_1},$$

c'est-à-dire que le quadrilatère $\theta m \mu m_1$ est inscriptible, ce qui entraîne

$$\widehat{a \mu m} = \widehat{m \theta m_1}.$$

Mais

$$\widehat{m \theta m_1} = \widehat{a o m} \text{ (côtés perpendiculaires).}$$

Donc enfin

$$\widehat{a \mu m} = \widehat{a o m},$$

et le lieu du point μ est le cercle circonscrit au triangle aom, cercle qui passe aussi par le point t. *La section du conoïde par le plan tangent en $(m \cdot m')$ se trouve donc sur le cylindre de révolution dont le cercle $aomt$ est la section droite.* C'est par suite une conique que nous désignerons d'une manière générale par la lettre Γ_2.

La conique Γ_2 pourrait d'ailleurs être prise comme directrice avec la génératrice G au lieu de Γ_1 d'où la définition généralisée annoncée plus haut.

Puisque l'intersection complète du conoïde par son plan tangent comprend une droite et une conique, c'est que ce conoïde est une *surface du 3ième ordre.*

Nous voyons, en outre, que par chaque point de la surface passent deux coniques, une Γ_1 et une Γ_2.

4. Rappelons la construction du plan tangent en $(m \cdot m')$ résultant de ce qui précède: Par le milieu i de am on élève à cette droite la perpendiculaire it. La droite $(it \cdot i't')$ jointe à $(am \cdot a'm')$ détermine le plan tangent en $(m \cdot m')$. La trace horizontale de ce plan tangent est la parallèle tk à am.

Réciproquement si, par la génératrice $(am \cdot a'm')$, on mène un plan quelconque de trace horizontale tk, il est facile d'avoir le point $(m \cdot m')$ où ce plan touche la surface; il suffit d'abaisser du point t la perpendiculaire ti sur am et de prendre le symétrique m de a par rapport à i.

S'il s'agit de mener au conoïde un plan tangent parallèle à un plan donné, on connaît immédiatement la direction de tk, mais pour déterminer complètement cette trace, il faut connaître, en outre la lon-

Digitized by Google

gueur de ot. Pour cela, il suffit, par un point quelconque de cote h, le point $(q \cdot q')$ par exemple, de mener un plan parallèle au plan donné; la distance du point q à la trace horizontale du plan ainsi obtenu est alors égale et parallèle à ot, ce qui permet de construire cette droite, et, par suite, tk. Il n'y a plus qu'à abaisser de a sur ot la perpendiculaire ai et de rappeler le point i en i' sur $t'o'$ pour avoir les projections de la génératrice $(am \cdot a'm')$ sur laquelle se trouve le point de contact $(m \cdot m')$ cherché. Celui-ci n'est d'ailleurs autre que le symétrique du point $(a \cdot a')$ par rapport au point $(i \cdot i')$.

5. Remarquons en passant que le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur les génératrices du conoïde est une conique. En effet, ce lieu a pour projection horizontale le cercle qui a pour diamètre la distance du point a à la projection horizontale du point considéré. D'après ce qui vient d'être vu, si ce cercle coupe les droites ax et ay aux points t et o, la section de la surface par ce cylindre se trouve dans le plan dont la trace horizontale est la tangente tk au cercle en t et qui passe par le point de cote h projeté en o. C'est donc une conique Γ_2.

M. Appell a démontré récemment (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. XXVIII, p. 261) que le conoïde de Plücker est la seule surface gauche jouissant de la propriété que le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur ses génératrices soit une courbe plane.

6. Les tangentes en $(m \cdot m')$ à l'intersection du conoïde par son plan tangent sont la génératrice $(am \cdot a'm')$ et la tangente $(ms \cdot m's')$ à la conique Γ_2 projetée horizontalement suivant le cercle amt. Ces deux droites constituent donc les asymptotes de l'indicatrice de Dupin au point $(m \cdot m')$. Par suite, deux directions conjuguées par rapport à cette indicatrice le seront aussi par rapport à ces droites.

Cherchons en particulier la direction conjuguée de $(mt \cdot m't')$; ce sera celle de la caractéristique du plan tangent en $(m \cdot m')$, lorsque son point de contact parcourt la conique Γ_1. On sait que les côtés mo et mt de l'angle droit du triangle rectangle mot sont conjugués harmoniques par rapport à la hauteur mi de ce triangle et à la tangente ms à son cercle circonscrit. Donc la caractéristique cherchée n'est autre que $(mo \cdot m'o')$. Nous retrouvons ainsi le théorème énoncé au n° **3.** relativement à l'enveloppe des plans tangents le long de Γ_1.

Ayant vu au n° **4.** le moyen de construire le plan tangent parallèle à un plan donné, nous pourrons construire point par point la courbe d'ombre produite par des rayons lumineux parallèles à une direction donnée, en cherchant les points de contact des plans tangents parallèles à cette direction. Nous voyons en outre que la connaissance des

Digitized by Google

directions asymptotiques $(ma \cdot m'a')$ et $(ms \cdot m's')$ en chaque point $(m \cdot m')$ de la courbe d'ombre nous permettra d'avoir immédiatement la tangente en $(m \cdot m')$ à cette courbe. Ce sera la conjuguée harmonique du rayon lumineux passant en $(m \cdot m')$ par rapport à ces deux directions asymptotiques.

7. Nous ferons observer en outre qu'il est très facile d'obtenir, par des tracés linéaires, tous les éléments de courbure de la surface en chacun de ses points. Il suffit, en effet, pour cela, de déterminer complètement l'indicatrice de Dupin en chaque point $(m \cdot m')$. Or, rien n'est plus simple. Nous connaissons déjà les asymptotes $(ma \cdot m'a')$ et $(ms \cdot m's')$ de cette indicatrice; il nous suffit donc d'avoir, en outre, un point de cette indicatrice, c'est-à-dire le rayon de courbure d'une section normale quelconque en $(m \cdot m')$. Or, il est bien aisé d'obtenir celui de la section normale passant par $(mt \cdot m't')$. Le plan de cette section normale est déterminé, en outre de $(mt \cdot m't')$, par la normale en $(m \cdot m')$ au conoïde dont les projections mn et $m'n'$ sont respectivement perpendiculaires à am et à $o'a'$. On peut facilement construire l'angle ω de ce plan avec le plan de la conique Γ_1, plan de bout dont $t'q'$ est la trace verticale. Si ρ est le rayon de courbure de la conique Γ_1 au point $(m \cdot m')$, le théorème de Meunier donne pour l'expression du rayon de courbure normale R l'expression

$$R = \frac{\rho}{\cos\omega}.$$

D'autre part, si la génératrice du cylindre projetant Γ_1, c'est-à-dire la verticale du point $(m \cdot m')$, fait avec la tangente $(mt \cdot m't')$ l'angle φ, angle dont la construction est immédiate, le théorème d'Euler appliqué à ce cylindre montre que

$$\rho = \frac{r}{\sin^2\varphi},$$

en appelant r le rayon om du cylindre. Par suite,

$$R = \frac{r}{\sin^2\varphi\cos\omega},$$

et tous les éléments qui interviennent dans cette formule étant construits géométriquement, il en sera de même de R.

Remarquons que puisque, lorsque le point $(m \cdot m')$ se déplace sur la génératrice $(am \cdot a'm')$, l'asymptote $(ms \cdot m's')$ de l'indicatrice reste parallèle à un même plan vertical, le lieu de cette asymptote qui est *la quadrique réglée osculatrice au conoïde le long de la génératrice considérée est un paraboloïde.*

8. Pour terminer nous ferons voir comment on peut ramener à la définition qui nous a servi de point de départ une définition

Digitized by Google

souvent donnée du conoïde de Plücker, qui est la suivante: *Un tel conoïde est le lieu des perpendiculaires communes à toutes les droites d'un plan passant par un même point et à une droite extérieure à ce plan.*

Prenons un plan horizontal perpendiculaire à la droite $(G \cdot G')$ donnée et un plan vertical perpendiculaire au plan donné dont la trace verticale est $a'f'$, $(f \cdot f')$ étant le point fixe donné (Fig. 2).

Prenons par le point $(f \cdot f')$ une droite quelconque du plan donné dont $f\mu$ est la projection horizontale. Puisque la droite $(G \cdot G')$ est verticale, la perpendiculaire commune qui est horizontale se projette horizontalement suivant la perpendiculaire $G\mu$ à $f\mu$, et le lieu du point μ est le cercle décrit sur af comme diamètre. Autrement dit, la perpendiculaire commune, tout en restant horizontale, s'appuie constamment sur la droite $(G \cdot G')$ et sur la conique intersection du plan donné, de trace verticale $a'f'$, et du cylindre de révolution dont le cercle $G\mu f$ est la section droite. Le lieu de cette perpendiculaire est donc bien un conoïde du genre étudié ci-dessus, mais défini par une de ses coniques Γ_2. Pour remonter à la définition primitive, cherchons une conique Γ_1 de ce conoïde.

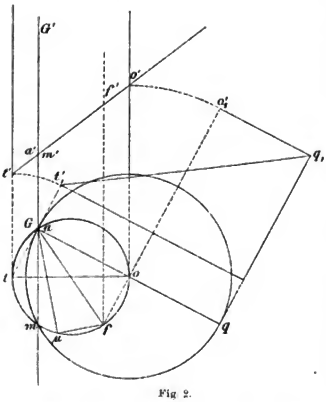


Fig. 2.

Pour cela, en nous servant des mêmes lettres que sur la Fig. 1 en vue de rendre la comparaison plus facile, cherchons le point $(m \cdot m')$ où le plan de notre conique Γ_2 est tangent au conoïde. C'est le point pour lequel la génératrice correspondante est dans ce plan; cette génératrice est bien évidemment celle $(am \cdot a'm')$ qui se projette verticalement au point de rencontre de G' et de la trace $a'f'$ du plan. Nous avons ainsi le point $(m \cdot m')$. Si donc nous prenons le diamètre ot perpendiculaire à am, nous voyons, en nous reportant à la Fig. 1, que les coniques Γ_1 se trouvent dans des plans passant par la droite at et perpendiculaires au plan vertical passant par ao. Prenons comme pro-

Digitized by Google

jection de notre conique Γ_1 le cercle de centre o et de rayon oa. Alors en prenant arbitrairement la nouvelle projection verticale t'_1 du point $(t \cdot t')$, par exemple en prenant $tt'_1 = tt'$, nous n'avons qu'à prendre q'_1 de même cote que o'_1 pour avoir, sur un plan vertical parallèle à ao, la trace $t'_1 q'_1$ du plan de la conique Γ_1. Le conoïde est alors défini conformément à l'énoncé du début de cette étude.

Paris, Janvier 1901.

Digitized by Google

Isophoten und Isophengen, insbesondere auf den Flächen zweiter Ordnung.

Von Richard Müller in Berlin,

mit Benutzung hinterlassener Papiere Wilhelm Stahls.

In dem litterarischen Nachlasse Wilhelm Stahls befinden sich einige Blätter, wie es scheint aus dem Jahre 1879, in denen er die Eigenschaften der Isophoten der Flächen zweiter Ordnung aus einem einfachen Gesichtspunkte ableitet; diese Notizen sind aber in der vorhandenen Form zur Veröffentlichung nicht geeignet, auch ist die offenbare Absicht, das gleiche Prinzip für die Isophengen zu verwerten, nicht über den Anfang hinaus gekommen.

Die Ausführung dieses Plans erlaube ich mir hiermit den Lesern dieser Zeitschrift vorzulegen, und betone, dafs alles Verdienst für die darin ausgenutzten Gedanken dem Verstorbenen gebührt, mir aber die Verantwortung für die Darstellung und für die Resultate.

Meinem Freunde Herrn Stanislaus Jolles bin ich für die Überlassung der genannten Blätter, wie für das fördernde Interesse, welches er meiner Arbeit zugewendet hat, zu dauerndem Danke verpflichtet.

1. Unter Annahme einer unendlich fernen konstanten Lichtquelle setzen wir nach dem Lambertschen Gesetze die Beleuchtungsintensität eines Flächenelementes proportional dem Kosinus des Winkels, den die Flächennormale mit der Richtung der parallelen Lichtstrahlen bildet. Eine Kurve, welche auf einer beleuchteten Fläche die Punkte gleicher Intensität verbindet, heifst Isophote (Lichtgleiche).

Von dieser „wahren“ Beleuchtungsintensität der Flächenelemente aber hat Herr Burmester[1]) nach dem Vorgange Mongescher Schüler unterschieden die „scheinbare“, welche (für ein unendlich fernes Auge giltig) nicht blofs von der Stellung des Flächenelements gegen die Lichtrichtung, sondern auch von seiner Lage zur Sehrichtung abhängig ist und proportional gesetzt wird dem Produkte der beiden Kosinus

1) L. Burmester: Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäfsig gestalteter Flächen. Leipzig 1871. §§ 58—87.

Digitized by Google

der Winkel, die die Flächennormale mit Licht- und Sehrichtung bildet. Die Linien, welche Punkte gleicher scheinbarer Beleuchtungsintensität (Helligkeit) verbinden, heifsen Isophengen (Hellegleichen).

Die physikalische oder künstlerische Bedeutung dieser Isophengen ist nicht allgemein anerkannt[1]); für das rein geometrische Ziel der folgenden Untersuchungen aber erscheint es jedenfalls zweckmäfsig, die projektiven Beziehungen an den Isophengen zu entwickeln, da sich ja die Isophengen in Isophoten verwandeln, wenn man Licht- und Sehrichtung zusammenfallen läfst.

2. Für die gewöhnliche Beleuchtungstheorie ist von fundamentaler Bedeutung die Betrachtung des Systems der Isophoten-Kegel, d. h. der Rotationskegel, welche den Lichtstrahl als gemeinsame Axe haben, und auf welchen offenbar die „wahre" Intensität konstant ist.[2])

Daher soll unsere erste Aufgabe sein, ein System von Isophengen-Kegeln herzustellen, auf deren jedem die „scheinbare" Intensität konstant ist.

Inbezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem[3]) seien a_1, a_2, a_3 die Richtungskosinus des Lichtstrahls, b_1, b_2, b_3 die des Sehstrahls, ξ, η, ζ diejenigen einer Flächennormale; für die Helligkeit k eines Flächenelementes setzen wir dann unter Weglassung überflüssiger Faktoren:

$$k = (a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta)(b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta). \tag{1}$$

Bleibt k konstant, so genügen daher sämtliche Normalen eines Isophengenkegels Φ der Bedingung:

$$f = (a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta)(b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta) - k(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0, \tag{2}$$

d. h. sie sind parallel den Erzeugenden des durch diese Gleichung (2) definierten Kegels zweiter Ordnung, und umgekehrt müssen also die Erzeugenden von Φ die Normalen dieses Kegels $f = 0$ sein. Nennen wir also x, y, z die Koordinaten der Punkte auf Φ, so ist:

$$x : y : z = \frac{\partial f}{\partial \xi} : \frac{\partial f}{\partial \eta} : \frac{\partial f}{\partial \zeta}. \tag{3}$$

---

1) Zwei einander entgegengesetzte Meinungen sprechen z. B. aus: D. Tessari: La teoria delle ombre e del chiaro-scuro. Torino 1880. S. 257. — J. Mandl: Darstellung der scheinbaren Beleuchtung krummer Flächen (direkte Konstruktion der Isophengen). Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. Wien. **105**. IIa. S. 807. — Man vergleiche auch die historische und kritische Darstellung bei Ch. Wiener: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig 1884. I. Teil. §§ 50—53, 474—493.

2) Burmester, l. c. § 22. — Tessari, l. c. pag. 279. — Wiener, l. c. II. Bd. § 193.

3) Eine synthetische Darstellung enthält Nr. 3.

Digitized by Google

Wenn wir aus (2) und (3) die Richtungsgrößen ξ, η, ζ eliminieren, erhalten wir Φ.

Um diese Elimination möglichst einfach zu gestalten, wählen wir die Ebene des Licht- und Sehstrahls zur xy-Ebene; es ist dann $a_3 = b_3 = 0$. Ferner möge die x-Axe den spitzen Winkel beider, die y-Axe ihren stumpfen Winkel hälften, also ist $a_1 = b_1$, $a_2 = -b_2$, dazu $a_1^2 + a_2^2 = 1$, und $a_1 > a_2$. Daher:

$$(4) \qquad \begin{cases} f = (a_1\xi + a_2\eta)(a_1\xi - a_2\eta) - k(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \\ = -(k - a_1^2)\xi^2 - (k + a_2^2)\eta^2 - k\zeta^2 = 0. \end{cases}$$

Mithin:

$$x : y : z = -(k - a_1^2)\xi : -(k + a_2^2)\eta : -k\zeta,$$

oder:

$$(5) \qquad \xi : \eta : \zeta = \frac{x}{k - a_1^2} : \frac{y}{k + a_2^2} : \frac{z}{k},$$

und daraus folgt mit Rücksicht auf (4):

$$(6) \qquad \Phi = \frac{x^2}{k - a_1^2} + \frac{y^2}{k + a_2^2} + \frac{z^2}{k} = 0.$$

Die den verschiedenen Werten von k entsprechenden Flächen, die Isophengenkegel, bilden also eine Schar konfokaler Kegelflächen zweiter Ordnung $\Phi^{(2)}$; aber nur diejenigen Isophengenkegel sind reell, für welche $a_1^2 > k > -a_2^2$ ist; als Grenzfälle sind zu beachten die Helligkeiten $k = 0$, $k = a_1^2$ und $k = -a_2^2$, für welche die Kegelflächen sich auf die Koordinatenebenen und im engeren Sinne auf die in ihnen liegenden Fokalaxen reduzieren; $k = 0$ ergiebt die beiden reellen Geraden $z = 0$, $y : x = \pm a_2 : a_1$, d. h. den Licht- und den Sehstrahl, $k = a_1^2$ liefert $x = 0$, $z : y = \pm i a_1$, und für $k = -a_2^2$ hat man $y = 0$, $z : x = \pm i a_2$.

3. Das Resultat der vorigen Nr. wollen wir noch einmal ohne Verwendung analytischer Mittel herleiten, um seinen geometrischen Inhalt besser hervortreten zu lassen.

Vom Scheitelpunkt O eines der gesuchten Kegel Φ denken wir uns ausgehend: den Lichtstrahl OF, den Sehstrahl OF'', eine beliebige Tangentialebene des Kegels und ihre Normale ON. OF, OF', ON bilden eine körperliche Ecke; ihre Seiten bezeichnen wir wie folgt: $\sphericalangle FOF'' = \alpha$, $\sphericalangle FON = \varphi$, $\sphericalangle F''ON = \varphi'$; außerdem sei der Flächenwinkel an der Kante ON gleich ν. Nach dem Fundamentalsatz der sphärischen Trigonometrie ist dann: $\cos\alpha = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos\nu$. Konstruieren wir nun zu OF'' inbezug auf die Tangentialebene den Gegenstrahl OF''', der ja in der Ebene NOF'' liegt, so zwar, daß $\sphericalangle NOF''' = 180^0 - \varphi'$ ist, so gilt in der körperlichen Ecke der Kanten OF, OF''', ON für die Seite $\sphericalangle FOF''' = \sigma$ die Gleichung:

$$\cos\sigma = -\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos\nu;$$

Digitized by Google

daher ergiebt sich: $\cos\sigma = \cos\alpha - 2\cos\varphi\cos\varphi'$, oder, da ja $\cos\varphi \cdot \cos\varphi'$ die Helligkeit k ist: $\cos\sigma = \cos\alpha - 2k$, d. h. konstant. Der Gegenstrahl OF''' des Sehstrahls OF'' inbezug auf alle Tangentialebenen eines Isophengenkegels erzeugt also einen Rotationskegel mit der Axe OF. Daraus kann man sofort schliefsen[1]), dafs der Isophengenkegel eine Kegelfläche zweiter Ordnung $\Phi^{(2)}$ ist, für welche Licht- und Sehstrahl die reellen Fokalaxen sind, und dafs die Summe (oder Differenz) der Winkel, die eine Erzeugende des Kegels mit beiden Strahlen bildet, konstant ist, und zwar arc cos $(\cos\alpha - 2k)$; auch hier ergiebt sich die mit der vorigen Nr. übereinstimmende Determination:

$$-\sin^2\frac{\alpha}{2} < k < \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Dafs diese Kegel ungeändert bleiben, wenn man Licht- und Sehstrahl vertauscht, sei beiläufig bemerkt.

4. Denken wir uns nunmehr auf einer beliebigen beleuchteten Fläche F eine Kurve und längs derselben die Tangentialebenen von F, so wird diese Kurve offenbar dann und nur dann eine Isophenge sein, wenn diese Tangentialebenen den Tangentialebenen eines der vorhin bestimmten Isophengenkegel $\Phi^{(2)}$ parallel laufen. Um also alle Isophengen von F zu finden, haben wir alle abwickelbaren Flächen zu konstruieren, die F einhüllen und zugleich je einen der unendlich fernen Kegelschnitte $\varphi^{(2)}$ der Flächen $\Phi^{(2)}$ enthalten.

Diese unendlich fernen Kegelschnitte $\varphi^{(2)}$ bilden eine Schar, zu der 3 Punktepaare gehören; davon ist reell dasjenige, welches von Licht- und Sehstrahl geliefert wird. Die zu diesen beiden Punkten gehörigen abwickelbaren Flächen sind also Cylinder, deren einer die Fläche F längs der Grenze des Eigenschattens, deren anderer F längs der Projektionskontur berührt; beide Kurven sind Isophengen der Helligkeit Null.

5. Wenn insbesondere F eine centrische Fläche zweiter Ordnung $F^{(2)}$ ist, so wollen wir uns jede ihrer Isophengen vom Mittelpunkte aus durch einen Kegel projiziert denken; wir nennen denselben nach dem Vorgang von Herrn Burmester[2]) „Isophengoide".

Die Erzeugenden dieser Isophengoiden sind (als Durchmesser von $F^{(2)}$) inbezug auf $F^{(2)}$ Polaren der Geraden, welche in der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ durch die zugehörigen Tangentialebenen der abwickelbaren Flächen ausgeschnitten werden, d. h. diese Erzeugenden sind die Polaren zu den Tangenten der unendlich fernen Kegelschnitte der Schar der $\varphi^{(2)}$; daher bilden die Isophengoiden ein neues System,

1) Th. Reye: Die Geometrie der Lage. 4. Aufl. Leipzig 1899. S. 219 u. 220.
2) l. c. § 59.

Digitized by Google

nämlich einen Büschel von Kegelflächen zweiter Ordnung $\Psi^{(2)}$. Daraus folgt sofort, dafs alle Isophengen einer Fläche zweiter Ordnung Raumkurven vierter Ordnung erster Art sind, die vom Flächenmittelpunkte aus durch einen Büschel von Kegelflächen zweiter Ordnung projiziert werden.[1])

Dieser Büschel der $\Psi^{(2)}$ enthält aber 3 Ebenenpaare; ein Paar ist reell, welches aus den Polarebenen des in Nr. 4 genannten unendlich fernen Punktepaares der Fokalaxen besteht; dieses Paar liefert die Isophengen der Helligkeit Null, die also ebene Kurven sind. Die beiden andern Ebenenpaare sind konjugiert imaginär, ihre reellen Axen sind die Polaren der unendlich fernen Geraden der zweiten und dritten Symmetrie-Ebene der Kegel $\Phi^{(2)}$; diese Axen schneiden auf $F^{(2)}$ 4 Punkte gröfster (positiver oder negativer) Helligkeit aus.

Da durch den Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung 4 Kegel gehen, deren Spitzen nämlich die Ecken des gemeinsamen Poltetraeders sind, so folgt, dafs jede Isophenge von $F^{(2)}$ aufser vom Mittelpunkte aus noch von 3 anderen Punkten aus durch Kegel zweiter Ordnung projiziert wird; diese 3 Punkte liegen in der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ (die Kegel sind also Cylinder) und bilden das gemeinsame Poldreieck für die beiden Kegelschnitte, in welchen die unendlich ferne Ebene die Fläche $F^{(2)}$ und die fragliche Isophengoide $\Psi^{(2)}$ schneidet. Im allgemeinen sind diese 3 Punkte verschieden für die verschiedenen Isophengen, ihr geometrischer Ort ist die Tripelkurve (Jacobische Kurve) des aus den unendlich fernen Schnitten der Fläche $F^{(2)}$ und der Isophengoiden $\Psi^{(2)}$ gebildeten Kegelschnittnetzes.[2])

6. In der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ haben wir zu unterscheiden: 1) die Kegelschnittschar der $\varphi^{(2)}$, welche durch den Schnitt der konfokalen Isophengenkegel $\Phi^{(2)}$ entsteht, 2) den Kegelschnittbüschel der $\psi^{(2)}$, welcher der Schnitt der Isophengoiden $\Psi^{(2)}$ ist, 3) den Kegelschnitt $f^{(2)}$, welcher aus der beleuchteten Fläche $F^{(2)}$ geschnitten ist. Inbezug auf $f^{(2)}$ sind die $\varphi^{(2)}$ und $\psi^{(2)}$ polar. Die $\varphi^{(2)}$ haben ein gemeinsames Poldreieck XYZ, welches der Schnitt der 3 Symmetrieebenen der Kegelflächen $\Phi^{(2)}$ mit $\mathfrak{E}_\infty$ ist; in der Seite XY desselben

1) Diesen Satz hat schon Herr Burmester l. c. § 86 für den Fall bewiesen, dafs die Sehrichtung eine Hauptaxe der Fläche ist. Die obige Beweismethode hat für die Isophoten auch Ch. Wiener, l. c. II. 301, benutzt.

2) H. Schröter: Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften. 3. Aufl. Leipzig 1898. § 63.

Th. Reye, l. c. S. 279 ff.

Salmon-Fiedler: Analyt. Geometrie der Kegelschnitte. 4. Aufl. Leipzig 1878 Art. 360.

Digitized by Google

liegen die Punkte F und F' der beiden Fokalaxen, sodafs sie durch X und Y harmonisch getrennt sind.

Es mögen nun einige bemerkenswerte Sonderfälle hervorgehoben werden.

a) Wenn die Ebene des Licht- und Sehstrahls einer Hauptebene von $F^{(2)}$ parallel ist[1]), so ist die genannte Gerade XY die Polare von Z nicht blofs inbezug auf alle Kurven $\varphi^{(2)}$, sondern auch inbezug auf $f^{(2)}$. Daher ist auch in dem Büschel der $\psi^{(2)}$ Z zu XY konjugiert, und somit haben die gemeinsamen Poldreiecke von $f^{(2)}$ und je einer Kurve $\psi^{(2)}$ (Nr. 5) sämtlich denselben Eckpunkt Z; von hier aus werden also alle Isophengen auf die Ebene beider Strahlen durch Cylinder zweiter Ordnung projiziert. Die beiden andern Eckpunkte jener Poldreiecke sind von Isophenge zu Isophenge auf XY variabel und bilden daselbst eine Involution; die Doppelpunkte dieser Involution sind die Schnittpunkte D und D' von $f^{(2)}$ mit XY; sind sie reell, so giebt es also 2 gewisse Isophengen, die von D resp. D' aus als Kegelschnitte erscheinen und hier einen wirklichen Doppelpunkt besitzen. Die beiden Ebenen der Null-Isophengen schneiden sich in der Hauptaxe OZ.

b) Wenn Licht- und Sehrichtung nicht nur einer Hauptebene von $F^{(2)}$ parallel sind, sondern auch noch ihr Winkel von einer zweiten Hauptebene von $F^{(2)}$ gehälftet wird, so ist das Poldreieck XYZ gemeinsam für $f^{(2)}$ und alle $\varphi^{(2)}$ und $\psi^{(2)}$; alle Isophengen erscheinen parallel jeder Axe als Kegelschnitte, die hellsten Punkte sind die 4 Scheitel der x- und y-Axe.

7. Einer besonderen Untersuchung bedürfen die Paraboloide. Die unendlich ferne Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ ist für sie eine Tangentialebene; ihr Schnitt $f^{(2)}$ zerfällt also in 2 Geraden g_1 und g_2, welche sich im Berührungspunkte B schneiden, der zugleich auf der Hauptaxe des Paraboloids liegt und als sein unendlich ferner Mittelpunkt anzusehen ist. Daher sind alle Isophengoiden $\Psi^{(2)}$ Cylinder, deren Erzeugende parallel dieser Axe laufen; alle Isophengen haben in B einen reellen Doppelpunkt.

Die Kurvenschar der $\varphi^{(2)}$ in der unendlich fernen Ebene ist dieselbe geblieben wie vorher (Nr. 6), ihre Tangenten liefern inbezug auf das Paraboloid (ganz wie in Nr. 5) als Polaren die Erzeugenden der Isophengoiden-Cylinder $\Psi^{(2)}$; dabei ist aber zu bemerken, dafs jede Kurve $\varphi^{(2)}$ 2 Tangenten t_1 und t_2 hat, die sich in B schneiden, und deren Polaren deshalb auch in der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ liegen; somit hat jede Isophengoide 2 Erzeugende t_1' und t_2' in der unendlich

1) Diese Bedingung ist z. B. für die Isophoten einer Rotationsfläche immer erfüllt.

Digitized by Google

fernen Ebene, die nämlich die Tangenten der Isophenge im Doppelpunkt B sind. t_1' und t_2' liegen zu t_1 resp. t_2 inbezug auf g_1 und g_2 harmonisch. Die Geradenpaare t_1', t_2' sind an Stelle der Kurven $\psi^{(2)}$ (Nr. 6) getreten. Es giebt jedoch 2 Kurven $\varphi_{11}^{(2)}$ und $\varphi_{22}^{(2)}$ der Schar, welche selbst durch B gehen; für sie fallen t_1 und t_2 zusammen, in t_{11} resp. t_{22}; also berühren die beiden Isophengoiden die Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ in t_{11} resp. t_{22}', und die beiden Isophengen haben in B einen Rückkehrpunkt. Andererseits giebt es in der Schar der $\varphi^{(2)}$ je eine Kurve, die g_1 resp. g_2 berührt, dann sind g_1 resp. g_2 selbst Erzeugende der zugehörigen Cylinder; die fraglichen beiden Isophengen sind also Raumkurven dritter Ordnung, die durch g_1 resp. g_2 zu Kurven vierter Ordnung ergänzt werden.

Von dem zu jeder Isophenge gehörigen Poltetraeder (Nr. 5) fallen hier 2 Ecken in B zusammen; es giebt also nur noch 2 Punkte (in der unendlich fernen Ebene), von denen aus die Isophenge als Kegelschnitt erscheint. Diese können folgendermafsen bestimmt werden. Wir greifen eine Kurve der Schar der $\varphi^{(2)}$ heraus, ziehen an sie von B aus die schon genannten Tangenten t_1 und t_2 und aufserdem die Gerade b, welche inbezug auf diese Kurve $\varphi^{(2)}$ Polare von B ist. Inbezug auf das Paraboloid entsprechen nun diesen 3 Geraden 3 Polaren t_1', t_2', b'; t_1' und t_2' sind die schon genannten Erzeugenden der Isophengoide, welche in der unendlich fernen Ebene durch B gehen und zu t_1 resp. t_2 inbezug auf g_1 und g_2 harmonisch sind; b' dagegen ist eine Gerade, welche den Erzeugenden des Cylinders parallel läuft und inbezug auf diesen Cylinder die Polare der unendlich fernen Ebene ist. Suchen wir nun in dieser Ebene diejenigen beiden von B ausgehenden Strahlen q_1 und q_2, welche sowohl mit g_1 u. g_2, als auch mit t_1' u. t_2' harmonisch liegen, so wird b von q_1 und q_2 in den beiden gesuchten Eckpunkten C_1 und C_2 des Poldreiecks geschnitten. Es ist nämlich klar, dafs sowohl inbezug auf das Paraboloid als inbezug auf den Cylinder der Punkt C_1 Pol der Ebene $(b'g_2)$ und der Punkt C_2 Pol der Ebene $(b'q_1)$ ist.

8. In der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ haben wir also gleichzeitig zu betrachten: 1) die Schar der $\varphi^{(2)}$; 2) das feste Geradenpaar g_1, g_2, mit dem Schnittpunkte B; 3) die sämtlichen Polaren b dieses Punktes B inbezug auf alle Kurven $\varphi^{(2)}$. Diese Polaren bilden bekanntlich einen Strahlenbüschel $\beta^{(2)}$ zweiter Ordnung; zu beachten ist, dafs in ihm für die beiden Kurven $\varphi_{11}^{(2)}$ und $\varphi_{22}^{(2)}$ die Polaren t_{11} und t_{22} vorkommen; 4) den involutorischen Strahlenbüschel τ, welcher aus allen Tangentenpaaren t_1, t_2 gebildet wird, die von B an die Kurven $\varphi^{(2)}$ führen; seine Doppelstrahlen sind die eben genannten t_{11} und t_{22}; 5) den involutorischen Strahlenbüschel τ', welcher aus allen

Digitized by Google

Geraden t_1', t_2' gebildet wird, die resp. zu t_1, t_2 inbezug auf g_1, g_2 harmonisch liegen; seine Doppelstrahlen t_{11}' und t_{22}' liegen demnach zu t_{11} und t_{22} harmonisch; 6) den involutorischen Büschel $\varkappa$, welcher von allen Strahlenpaaren q_1, q_2 gebildet wird, welche sowohl g_1, g_2 als auch je ein Paar t_1', t_2' harmonisch trennen[1]); daraus folgt, dafs in ihm das Paar t_{11}, t_{11}' und das Paar t_{22}, t_{22}' vorkommen, während seine Doppelstrahlen g_1 und g_2 sind.

Die Schar der Kurven $\varphi^{(2)}$ ist nun projektiv zum Büschel $\beta^{(2)}$ und auch zum involutorischen Büschel τ, wenn jeder einzelnen Kurve $\varphi^{(2)}$ gerade derjenige Strahl von $\beta^{(2)}$ zugeordnet wird, der inbezug auf sie Polare von B ist, und ebenso das gerade an sie führende Tangentenpaar t_1, t_2; τ ist projektiv zu τ' nach der oben in 5) angegebenen Konstruktion; τ' beziehen wir auf $\varkappa$ in analoger Weise nach 6); mithin ist $\beta^{(2)}$ projektiv auf $\varkappa$ bezogen, und zwar so, dafs beide Büschel die Strahlen t_{11} und t_{22} entsprechend gemein haben; sie erzeugen[2]) aufser diesen beiden Geraden noch die Ortskurve der Eckpunkte C_1', C_2' der Poldreiecke (Nr. 7), eine Kurve dritter Ordnung mit dem Doppelpunkt B.

Es mögen auch hier wieder einige Sonderfälle betrachtet werden.

a) Wenn die Ebene der Licht- und Sehrichtung die Hauptaxe des Paraboloids enthält, d. h. wenn die Punkte B, F, F'' in einer Geraden liegen[3]), so geht die Polare b von B inbezug auf jede Kurve $\varphi^{(2)}$ durch den gemeinsamen Tripelpunkt Z aller Kurven $\varphi^{(2)}$ (Nr. **6**); alle Polaren b bilden einen Strahlenbüschel I. Ordnung β mit dem Scheitel Z, und die Punkte C_1' und C_2' entstehen als Schnitt dieses Strahlenbüschels mit dem hierzu projektiven involutorischen Büschel $\varkappa$; beide Büschel haben den Strahl BZ entsprechend gemein, folglich erzeugen beide Büschel aufser ihm als geometrischen Ort der C_1', C_2' einen Kegelschnitt.

b) Wenn die Ebene der Licht- und Sehrichtung auf der Hauptaxe des Paraboloids senkrecht steht, fällt B in den Punkt Z; alsdann ist die Polare b von B für alle Kurven $\varphi^{(2)}$ dieselbe, nämlich XY; auf ihr bilden die C' eine Punktinvolution; zu jedem Punkte der Geraden gehört eine Isophenge, die von ihm aus als Kegelschnitt erscheint; die

1) Die involutorische Eigenschaft dieses Büschels $\varkappa$ erkennt man aus seiner Konstruktion. Man lege durch B einen beliebigen Kegelschnitt, der g_1, g_2, t_1', t_2' resp. in G_1, G_2, T_1', T_2' schneide, und konstruiere auf dem Kegelschnitt die beiden Punkte Q_1''', Q_2''', welche G_2''', G_2''' als auch T_1''', T_2''' harmonisch trennen (Reye, l. c. S. 150, Fig. 62/63). Dabei geht Q_1Q_2 durch den festen Pol der Sehne G_1G_2; die Paare Q_1Q_2 bestimmen also eine Involution der Strahlen q_1, q_2.

2) Ein Büschel II. Ordnung und ein zu ihm projektiver involutorischer Büschel I. Ordnung erzeugen im allgemeinen eine Kurve fünfter Ordnung.

3) Dies würde also bei den Isophoten stets der Fall sein.

Digitized by Google

Doppelpunkte der Involution werden durch g_1 und g_2 ausgeschnitten (vgl. Nr. 6 (a)).

c) Fällt die Axe des Paraboloids in die Licht- oder Sehrichtung, z. B. B in F, so gehen von B aus dieselben beiden Tangenten t_1 und t_2 an alle Kurven $\varphi^{(2)}$ der Schar, und zwar nach den imaginären Kreispunkten der zur Axe senkrechten Ebenen, daher haben auch alle Isophengoiden dieselben beiden Geraden t_1' und t_2' mit der unendlich fernen Ebene gemein, die Isophengen projizieren sich also durch die Isophengoiden-Cylinder auf eine zur Axe senkrechte Ebene als Kegelschnitte mit parallelen und proportionalen Axen. Wenn es sich alsdann noch um ein Rotationsparaboloid handelt, so fallen g_1 und g_2 mit t_1 und t_2 und daher auch mit t_1' und t_2' zusammen, d. h. diese Kegelschnitte sind Kreise.[1]) Derselbe Satz gilt für das gleichseitige hyperbolische Paraboloid, denn dabei sind g_1 und g_2 reell und zu einander senkrecht, t_1 und t_2 sind durch sie harmonisch getrennt, und daher mit t_2' und t_1' identisch.

Berlin, den 31. Januar 1901.

1) Burmester, l. c. § 73.

Digitized by Google

Der Lotpunkt, ein neuer merkwürdiger Punkt des Dreiecks.

Von Kazimierz Cwojdziński in Berlin.

Man betrachtet in der Geometrie vielfach merkwürdige Punkte und Geraden, welche mehr oder weniger verwandt sind, und führt den Beweis für dieselben einzeln. Es kann zuweilen von Vorteil sein, einen allgemeinen Punkt oder Gerade einzuführen, deren Bildungsgesetz jene vereinzelten Gebilde als Spezialfälle umfafst; um so mehr, wenn das allgemeine Gebilde an und für sich interessante Eigenschaften aufweist, so dafs es nicht nur als Beweismittel angesehen zu werden braucht.

In diesem Sinne führen wir den *Lotpunkt* ein, welcher u. a. sowohl als allgemeiner Punkt des Feuerbachschen Kreises betrachtet werden kann, als auch die Höhenschnittpunkte der 4 Dreiecke des vollständigen Vierseits in sich fafst.

I.

Entstehung des Lotpunktes.

Seien die Seiten eines Dreiecks $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Fundamentalachsen eines trimetrischen Systems.

Eine beliebige Gerade habe die Gleichung

$$G \equiv k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 0. \tag{1}$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$\begin{cases} k_1 - k_2 \cos A_3 - k_3 \cos A_2 = \alpha_1, \\ k_2 - k_3 \cos A_1 - k_1 \cos A_3 = \alpha_2, \\ k_3 - k_1 \cos A_2 - k_2 \cos A_1 = \alpha_3, \end{cases} \tag{2}$$

wo A_i den der Seite $x_i = 0$ gegenüberliegenden Winkel bezeichnet, so lauten die Gleichungen der drei von den Ecken des Fundamentaldreiecks auf die Gerade G gefällten Lote bekanntlich

$$\begin{cases} E_1 \equiv \alpha_3 x_2 - \alpha_2 x_3 = 0, \\ E_2 \equiv \alpha_1 x_3 - \alpha_3 x_1 = 0, \\ E_3 \equiv \alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Digitized by Google

Die von den Fulspunkten derselben auf die zugehörigen Seiten gefällten Lote sind entsprechend

$$(4)\qquad \begin{cases} F_1 \equiv \begin{vmatrix} G, & E_1 \\ a_1, a_2\cos A_2 - a_3\cos A_3 \end{vmatrix} = 0, \\ F_2 \equiv \begin{vmatrix} G, & E_2 \\ a_2, a_3\cos A_3 - a_1\cos A_1 \end{vmatrix} = 0, \\ F_3 \equiv \begin{vmatrix} G, & E_3 \\ a_3, a_1\cos A_1 - a_2\cos A_2 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Da nun

$$F_1 + F_3 \equiv F_2$$

ist, so erhalten wir:

Theorem I. Fällt man von den Ecken eines Dreiecks auf eine Gerade Lote, so schneiden sich die von ihren Fußpunkten auf die zugehörigen Seiten des Dreiecks gefällten Lote in einem Punkte.

Der Punkt heifse *„Lotpunkt eines Dreiecks inbezug auf eine Gerade."*

II.

Beziehung zwischen einer Geraden und ihrem Lotpunkt.

Aus den beiden ersten Gleichungen von (4) ergiebt sich

$$(5)\quad (k_1^2+k_2^2+k_3^2)H_1 - 2H_1(k_2k_3\cos A_1 + k_3k_1\cos A_2 + k_1k_2\cos A_3) + L(k_1k_2\sin A_3 - k_3k_1\sin A_2) = 0,$$

$$(6)\quad (k_1^2+k_2^2+k_3^2)H_2 - 2H_2(k_2k_3\cos A_1 + k_3k_1\cos A_2 + k_1k_2\cos A_3) + L(k_2k_3\sin A_1 - k_1k_2\sin A_3) = 0,$$

wo

$$(7)\qquad \begin{cases} L = x_1\sin A_1 + x_2\sin A_2 + x_3\sin A_3, \\ H_1 = x_2\cos A_2 - x_3\cos A_3, \\ H_2 = x_3\cos A_3 - x_1\cos A_1. \end{cases}$$

Eliminieren wir aus (5) und (6) die beiden ersten Glieder, so erhalten wir, falls

$$-H_1 - H_2 = H_3$$

gesetzt wird:

$$(8)\qquad k_2k_3H_1\sin A_1 + k_1k_3H_2\sin A_2 + k_1k_2H_3\sin A_3 = 0.$$

Der hier fortgelassene Faktor L repräsentiert, gleich Null gesetzt, die unendlich ferne Gerade.

Die Gleichung (8) sowie eine der Gleichungen (5), (6) lassen sich als die Relationen zwischen den Koordinaten der Beziehungsgeraden und denen des Lotpunktes betrachten.

Wir knüpfen hieran folgende Bemerkungen:

Digitized by Google

Da die obigen Gleichungen in x_i vom ersten, in k_i vom zweiten Grade sind, so ist der Lotpunkt eindeutig bestimmt, falls die k_i gegeben sind.

Durchläuft ferner der Lotpunkt die Kurve (in Punktkoordinaten)

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

so erhalten wir mittelst Elimination von x_i zwischen dieser Gl. und Gl. (5) oder (6) und (8) die Gleichung der Enveloppe, welche die Beziehungsgerade umstreicht; wenn umgekehrt die Koordinaten der Geraden G einer Bedingung

$$\varphi(k_1, k_2, k_3) = 0$$

unterworfen werden, so können wir durch Elimination der k_i die Gleichung der Lotpunktkurve finden.

III.

Neue Definition des Feuerbachschen Kreises.

Wir untersuchen den Fall, daß die Beziehungsgerade durch den Umkreis-Mittelpunkt des Fundamentaldreiecks geht.

Die Gleichung dieses Punktes ist bekanntlich

$$k_1 \cos A_1 + k_2 \cos A_2 + k_3 \cos A_3 = 0. \tag{9}$$

Eliminieren wir mittelst derselben aus (5) und (6) die Quadrate der k, so erhalten wir:

$$k_2 k_3 H_1 \sin^2 A_1 \cos A_1 + k_3 k_1 \sin A_2 \cos A_2 (L \cos A_3 \cos A_1 + H_1 \sin A_2) - k_1 k_2 \sin A_3 \cos A_3 (L \cos A_1 \cos A_2 - H_1 \sin A_3) = 0, \tag{10}$$

$$k_3 k_1 H_2 \sin^2 A_2 \cos A_2 + k_1 k_2 \sin A_3 \cos A_3 (L \cos A_1 \cos A_2 + H_2 \sin A_3) - k_2 k_3 \sin A_1 \cos A_1 (L \cos A_2 \cos A_3 - H_2 \sin A_1) = 0. \tag{11}$$

Nun können wir mittelst Gleichung (8) aus (10) das Glied mit $k_2 k_3$, aus (11) dasjenige mit $k_3 k_1$ eliminieren, dann bleibt

$$\begin{cases} k_2 \sin A_3 D_2 - k_3 \sin A_2 D_3 = 0, \\ k_3 \sin A_1 D_3 - k_1 \sin A_3 D_1 = 0, \end{cases} \tag{12}$$

woraus zusammen mit (9):

$$\sin A_1 \cos A_1 D_2 D_3 + \sin A_2 \cos A_2 D_3 D_1 + \sin A_3 \cos A_3 D_1 D_2 = 0$$

oder

$$\frac{\sin 2A_1}{D_1} + \frac{\sin 2A_2}{D_2} + \frac{\sin 2A_3}{D_3} = 0. \tag{13}$$

Dabei ist gesetzt

$$\begin{cases} D_1 = -x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 + x_3 \cos A_3, \\ D_2 = +x_1 \cos A_1 - x_2 \cos A_2 + x_3 \cos A_3, \\ D_3 = +x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 - x_3 \cos A_3. \end{cases} \tag{14}$$

Digitized by Google

In Gleichung (13) haben wir den geometrischen Ort des Lotpunktes, wenn sich die zugehörige Gerade um den Umkreismittelpunkt des Fundamentaldreiecks dreht. Da nun $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $D_3 = 0$ die Verbindungsgeraden der Höhenfufspunkte im Fundamentaldreieck darstellen, so folgt:

Theorem II. Der geometrische Ort des Lotpunktes inbezug auf die Durchmesser des Umkreises ist der Kreis, welcher durch die Höhenfufspunkte des Dreiecks geht.

Für die parallelen, bezw. senkrechten Lagen des Durchmessers zu den Seiten fällt der Lotpunkt mit den Mitten der oberen Höhenabschnitte bezw. mit den Seitenmitten zusammen.

Demnach können wir dem Theorem II auch folgende Fassung geben:

Theorem III. Der Feuerbachsche Kreis eines Dreiecks läfst sich als geometrischer Ort der Lotpunkte inbezug auf die Durchmesser des Umkreises, oder kurz als Lotpunktkreis auffassen.

Im Anschlufs hieran seien noch folgende Theoreme mitgeteilt:

Theorem IV. Der Lotpunkt inbezug auf die Zentrale des Um- und eines der vier In- und Ankreise ist Berührungspunkt des letzteren mit dem Feuerbachschen Kreis.

Theorem V. Fällt man von einem Punkt Lote auf die Dreiecksseiten und trägt ihre Längen vom Höhenschnittpunkt aus auf den oberen Höhenabschnitten ab, so liegen die drei Teilpunkte und die drei Fufspunkte der gefällten Lote auf einer Ellipse, deren Mittelpunkt den Abstand des Punktes vom Höhenabschnitt halbiert.

IV.

Der verallgemeinerte Lotpunkt und die Lotpunktgerade.

Seien in Cartesischen Koordinaten drei Punkte $P_i \equiv (x_i, y_i) (i = 1, 2, 3)$ als Ecken eines Dreiecks gegeben. Schneiden wir von den Ordinaten Stücke ab, welche zu ihnen im Verhältnis $\lambda : 1$ stehen, und fällen von den Teilpunkten auf die zugehörigen Seiten Lote, so ergeben sich für die letzteren die Gleichungen

$$(15)\quad \begin{cases} T_1 \equiv y(y_2 - y_3) - \lambda y_1(y_2 - y_3) + (x_2 - x_3)(x - x_1) = 0, \\ T_2 \equiv y(y_3 - y_1) - \lambda y_2(y_3 - y_1) + (x_3 - x_1)(x - x_2) = 0, \\ T_3 \equiv y(y_1 - y_2) - \lambda y_3(y_1 - y_2) + (x_1 - x_2)(x - x_3) = 0, \end{cases}$$

zwischen welchen die Identität

$$T_1 + T_3 \equiv T_2$$

besteht. Wir haben somit

Theorem VI.[1]) *Teilt man drei von den Ecken eines Dreiecks auf*

1) Vgl. Salmon-Fiedler: Analytische Geom. der Kegelschn. 1860. Kap. IV, Aufg. 6.

Digitized by Google

eine Gerade gefällte Lote in gleichem Verhältnis, so schneiden sich die von den Teilpunkten auf die Gegenseiten gefällten Lote in einem Punkt.

Für $\lambda = 0$ geht dieses Theorem über in Theorem I; für $\lambda = 1$ liefert es den bekannten Satz über die Höhen.

Seien jetzt vier Punkte $P_i \equiv (x_i, y_i)(i = 1, 2, 3, 4)$ gegeben und durch dieselben die Geraden G_{12}, G_{23}, G_{34}, G_{41} gelegt, wo G_{ik} die Verbindung von P_i und P_k bedeutet.

Betrachten wir z. B. G_{12} als Beziehungsgerade des zu findenden Lotpunktes, so müssen wir von P_3 und P_4 auf dieselben Lote fällen, diese im Sinne des Obengesagten teilen und von den erhaltenen Teilpunkten wieder Lote auf die Geraden G_{24} und G_{23} fällen, dann wird auf den letzteren der gesuchte Lotpunkt liegen.

Die Gleichungen der beiden Teilpunktlote sind, wie eine kurze Rechnung zeigt:

$$(16)\qquad \begin{cases} (x - x_3)(x_4 - x_1) + (y - y_3)(y_4 - y_1) = (\lambda - 1)\frac{\Delta_3 \Delta_4}{\delta^2_{12}}, \\ (x - x_4)(x_3 - x_2) + (y - y_4)(y_3 - y_2) = (\lambda - 1)\frac{\Delta_3 \Delta_4}{\delta^2_{12}}, \end{cases}$$

wo

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\delta^2_{12} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Die Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergiebt

$$(17)\quad x(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) + y(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) = x_1 x_3 - x_2 x_4 + y_1 y_3 - y_2 y_4.$$

Dies ist die Gleichung des Ortes für den Lotpunkt inbezug auf eine unveränderliche Gerade, falls das Teilungsverhältnis λ variabel ist. Sie ist übrigens gleichbedeutend mit Gleichung (8).

Demnach:

Theorem VII. Der Ort der Lotpunkte (in der verallgemeinerten Bezeichnung) eines Dreiecks inbezug auf eine Gerade ist eine Gerade.

Sie werde *„Lotpunktgerade des Dreiecks inbezug auf die Gerade"* genannt.

V.

Die Lotpunktgerade des vollständigen Vierseits.

Ein vollständiges Vierseit besitzt vier Dreiecke, deren jedem eine Beziehungsgerade entspricht. Wir stellen die Frage nach der Lage der vier Lotpunktgeraden.

Digitized by Google

Die Symmetrie der Gleichungen (16) lehrt, dafs die Teilpunktlote z. B. für die Gerade G_{23} lauten:

$$(18)\qquad \begin{cases} (x-x_1)(x_4-x_2)+(y-y_1)(y_4-y_2)=(\lambda-1)\frac{\Delta_1\Delta_4}{\delta^2_{23}}, \\ (x-x_4)(x_1-x_2)+(y-y_4)(y_1-y_2)=(\lambda-1)\frac{\Delta_1\Delta_4}{\delta^2_{23}}, \end{cases}$$

wo

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Subtraktion derselben führt wieder zu Gleichung (17), daher:

Theorem VIII. Die vier Dreiecke eines vollständigen Vierseits besitzen nur eine Lotpunktgerade.

Diese merkwürdige Gerade ist also ein *vierfacher* geometrischer Ort von Lotpunkten. Die weiteren Sätze zeigen, dafs sie von anderen Standpunkten aus betrachtet noch mehr Bedeutung gewinnt.

Aus Theorem VIII folgt:

Theorem IX.[1]) *Die Höhenschnittpunkte der vier Dreiecke eines vollständigen Vierseits liegen in einer Geraden, der Lotpunktgeraden des Vierseits.*

Theorem X.[2]) *Die Lotpunktgerade ist identisch mit der Direktrix der dem Vierseit einbeschriebenen Parabel.*

Theorem XI. Der Umkreismittelpunkt des Diagonaldreiecks eines vollständigen Vierseits liegt auf der Lotpunktgeraden desselben.

Theorem XII. Die Summe der vier zu einem und demselben Lotpunkt gehörenden Teilverhältnisse λ, welche man erhält, falls man den Punkt der Reihe nach auf die vier Seiten bezieht, beträgt stets 2.

Wenn endlich h_i $(i=1,2,3,4)$ die Abschnitte sind, welche die vier Höhenabschnittpunkte auf der Lotpunktgeraden erzeugen, und l_i diejenigen der vier Lotpunkte mit $\lambda=0$, so bestehen für einen beliebigen Ursprung der Zählung die Relationen

$$\sum_i \frac{1}{h_i-l_i}=0 \qquad (i=1,2,3,4).$$

$$\sum_i \frac{h_i}{h_i-l_i}=2 \qquad (i=1,2,3,4),$$

Berlin, den 24. Dezember 1900.

1) Steiner: Crelles Journal **2**. 1827. Ges. W. I, 128.
2) Salmon-Fiedler: Kegelschnitte. 1860. Seite 247. Aufg. 2.

Digitized by Google

Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit des Herrn stud. math. Cwojdziński: „Der Lotpunkt, ein merkwürdiger Punkt des Dreiecks."

Von E. Jahnke in Berlin.

Wird der in Theorem IV der vorstehenden Notiz definierte Lotpunkt mit L_4 bezeichnet, so liefert Theorem I daselbst den speziellen Punkt L_0. Dieser ist als spezieller Fall auch in einem Punkte enthalten, dessen Entstehung Steiner[1]) in dem folgenden Lehrsatz mitgeteilt hat:

I) *„Fällt man aus einem willkürlichen Punkte D in der Ebene eines Dreiecks ABC auf die Seiten des letzteren Lote D_a, D_b, D_c, nimmt in diesen Loten drei beliebige Punkte a, b, c als Ecken eines anderen Dreiecks abc an, und fällt auf dessen Seiten aus den Ecken des gegebenen Dreiecks, in gehöriger Ordnung genommen, Lote Ad, Bd, Cd, so treffen diese einander allemal in irgend einem Punkte d."*[2])

Artet nämlich das zweite Dreieck in eine Gerade aus, so geht der Steinersche Punkt d in den Lotpunkt L_0 über.

Steiner fügt noch zwei Lehrsätze hinzu:

II) *„Nimmt man ähnlicherweise ein drittes Dreieck $a_1b_1c_1$ an, dessen Ecken in den nämlichen drei ersteren Loten liegen, so wird demselben auf gleiche Weise ein Punkt d_1 entsprechen* (I), *und es liegen alsdann die drei Durchschnittspunkte der drei Paare entsprechender Seiten des zweiten und dritten Dreiecks, d. h. die Durchschnittspunkte α, β, γ der Seitenpaare bc und b_1c_1, ca und c_1a_1, ab und a_1b_1 allemal in irgend einer Geraden $\alpha\beta\gamma$; und*

1) Crelles Journal **2**, 287—292; Ges. W. I, 157.

2) Für die Dreiecke ABC, abc hat Herr E. Lemoine den Ausdruck „triangles ortologiques" vorgeschlagen (vgl.: Note sur un faisceau de trois droites, Journ. de Math. spéc. de M. de Longchamps 1889, p. 63; und auch J. Neuberg: Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe. Mém. de l'Ac. des Sc. de Belgique. XLIV, p. VII.) und das für die Theorie der orthologen Dreiecke wichtige Theorem aufgestellt: „Sind zwei Dreiecke zweifach ortholog, so sind sie auch dreifach ortholog." Die dreifach orthologen Dreiecke sind dann von Herrn E. Lemoine in einer auf dem Congrès de Limoges A. F. A. S. 1890 vorgetragenen Abhandlung eingehend untersucht worden.

Digitized by Google

III) *diese Gerade $\alpha\beta\gamma$ ist allemal zu derjenigen Geraden dd_1, welche durch die beiden genannten Punkte d, d_1 geht, senkrecht.*"

Ich benutze diese Gelegenheit, um einen einfachen Beweis dieser Sätze mit Hilfe der Grafsmannschen Methoden zu geben, den mir Herr Caspary vor Jahren mitgeteilt hat. Das Casparysche Beweisverfahren ist um so interessanter, als es von dem Grafsmannschen Begriff der *Ergänzung* einer Strecke Gebrauch macht.

1. Fällt man von einem beliebigen Punkt P auf die Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ Lote und nimmt auf diesen bez. die beliebigen Punkte A, B, C an, so steht z. B. PA senkrecht auf A_2A_3. Daher hat man

$$(1)\qquad \begin{cases} A = P + \alpha_1 \mid \boldsymbol{a}_1, \\ B = P + \alpha_2 \mid \boldsymbol{a}_2, \\ C = P + \alpha_3 \mid \boldsymbol{a}_3, \end{cases}$$

wo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= A_2 - A_3, \\ \boldsymbol{a}_2 &= A_3 - A_1, \\ \boldsymbol{a}_3 &= A_1 - A_2. \end{aligned}$$

Aus (1) folgt

$$\begin{aligned} C - B = \boldsymbol{a} &= \alpha_3 \mid \boldsymbol{a}_3 - \alpha_2 \mid \boldsymbol{a}_2, \\ A - C = \boldsymbol{b} &= \alpha_1 \mid \boldsymbol{a}_1 - \alpha_3 \mid \boldsymbol{a}_3, \\ B - A = \boldsymbol{c} &= \alpha_2 \mid \boldsymbol{a}_2 - \alpha_1 \mid \boldsymbol{a}_1. \end{aligned}$$

Fällt man nun von A_1 das Lot auf BC, so mufs der Vektor zwischen dem Fufspunkt und A_1 proportional der Ergänzung von $\boldsymbol{a}$ sein, also proportional der Ergänzung von

$$\alpha_3 \mid \boldsymbol{a}_3 - \alpha_2 \mid \boldsymbol{a}_2$$

oder proportional

$$\alpha_3 (A_3 - A_1) - \alpha_2 (A_1 - A_2).$$

Das von A_1 auf BC gefällte Lot hat also die Form

$$\alpha_3 [A_3 A_1] - \alpha_2 [A_1 A_2].$$

Somit ergeben sich für die drei, von A_1, A_2, A_3 bez. auf BC, CA, AB gefällten Lote die Ausdrücke

$$\begin{aligned} &\alpha_3 [A_3 A_1] - \alpha_2 [A_1 A_2], \\ &\alpha_1 [A_1 A_2] - \alpha_3 [A_2 A_3], \\ &\alpha_2 [A_2 A_3] - \alpha_1 [A_3 A_1]. \end{aligned}$$

Da die Summe dieser Ausdrücke identisch verschwindet, so gehen die drei Lote durch *einen* Punkt O, dessen Ausdruck lautet:

$$(2)\qquad (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2)\, O = \alpha_2\alpha_3 A_1 + \alpha_3\alpha_1 A_2 + \alpha_1\alpha_2 A_3.$$

Digitized by Google

2. Auf den Loten PA, PB, PC sollen jetzt weiter bez. die Punkte A', B', C' beliebig angenommen werden, dann folgt

$$(1') \qquad \begin{cases} A' = P + \alpha_1' \,|\, \boldsymbol{a}_1, \\ B' = P + \alpha_2' \,|\, \boldsymbol{a}_2, \\ C' = P + \alpha_3' \,|\, \boldsymbol{a}_3. \end{cases}$$

Als Schnittpunkt der Lote von A_1 auf $B'C'$, von A_2 auf $C'A'$, von A_3 auf $A'B'$ ergiebt sich dann

$$(2') \quad (\alpha_2'\alpha_3' + \alpha_3'\alpha_1' + \alpha_1'\alpha_2')\, O' = \alpha_2'\alpha_3' A_1 + \alpha_3'\alpha_1' A_2 + \alpha_1'\alpha_2' A_3.$$

Aus (2) und (2') fliefst:

$$(3) \quad \alpha\alpha'(O - O') = \alpha_1\alpha_1'(\alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2')\,\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\alpha_2'(\alpha_3\alpha_1' - \alpha_1\alpha_3')\,\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\alpha_3'(\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1')\,\boldsymbol{a}_3,$$

wo

$$\alpha = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2,$$
$$\alpha' = \alpha_2'\alpha_3' + \alpha_3'\alpha_1' + \alpha_1'\alpha_2'.$$

Nun sind die Dreiecke ABC und $A'B'C$ perspektiv, wie die Konstruktion und auch die aus (1) und (1') folgenden Formeln

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha_1 A' = \alpha_1' A - (\alpha_1' - \alpha_1)\, P, \\ \alpha_2 B' = \alpha_2' B - (\alpha_2' - \alpha_2)\, P, \\ \alpha_3 C' = \alpha_3' C - (\alpha_3' - \alpha_3)\, P \end{cases}$$

lehren. Daher liegen die Desarguesschen Punkte

$$[BC\ B'C'] = P_1,$$
$$[CA\ C'A'] = P_2,$$
$$[AB\ A'B'] = P_3$$

in einer Geraden.

Für diese Punkte ergiebt sich aus (4) die Darstellung

$$(\alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2')\, P_1 = \alpha_2'(\alpha_3' - \alpha_3)\, B - \alpha_3'(\alpha_2' - \alpha_2)\, C,$$
$$(\alpha_3\alpha_1' - \alpha_1\alpha_3')\, P_2 = \alpha_3'(\alpha_1' - \alpha_1)\, C - \alpha_1'(\alpha_3' - \alpha_3)\, A,$$
$$(\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1')\, P_3 = \alpha_1'(\alpha_2' - \alpha_2)\, A - \alpha_2'(\alpha_1' - \alpha_1)\, B,$$

woraus

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha_{23}(P_2 - P_3) = \alpha_1\alpha_2'\alpha_3'\,\boldsymbol{a} + \alpha_2\alpha_3'\alpha_1'\,\boldsymbol{b} + \alpha_3\alpha_1'\alpha_2'\,\boldsymbol{c} \\ \qquad = \alpha_1\alpha_1'(\alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2') \,|\, \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\alpha_2'(\alpha_3\alpha_1' - \alpha_1\alpha_3') \,|\, \boldsymbol{a}_2 \\ \qquad\qquad + \alpha_3\alpha_3'(\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1') \,|\, \boldsymbol{a}_3, \end{cases}$$

wo

$$\alpha_{23} = \frac{(\alpha_2\alpha_1' - \alpha_1\alpha_2')(\alpha_1\alpha_3' - \alpha_3\alpha_1')}{\alpha_1' - \alpha_1}.$$

Die Vergleichung der rechten Seiten von (3) und (5) liefert

$$\alpha\alpha'(O - O') = \alpha_{23} \,|\, (P_2 - P_3)$$

d. h. die Gerade $O - O'$ steht senkrecht auf der Desarguesschen Geraden.

Berlin, den 24. Januar 1901.

Digitized by Google

Charles Hermite.

Am 14. Januar 1901 verschied zu Paris Charles Hermite, der Nestor der Mathematiker, der anerkannte Führer und Meister der französischen Schule. Mit ihm ist ein Mann dahingegangen, der durch die Macht seines Genius, welche sich mit einer unendlichen Güte des Herzens paarte, einen gewaltigen Einfluſs auf seine mathematischen Zeitgenossen ausgeübt hat. Nicht viele Mathematiker von Namen dürfte es geben, welche nicht in persönlichen oder schriftlichen Beziehungen zu dem einzigen Manne gestanden haben.

Geboren am 25. XII. 1822 in Dieuze, einem Orte der späteren deutschen Reichslande, hat Hermite für die deutsche Wissenschaft wie für die deutschen Gelehrten stets eine besondere Zuneigung empfunden. Zwanzig Jahre alt, war er soeben in die École Polytechnique eingetreten, als er auf den Rat Liouvilles an Jacobi schrieb, um diesem die Resultate seiner Untersuchungen über die Transformation der Abelschen Funktionen mitzuteilen. Darauf erhielt er von Jacobi unter dem 6. August 1845 eine Antwort, welche mit den Worten schliesst:

„Ne soyez pas fâché, Monsieur, si quelques-unes de vos découvertes se sont rencontrées avec mes anciennes recherches. Comme vous dûtes commencer par où je finis, il y a nécessairement une petite sphère de contact. Dans la suite, si vous m'honorez de vos communications, je n'aurai qu'à apprendre."

Die Erinnerung an diesen Briefwechsel mit Jacobi erfüllte Hermite sein ganzes Leben lang mit besonderer Genugthuung, wie sie noch aus einem seiner letzten Briefe (vgl. S. 20) hervorleuchtet.

„ . . . J'ai toujours été et jusqu'à mon dernier jour je serai encore un disciple de vos grands géomètres, de vos maîtres illustres, Gauſs, Jacobi, Dirichlet."

Im Jahre 1856 wurde der erst 34jährige Hermite Mitglied der Pariser Akademie, 1867 erfolgte seine Ernennung zum Professeur à l'École Polytechnique, 1868 zum Professeur à la Faculté des Sciences, und 1884 wurde er zum auswärtigen Mitglied der Berliner Akademie gewählt.

Es kann an dieser Stelle nicht meine Aufgabe sein, die wissenschaftlichen Leistungen des groſsen Franzosen zu würdigen, das hieſse

Digitized by Google

die Geschichte der Mathematik in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts schreiben. Ich begnüge mich aus der langen Reihe seiner Resultate die unvergänglichen Entdeckungen hervorzuheben, welche seinen Namen in der Analysis, Algebra und Arithmetik unsterblich machen.

Als diejenigen Leistungen, welche Hermites Namen in die weitesten Kreise getragen haben, müssen die Auflösung der Gleichung fünften Grades mittels der elliptischen Funktionen und der Nachweis für die Transcendenz der Exponentialfunktion genannt werden. Die Methode, welche den Meister zu dem letzten Resultat führte, erwies sich von bedeutender Tragweite. Gelang es doch Herrn Lindemann mit ihrer Hilfe, die Lösung des uralten Problems von der Quadratur des Kreises als unmöglich nachzuweisen.

Aus der schier unerschöpflichen Fülle von Resultaten, um welche Hermite die Theorie der elliptischen Funktionen bereichert hat, ist als eines der wichtigsten und bekanntesten jene Fundamentalformel zu nennen, vermöge deren sich die elliptischen Funktionen analog den rationalen Funktionen in Partialbrüche zerlegen lassen.

Der schon von Jacobi entdeckte merkwürdige Zusammenhang der elliptischen Funktionen mit arithmetischen Wahrheiten wurde auch für Hermite eine Quelle wichtiger Formeln über die Klassenanzahl der quadratischen Formen.

Das Problem, die Lamésche Differentialgleichung zu integrieren, führte den Meister zur Einführung und zum Studium der doppeltperiodischen Funktionen zweiter Art, und bot ihm zugleich den Anlafs, seine Methoden und Ergebnisse auf Probleme der Mechanik anzuwenden. In den berühmten Applications des fonctions elliptiques werden u. a. die Rotation eines starren Körpers, die elastische Linie und die Bewegung des konischen Pendels behandelt. Es ist dies eine der wenigen Gelegenheiten, wo sich Hermite auf Anwendungen der reinen Mathematik eingelassen hat.

Die durch Cayley, Sylvester und Aronhold geschaffene Theorie der algebraischen Formen verdankt dem grofsen Franzosen ihre Vervollkommnung. Es genüge unter seinen glänzenden Resultaten auf die Entdeckung der schiefen Invarianten hinzuweisen.

Das Bild von den wissenschaftlichen Leistungen Hermites würde ein unvollständiges sein, wollte ich nicht seine berühmten Vorlesungen an der École Polytechnique wenigstens erwähnt haben, durch welche die Entdeckungen der Gaufs, Abel, Jacobi, Cauchy, sowie seine eigenen Ergebnisse in die weitesten Kreise getragen wurden.

Dem Archiv ist das Glück zuteil geworden, noch unter den gütigen Augen des Meisters zu neuem, hoffnungsfrohem Leben zu erstehen.

Digitized by Google

Es kann sich rühmen, einen Charles Hermite zum Mitarbeiter gehabt zu haben, bringt doch das gegenwärtige Doppelheft der neuen Reihe die letzte Arbeit aus seiner Feder.

Als die Redaktion Anfang November des vorigen Jahres Hermite die Bitte aussprach, er möchte durch eine Notiz die neue Serie des Archivs eröffnen, da begnügte sich der 78jährige Meister in seiner schon so oft bewährten freundlichen Gesinnung nicht mit der Zusendung eines wissenschaftlichen Beitrages. Die Redaktion empfing zugleich ein ausführliches Programm, worin er seine Ansichten und Wünsche bezüglich des mathematischen Unterrichts an den Mittel- und Hochschulen darlegt.

Was schon aus diesem Briefe vom 25. XI. 1900 hervorgeht, betont er noch einmal in seinem letzten an mich gerichteten Brief vom 6. XII. 1900, nämlich:

Que si les points fondamentaux de la science, objet de tant de travaux maintenant, doivent trouver un écho auprès des commençants, ce n'est pas au début, c'est lorqu'ils sont suffisamment avancés qu'il convient et dans une mesure convenable de les signaler à leur attention.

Das kostbare Vermächtnis des verstorbenen Meisters ist in diesem Heft an erster Stelle abgedruckt; ihm folgt die letzte Arbeit von Charles Hermite.

Berlin, den 14. Februar 1901. E. JAHNKE.

Digitized by Google

Rezensionen.

J. M. Brückner. Geschichtliche Bemerkungen zur Aufzählung der Vielfache. Zwickau 1897, R. Zückler.

Die vorliegende Schrift bietet eine Würdigung der Versuche, welche zur Lösung des Steinerschen Problems: die möglichen Formen der Polyeder einer bestimmten Flächenzahl (bezw. Ecken- oder Kantenzahl) zu bestimmen, gemacht worden sind. Dieses Problem hat bis heute noch keine endgültige Antwort gefunden und kann auch, wie der Verf. in der Einleitung ausführt, keine Antwort finden, in dem Sinne wie Steiner seine Frage gestellt hat. Den Grund hierfür findet der Verf. in den Resultaten, zu denen Herr Eberhard in seiner Morphologie der Polyeder gelangt ist. Herr Eberhard löst das Problem der Klassifikation der Polyeder in dem Sinne, dafs er zeigt, wie die Frage formuliert werden mufs, wenn sie überhaupt einer Beantwortung fähig sein soll.

Nachdem der Verf. noch auf die Klassifikation der Polyeder nach dem Prinzip der Symmetrie hingewiesen hat, wie sie Kirkman und Camille Jordan behandelt haben, werden die Methoden besprochen, die angegeben worden sind, um die möglichen Formen der Vielflache von geringer Seitenzahl, vom Vierflach ausgehend, abzuleiten.

Als naheliegendste, weil natürlichste Methode bot sich die Erzeugung der n-Flache aus den $(n-1)$-Flachen durch Schnitte an diesen Gebilden selbst dar. Sie ist von Möbius und Cayley benutzt worden. Sie hat den Vorteil, dafs nicht leicht ein mögliches Vielflach übersehen wird, den Nachteil, dafs man viele Typen auf vielerlei Weise wiederholt erhält, und, was wesentlich ist, dafs zur Auffindung der Vielflache einer bestimmten Flächenzahl n die Kenntnis der $(n-1)$-Flache nötig ist.

Im Gegenhatz zu dieser gestatten die beiden folgenden Methoden eine von den $(n-1)$-Flachen unabhängige Ableitung der n-Flache.

An zweiter Stelle kommt zunächst die künstlichere Methode der Stammflächen zur Besprechung, welche von Eberhard nur zur Ableitung der allgemeinen Siebenflache verwendet worden ist. Dem schon hervorgehobenen Vorteil dieser Methode stehen manche Nachteile gegenüber; einmal wird die Methode schon für vier Stammflächen recht kompliziert, und zweitens müssen erst sämtliche Stammsysteme abgeleitet werden, ehe behauptet werden kann, dafs kein Vielfach unentdeckt geblieben ist.

Eine dritte Methode ist von Kirkman und Hermes ausgebildet worden. Auch sie liegt für die einfachsten Formen auf der Hand; doch mufs bezweifelt werden, ob sie für kompliziertere Gestalten noch praktische Verwendung finden kann. E. Jahnke.

Digitized by Google

E. Wrobel, Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra, enthaltend die Formeln, Lehrsätze und Auflösungsmethoden in systematischer Anordnung und eine grofse Anzahl von Fragen und Aufgaben. Erster Teil. Pensum der Tertia und Untersekunda. Dritte verbesserte Auflage. Rostock 1898, Werther. XII. und 320 S.

Bezüglich der Vorzüge dieses brauchbaren Werkes sei auf die Besprechung der im April 1889 erschienenen ersten Auflage verwiesen. Die neue Auflage zeigt nur geringe Veränderungen gegenüber der vorhergehenden. Wie schon bei der zweiten Auflage, ist auch hier ein Anhang über die quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten nebst einer hinreichenden Menge von Aufgaben beigegeben worden. E. Jahnke.

H. Hartl. Aufgabensammlung aus der Arithmetik und Algebra. Für den Unterrichtsgebrauch und für das Selbststudium zusammengestellt und methodisch geordnet. Mit 19 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig u. Wien 1898, F. Deuticke. 305 S. fl. 1,80.

— **Die Rechenergebnisse der Aufgaben.** Mit einer Figur. 122 S. fl. 1,20.

Es ist eine reichhaltige Sammlung, die, zunächst für die Staatsgewerbeschule in Reichenberg geschrieben, für das Pensum eines Gymnasiums bis zur Prima ausreichen dürfte. Jeder Aufgabengruppe sind eine Reihe geschickt ausgewählter Fragen vorgesetzt, die den Schüler veranlassen sollen, sich über die anzuwendenden Regeln Klarheit zu verschaffen. Von besonderem Interesse sind die eingekleideten Aufgaben, welche nicht blofs, wie üblich, der Geometrie, Physik, Chemie, Astronomie, Feldmefskunst entnommen sind, sondern zu einem beträchtlichen Teile der Technik, wie Elektrotechnik, Maschinenbau, Baugewerbe angehören.

Übrigens ist das Buch aus einer älteren Sammlung desselben Verfassers (aus dem Jahre 1894) durch Umarbeitung und Erweiterung hervorgegangen. Neu aufgenommen sind Kettenbrüche, unbestimmte Gleichungen zweiten Grades, die Kombinationslehre, der binomische Lehrsatz, arithmetische Reihen zweiter Ordnung und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Beim Vergleich der beiden Ausgaben fiel dem Referenten auf, dafs der Verf. auch in der neuen Sammlung „Reservoire“ schreibt und von dem „Erlag einer Prämie“ sowie von dem „Augenblicke der Einholung eines Boten“ spricht.

Sieht man von diesen und anderen Äufserlichkeiten ab, welche den Norddeutschen fremdartig berühren, so kann die Sammlung auch in ihrer neuen Gestalt den Fachgenossen empfohlen werden. E. Jahnke.

G. Kober. Die Grundgebilde der neueren Geometrie. Eine geordnete Zusammenstellung ihrer Um- und Abbildungen 1. und 2. Ordnung. Erster Teil: Die Grundgebilde der Ebene. Hannover und Leipzig 1898, Hahn. 95 S.

„Die Art und Weise, wie v. Staudt und nach ihm Reye die Steinersche Begründung der allgemeinen Projektivität durch das metrische Gesetz von der Gleichheit der Doppelverhältnisse dadurch umgehen, dafs sie das an-

Digitized by Google

harmonische Verhältnis durch das harmonische Verhältnis ersetzen und vier harmonische Punkte als den Diagonalschnitt eines vollständigen Vierecks, im Grunde also eine Abhängigkeit der ersten Stufe durch eine Abhängigkeit der zweiten Stufe, definieren, kann, weil dem Stufengange widersprechend, als vollkommen noch nicht bezeichnet werden."

Um zu einer erschöpfenden Erklärung der allgemeinen Projektivität zu gelangen, mufs man, wie der Verf. des weiteren darlegt, an dem perspektiven Zusammenhang festhalten. In Vereinfachung dieses zuerst von Herrn Thomae ausgesprochenen Gedankens nennt der Verf. zwei perspektiv liegende Grundgebilde, d. h. zwei Grundgebilde einer Stufe, welche einander oder ein anderes Grundgebilde derselben Stufe tragen, Um- oder Abbildungen von einander, irgend zwei Um- oder Abbildungen von einander aber projektiv.

Auf dieser Grundlage giebt der Verf., unter vorläufiger Beschränkung auf die Ebene, eine Darstellung der Um- und Abbildungen erster und zweiter Ordnung. E. Jahnke.

K. Bochow. Grundsätze und Schemata für den Rechen-Unterricht an höheren Schulen. Mit einem Anhange: Die periodischen Dezimalbrüche nebst Tabellen für dieselben. Berlin 1898, O. Salle. 74 S. M. 1,20.

Es ist ein Versuch, im Rechenunterricht eine gröfsere Einheitlichkeit durch Festsetzungen in Bezug auf die Methode und auch in Bezug auf gewisse Äufserlichkeiten herbeizuführen.

Angehängt ist eine elementare Darstellung der Theorie der periodischen Dezimalbrüche mit zahlreichen Beispielen.

Sicherlich wird der eine oder andere der Fachgenossen dem Büchelchen manchen brauchbaren Wink entnehmen können. E. Jahnke.

Močnik-Spielmann. Geometrische Anschauungslehre für Unter-Gymnasien. I. Abteilung. 25. veränderte Auflage. 82 S. fl. 0,75. II. Abteilung. 20. veränderte Auflage. Wien und Prag 1898, F. Tempsky. 91 S. fl. 0,75.

Močnik-Neumann. Lehrbuch der Arithmetik für Unter-Gymnasien. I. Abteilung. 35. veränderte Auflage. 124 S. fl. 0,90. II. Abteilung. 26. veränderte Auflage. Wien und Prag 1898, F. Tempsky. 110 S. fl. 0,80.

— **Lehrbuch der Arithmetik und Algebra** nebst einer Aufgaben-Sammlung für die oberen Klassen der Mittelschulen. 25. umgearbeitete Auflage. Wien und Prag 1898, F. Tempsky. 306 S. fl. 1,85.

Das erste Buch bringt die Planimetrie und die Stereometrie in einer durchaus ansprechenden Form. Die Darstellung ist durch Klarheit und Kürze des Ausdrucks in gleicher Weise ausgezeichnet. Bemerkenswert ist, dafs jedem Paragraphen eine Reihe von Übungsaufgaben beigegeben sind, deren Einkleidung mannigfach wechselt.

Das zweite Buch bietet eine recht brauchbare Einführung in das Rechnen mit den algebraischen Zahlen. Doch dürfte das sechste Kapitel,

Digitized by Google

wo das Ausziehen der Kubikwurzel aus absoluten Zahlen und algebraischen Ausdrücken gelehrt wird, besser wegzulassen sein.

In dem dritten Buch wird das bekannte Pensum aus der Arithmetik und Algebra bis zu den quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten, den unbestimmten Gleichungen, Kettenbrüchen, Progressionen und der Kombinationslehre behandelt.

Ein Anhang enthält die goniometrische Auflösung der quadratischen Gleichungen, ein Kapitel über die extremen Werte einer Funktion, ferner höhere numerische Gleichungen und die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen.

Beigegeben ist (S. 191—306) eine Aufgabensammlung, die eine Fülle brauchbaren Materials enthält. Allerdings darf auch hier nicht verschwiegen werden, dafs eine Reihe von Aufgaben als Künsteleien, die dem Fachmathematiker nie unter die Augen kommen, besser weggeblieben wären.

E. Jahnke.

K. Schwering. Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten. Zweite Auflage. Freiburg i. B. 1899, Herder. 80 S. M. 1,00.

„Beim Jugendunterricht ist auch in der Arithmetik der Erfolg nicht durch grundlegenden streng gegliederten Lehraufbau, sondern nur durch allmählichen Fortschritt an der Hand vielfacher und nachhaltiger Übung zu erreichen. Keine Rechnung ohne Probe, kein Satz ohne Zahlenbeispiel.“ Diesen Grundsätzen wird wohl kein erfahrener Fachmann seine Beistimmung versagen. Ebenso ist es zu billigen, dafs in der Lehre von den Potenzen und Wurzeln unter Ausscheidung alles überflüssigen Lernstoffs nur wissenschaftlich und praktisch wichtige Erscheinungen zur Behandlung gelangt sind. Dafs z. B. der Verf. von negativen und gebrochenen Wurzelexponenten ganz abgesehen hat, dafs er das Verfahren, die Kubikwurzel ohne Logarithmen auszuziehen, bei Seite gelassen hat, ist hiernach selbstverständlich.

Das Lehrbuch verrät an allen Stellen den tüchtigen Mathematiker und kann den Fachgenossen aufs angelegentlichste empfohlen werden.

E. Jahnke.

K. Schwering. 100 Aufgaben aus der niederen Geometrie nebst vollständigen Lösungen. Mit 104 Abbildungen. Zweite verbesserte Auflage. Freiburg i. B. 1899, Herder. 168 S. M. 2,00.

Der Besprechung der ersten Auflage hat Ref. wenig hinzuzufügen. Wie vorauszusehen war, hat die schöne Sammlung grofsen Anklang gefunden.

Die neue Auflage unterscheidet sich von der ersten durch eine kleine Sammlung von Übungen, die als Anhang beigegeben worden sind.

E. Jahnke.

E. Rudert. Grundlagen zu einer Geometrie der Kugel nach Grofsmanns Ausdehnungslehre. Abhandlung zum 8. Jahresbericht der III. städtischen Realschule zu Leipzig. 1899. 44 S.

Der Verf. entwickelt in der vorliegenden Programmarbeit die Geometrie des sphärischen Dreiecks mit Hilfe der Grafsmannschen Methode. Um

Digitized by Google

dieses immerhin bescheidene Resultat zu erlangen, hat der Verf. einen von dem Grafsmannschen abweichenden Apparat von Benennungen und Bezeichnungen nötig, der auf den ersten dreizehn Seiten mitgeteilt und begründet wird.

Ref. ist der Meinung, dafs es im Interesse der Verbreitung der Grafsmannschen Ideen liegt, an dem wunderbaren und so wohldurchdachten Aufbau der Ausdehnungslehre, vorläufig wenigstens, nicht zu rütteln und auf den von Grafsmann selbst geschaffenen Fundamenten wirklich neue Resultate zu entwickeln. E. Jahnke.

J. Alexandroff. Problèmes de géométrie élémentaire groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution. Traduit du russe, sur la sixième édition par D. Aitoff. Paris 1899, A. Hermann. 154 p.

Ähnlich wie in dem bekannten Buch von J. Petersen sind auch hier die Aufgaben nach den Methoden, die zu ihrer Lösung führen, geordnet. Während aber jenes nur eine verhältnismäfsig geringe Anzahl von Problemen enthält, bietet die vorliegende Sammlung nahe an tausend Aufgaben und Lehrsätze. Jedes Kapitel beginnt mit einer Darlegung der Methode (geometrische Örter, Ähnlichkeit, Umkehrung des Problems, Geometrie, Translation, Rotation, Inversion, Anwendung der Algebra auf die Geometrie), sodann folgen die vollständigen Lösungen einer grofsen Reihe typischer Probleme, und hieran schliefsen sich zahlreiche Übungsaufgaben. Als ein lehrreiches Beispiel, wie der Verf. den Schüler zum Lösen von Aufgaben anleiten will, mag auf die Aufgabe: „Ein Viereck aus den Winkeln und Diagonalen zu konstruieren" besonders hingewiesen werden.

Ref. kann die Sammlung der Aufmerksamkeit der Fachgenossen warm empfehlen. E. Jahnke.

R. Herrmann. Elementarmethodische Behandlung der Logarithmen und ihrer Anwendungen für Seminare, Gymnasien, Realschulen, technische Lehranstalten und zum Selbstunterrichte. Gotha 1899, F. Thienemann. 63 S. M. 1,20.

Vorliegende Arbeit ist von einem Seminaristen für Seminaristen geschrieben und darf als ganz brauchbar bezeichnet werden. Wenn der Verf. übrigens von „der unendlichen Basis e" spricht oder an anderer Stelle behauptet: „Mit Ausnahme der dekadischen Einheiten sind alle irrational", so sind dies wohl nur schiefe Ausdrücke, die in einer neuen Auflage zu vermeiden sein würden. E. Jahnke.

R. Foth. Anfangsgründe der Zahlen- und Raumgröfsen-Lehre. Im Auftrage der früheren Königlich Preufsischen General-Inspektion der Artillerie und mit Zustimmung der jetzigen Königlich Preufsischen General-Inspektion der Fufs-Artillerie zum Gebrauche als Leitfaden bei dem mathematischen Unterrichte in den Regiments-Schulen der Artillerie, sowie zur Benutzung beim Selbstunterrichte. Fünfte Auflage. Hannover, Berlin 1899, C. Meyer (Gustav Prior). 300 S. M. 3,00.

Digitized by Google

„Das vorliegende Lehrbuch ist in erster Linie für den Unterricht an den Regimentsschulen, also für Erwachsene bestimmt, von denen der gröfsere Teil nur geringe Vorkenntnisse im praktischen Rechnen mitbringt und doch in der Zeit von sechs Monaten, bei wöchentlich acht Unterrichtsstunden eine sichere, abgeschlossene Grundlage in der Zahlen- und Raumgröfsenlehre erlangen soll.“ Diesem Zweck entsprechend weicht die gewählte Darstellungsweise von der in den Schulbüchern üblichen nicht unerheblich ab, insbesondere mufste vielfach auf Strenge in der Ableitung von Sätzen verzichtet werden.

Das Buch besteht aus zwei Teilen, der Zahlenlehre, wo die Grundrechnungen, die Verhältnisse und Proportionen, die bürgerlichen Rechnungsarten, die Potenzen und Wurzeln behandelt werden, und der Geometrie, wo die Planimetrie und Stereometrie (Erklärung der wichtigsten Körperformen und Berechnung der Körper) gelehrt wird.

Auch für andere als Regimentsschulen brauchbar sind die zahlreich eingestreuten Übungsaufgaben des ersten und des zweiten Teils. Gerade ihres militärischen Gewandes halber möchte Ref. die Aufmerksamkeit der Herausgeber von Aufgabensammlungen auf sie gelenkt haben.

Bemerkenswert ist auch der Anhang, wo das Abstecken von Linien und Winkeln im Gelände behandelt wird und einige einfache Aufgaben der Vermessungskunst gelöst werden. E. Jahnke.

F. G. Gaufs. Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Zum Gebrauche für Schule und Praxis. 60. Aufl. Halle a. S. 1899, E. Strien. 166 + XXXIV S. M. 2,50.

Vorliegende Auflage ist gleichlautend mit der 22. und allen folgenden Auflagen, ausgenommen die Tafeln XII (Dimensionen des Erdsphäroids) und XIII (Naturkonstanten), wo die Ergebnisse der neuesten Untersuchungen berücksichtigt worden sind. E. Jahnke.

F. G. Gaufs. Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Handtafel für Dezimalteilung des Quadranten. Zweite Auflage. Halle a. S. 1899, E. Strien. 7 S. M. 0,80.

Von der Erwägung ausgehend, dafs die Genauigkeit vierstelliger Logarithmen für zahlreiche logarithmische Rechnungen als ausreichend anzusehen ist, hat sich der verdiente Verfasser der fünfstelligen Logarithmentafel entschlossen, ebenfalls eine vierstellige Tafel herauszugeben. Die innere Einrichtung der letzteren entspricht durchaus derjenigen der ersteren, insbesondere ist auch diese behufs Erleichterung der Interpolation mit möglichst vollständigen Proportionaltäfelchen versehen.

Für die äufsere Einrichtung ist vorzugsweise der Gesichtspunkt mafsgebend gewesen, das so überaus lästige Blättern entbehrlich zu machen. Dies wird dadurch erreicht, dafs man die sechs Seiten der Tafel der Länge nach von einander trennt und nach Art der Generalstabskarten auf Leinwand oder Papptafeln, die durch Leinwandfalze mit einander verbunden sind, klebt. Die Erläuterungen (Seite 7) werden auf der Rückseite der Leinwand oder Pappe, und zwar auf der Rückseite der ersten Seite einen Platz finden können.

Digitized by Google

Wegen der Dezimalteilung des Quadranten wird die so überaus handliche Tafel vorläufig an den Schulen nicht verwendbar sein.

E. Jahnke.

C. Rohrbach. Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst einigen physikalischen und astronomischen Tafeln, für den Gebrauch an höheren Schulen. Zweite, durchgesehene und vermehrte Auflage. Gotha 1899, Thienemann. 36 S. M. 0,60.

„Die Einrichtung der Tafel ist dem seit Bremikers sechsstelliger Tafel (1852) allgemein eingebürgerten Muster nachgebildet mit nur einigen leicht erkennbaren Abweichungen, unter denen die Anfügung einer Spalte mit der Überschrift 10 die hauptsächlichste ist; sie erleichtert durch Erhöhung der Symmetrie die Übersicht und vor allem die Interpolation, da man nicht genötigt ist, zur Bildung der Differenz in die folgende Zeile überzugehen."

Die neue Auflage unterscheidet sich von der vorhergehenden durch eine Tafel für *lg sin* und *lg tg* der ersten 5 Grade mit dem Intervall von 0,01°, welche die goniometrische Haupttafel (Intervall 0,1°) nunmehr vollständig ergänzt, während für die Freunde der Minutenteilung die entsprechende ältere Tafel beibehalten ist. Ebenfalls neu sind einige dreistellige Logarithmentäfelchen sowie eine kleine Tafel für Potenzen und Wurzeln.

Angehängt ist der zweiten Auflage auch eine graphische Darstellung des Verlaufes der goniometrischen Funktionen. E. Jahnke.

H. Raydt. Lehrbuch der Elementarmathematik, Planimetrie, Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie, Pensum bis zur Einjährig-Freiwilligen-Prüfung für höhere Schulen und zum Selbststudium. Leipzig 1899, M. Hesse. 253 S. M. 2,70.

„Es ist mir wohl bewufst," heifst es in der Vorrede, „dafs das vorliegende Buch vom streng wissenschaftlichen Standpunkte aus in einzelnen Punkten anfechtbar ist. Man darf aber, meine ich, in der Schulmathematik hierin nicht zu ängstlich sein und mufs sich hüten, aus wissenschaftlichen Bedenken dem Schüler unverständlich zu werden. Man soll immer im Auge behalten, dafs unsere Schulen keine Universitäten sind, und dafs mathematisch-philosophische Grübeleien die Schüler eher verwirren, als ihnen nützen."

Indem sich Referent diesen Ausführungen durchaus anschliefst, kann er nicht umhin, den Wunsch auszusprechen, dafs der Verf. in einer zweiten Auflage seinen Standpunkt noch schärfer zur Geltung bringen möchte. Das Endziel des mathematischen Unterrichts besteht im Lösen von Aufgaben. Dieses Ziel kann nicht oft genug betont werden; nur so wird es möglich sein, den oben gerügten Fehler zu vermeiden und Fragen aus dem Unterricht auszuscheiden, die sehr wohl in einen Logikkalkül, keineswegs aber in den mathematischen Anfangsunterricht gehören.

Ref. begnügt sich, in Bezug auf Einzelheiten des Lehrbuchs folgende Bemerkungen anzuknüpfen:

Verf. hat, wie schon viele vor ihm, bei der Inhaltsberechnung die irrationalen Zahlen mit Recht bei Seite gelassen. Die Kreisberechnung scheint

Digitized by Google

auf den ersten Blick etwas zu knapp gehalten, doch ist im trigonometrischen Teil der Berechnung von π ein Paragraph gewidmet.

Was die einführenden Abschnitte in die Planimetrie anbelangt, so hätte Ref. gewünscht, dafs der Verf. die Hilfsmittel der Drehung und den Symmetriebegriff nicht verschmäht hätte.

Durchaus zu billigen ist die Einführung einer grofsen Zahl von Abkürzungen, einer Art mathematischer Stenographie, welche die schriftliche Wiedergabe von Beweisen und Konstruktionen erleichtert.

Der arithmetische Teil ist gut gelungen, doch würde man in einer zweiten Auflage auf die Paragraphen über Kubikwurzelausziehung gern verzichten.

Aus dem trigonometrischen Teil ist hervorzuheben das Fehlen der Additionstheoreme, so dafs der geometrische Formelapparat nur ein beschränkter ist. Hiermit läfst sich der Verf. die Gelegenheit entgehen, den Schülern an einem bedeutenden Beispiel den fundamentalen Unterschied zwischen Identitäten und Bedingungsgleichungen klar zu machen. Für den Tangentensatz wird ein hübscher Beweis beigebracht, der dem Ref. unbekannt war. Der Beweis führt unmittelbar zum Ziel, ohne den Weg über den Gaufsschen Doppelsatz zu nehmen.

Endlich, die Behandlung des stereometrischen Teils erscheint dem Ref. durchaus angemessen. Vielleicht entschliefst sich der Verf. in einer neuen Auflage dazu, die Anschaulichkeit der Figuren durch den Kontrast starker und schwacher Linien zu erhöhen.

Von den angeführten Mängeln abgesehen, kann Ref. das Buch den Fachgenossen warm empfehlen. E. Jahnke.

E. Särchinger und **V. Estel. Aufgabensammlung für den Rechenunterricht in den Unterklassen der Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen.** Erstes Heft: Die 4 Grundrechnungsarten mit ganzen, einfach und mehrfach benannten Zahlen. 89 S. Zweites Heft: Bruchrechnung. 102 S. Drittes Heft: Schlufsrechnung. Prozent-, Zins- und Diskontrechnung. 70 S. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig 1899, B. G. Teubner.

Der Vorrede zur zweiten Auflage entnehmen wir folgende Angaben: Bei der Neubearbeitung der Sammlung ist neben dem eigentlichen Zweck des Rechenunterrichts besonders die Forderung berücksichtigt worden, dafs der Unterricht im Zahlenrechnen dem Unterricht in der Algebra vorzuarbeiten habe. Ferner ist die dezimale Schreibweise der deutschen Münzen, Mafse und Gewichte bereits in der Sexta eingeführt und dementsprechend die Dezimalbruchrechnung der Rechnung mit gemeinen Brüchen vorangestellt worden. Aufgaben in Form von einfachen Gleichungen finden sich an allen passenden Stellen des Buches, ebenso eingekleidete Aufgaben, die sofort zum Ansatz einer solchen Gleichung führen, so dafs auf diese Weise der Schüler zur Benutzung dieses wichtigen Hilfsmittels der Mathematik angeleitet wird. Nach jedem wichtigen Abschnitt ist ein Paragraph mit Wiederholungsbeispielen eingeschaltet, die sich zu schriftlichen Hausarbeiten eignen. Ebensowenig wie in der ersten Auflage sind Regeln im Wortlaut gegeben oder abgeleitet worden, doch wird dem Schüler das Auffinden der-

Digitized by Google

selben durch kurze Hinweise und passende Fragen erleichtert. Überall finden sich eine gröfsere Anzahl leichter Aufgaben, die sich für das Kopfrechnen eignen. Die zweite Auflage enthält ungefähr 4000 Einzelaufgaben mehr als die erste. E. Jahnke.

J. Deter. Mathematisches Formelbuch für höhere Unterrichtsanstalten. Neu herausgegeben von E. Arndt. 4. Auflage. Berlin 1899, M. Rockenstein. 58 S. M. 0,90.

Die Detersche Sammlung ist im Auftrage der Verlagsbuchhandlung von dem Herausgeber einer durchgreifenden Umarbeitung unterzogen worden. Es ist so ein Buch entstanden, das sich durch übersichtliche Anordnung und Vollständigkeit in den Formeln in gleicher Weise auszeichnet. Den Übergang zu der höheren Mathematik vermitteln die Kapitel über die unendlichen Reihen, die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, sowie die Grundformeln der Differential- und Integralrechnung.

Referent kann die Sammlung empfehlen. E. Jahnke.

Glaser. Stereometrie. Mit 44 Figuren. Leipzig 1899, Göschen. 126 S. M. 0,80.

Der Verf. bietet in dem vorliegenden Werkchen eine durch meist klaren und knappen Ausdruck ausgezeichnete Darstellung des gewöhnlichen stereometrischen Pensums. Der erste Abschnitt handelt von den Punkten, geraden Linien und Ebenen im Raume. Der zweite Abschnitt bringt die allgemeinen Eigenschaften der bekanntesten Flächen und Körper. Bemerkenswert ist hier das Kapitel, welches dem Dreikant und dem sphärischen Dreieck gewidmet ist. Beigegeben sind diesem Kapitel eine gröfsere Zahl von Lehrsätzen und Aufgaben. Der dritte Abschnitt endlich bezieht sich auf die Bezeichnung von Körpern und Flächen. Besonders ausführlich wird hier das Prismatoid behandelt. Es wird gezeigt, dafs die Prismatoidformel nicht blofs auf die eigentlichen Prismatoide beschränkt ist.

Allen drei Abschnitten sind eine grofse Zahl von Aufgaben angehängt, welche das Werkchen recht brauchbar machen. E. Jahnke.

G. Hessenberg. Ebene und sphärische Trigonometrie. Mit 69 ein- und zweifarbigen Figuren. Leipzig 1899, Göschen. 165 S. M. 0,80.

Der Verf. hat seine Aufgabe, in dem engen Rahmen nicht blofs alle wichtigen Formeln mitzuteilen, sondern auch die Grundgedanken, auf welchen dieselben beruhen, klar darzustellen und den Zusammenhang derselben, ihre Bedeutung und Anwendbarkeit hervorzuheben, vortrefflich gelöst.

Der erste Teil, die ebene Trigonometrie, umfafst das rechtwinklige und schiefwinklige Dreieck, die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen, die Anwendung der Additionstheoreme auf das schiefwinklige Dreieck und die Berechnung der Vierecke. In Bezug auf den in § 16, S. 53 gegebenen zweiten Beweis der Additionstheoreme ist zu bemerken, dafs derselbe keineswegs „in Vergessenheit geraten“ ist, sondern vielfach an Schulen geübt wird.

Digitized by Google

Der zweite Teil, die sphärische Trigonometrie, umfafst das rechtwinklige und schiefwinklige sphärische Dreieck. Die Darstellung läfst die Analogie zwischen den Entwicklungen der sphärischen und ebenen Trigonometrie klar hervortreten.

Der dritte Teil endlich bringt Berechnung und algebraische Anwendung der trigonometrischen Funktionen, und zwar: elementare Berechnung derselben, den Moivreschen Satz, unendliche Reihen und Produkte zur Darstellung der trigonometrischen Funktionen und die Umformung logarithmisch nicht berechenbarer Ausdrücke durch Hilfswinkel. Besonders interessant ist das elfte Kapitel mit der Überschrift: Der Moivresche Satz. Um den Kern desselben scharf herauszuschälen, führt der Verf. den Begriff des Vektors ein, entwickelt die Gesetze, nach denen mit Vektoren zu rechnen ist, und weist den Moivreschen Satz als einen Spezialfall derselben nach.

Ref. benutzt diese Gelegenheit, um diejenigen, welche sich über das Rechnen mit Vektoren, mit besonderer Anwendung auf die Formeln der Trigonometrie, weiterbilden wollen, auf die Arbeit von Herrn Caspary (Applications des méthodes de Grassmann; vecteurs dans le plan; définitions, propriétés. Nouv. Ann. (3) XVIII, 1899) hinzuweisen.

Ein Anhang enthält Übungsbeispiele, und zwar mehrere wertvolle Tafeln für rechtwinklige und schiefwinklige, ebene wie sphärische Dreiecke, sowie 20 Textaufgaben. E. Jahnke.

C. Reinhertz. Geodäsie. Einführung in die wesentlichsten Aufgaben der Erdmessung und der Landesvermessung. Mit 66 Abbildungen. Leipzig 1899, Göschen. 179 S. M. 0,80.

Das Büchelchen ist dazu bestimmt, in weiteren Kreisen für die wissenschaftlichen und technischen Aufgaben der Geodäsie Interesse zu erwecken. Unter Berücksichtigung der historischen Entwicklung giebt der Verfasser eine übersichtliche Darstellung der allgemeinen Aufgaben und Methoden der Vermessungskunde. Die Schrift zerfällt in fünf Abschnitte. I. Die Grundaufgaben der Erdmessung und der geodätischen Bestimmungsmethoden. II. Die wichtigsten geodätischen Instrumente und ihr Gebrauch. III. Die exakten Gradmessungstriangulierungen zur Bestimmung der Erddimensionen. IV. Die Landesvermessung. V. Die spezielle Untersuchung der Erdfigur.

Die klar und anregend geschriebene Schrift wird sicherlich manchem Anregung geben, die Fortschritte des deutschen Landesvermessungswesens und die Ergebnisse der Erdmessung zu verfolgen. E. Jahnke.

E. Duporcq. Premiers principes de géométrie moderne à l'usage des élèves de mathématiques spéciales et des candidats à la licence et à l'agrégation. Paris 1899, Gauthier-Villars. 160 p. 3 fr

Das Werk ist zwar in erster Linie für die Schüler der classes de mathématiques spéciales bestimmt. Doch wird es jedem von Nutzen sein, der in die Methoden der modernen Geometrie eingeführt zu werden wünscht. Um dem Studierenden Gelegenheit zu geben, die auseinandergesetzten Methoden sofort selber zur Anwendung zu bringen, hat der Verfasser eine grofse Zahl der verschiedensten Aufgaben behandelt, die meist den concours der letzten Jahre entnommen sind.

Digitized by Google

So wird als eine Anwendung der homographischen Transformation die folgende Aufgabe behandelt: Etant donnée une conique T, soit M un point arbitraire, et soient P et Q les points de contact des tangentes menées de M à T. Le cercle circonscrit au triangle MPQ coupe T en deux autres points P' et Q', tels que le pôle M' de $P'Q'$ par rapport à T soit sur le cercle considéré. Nous allons montrer que les points M et M', et les deux foyers réels (ou les deux foyers imaginaires) de T sont quatre points d'un même cercle. (Problème proposé en 1891 au Concours d'admission à l'Ecole Normale.) Als eine Anwendung der quadratischen Transformation dient die Aufgabe: Trouver le lieu du quatrième point commun à deux paraboles circonscrites à un triangle donné et dont les axes font entre eux un angle donné. (Problème proposé en 1874, au Concours d'admission à l'École Polytechnique.)

Wie schon der Titel verrät, erhebt das Werk nicht den Anspruch auf Vollständigkeit. Es umfafst 6 Kapitel. In Kapitel I betont der Verfasser den analytischen Charakter der modernen Geometrie, welcher durch die Einführung des Imaginären bedingt ist, und giebt einige einführende Bemerkungen über die Verwandtschaften der Figuren. Kapitel II und III sind der Theorie der homographischen und correlativen Transformation in der Ebene wie im Raume gewidmet. In Kapitel IV und V werden die Haupteigenschaften der Kegelschnitte und Flächen 2. Ordnung untersucht. Im letzten Kapitel (VI) findet man Anwendungen der homographischen und korrelativen Transformationen, eine geometrische Untersuchung der Inversion und der anallagmatischen ebenen Kurven und interessante Entwickelungen über die ebenen quadratischen Transformationen. Der Verfasser giebt zum Schlufs eine rein geometrische Darlegung der Lieschen Transformation, welche die Geraden und die Kugeln mit einander verknüpft.

Angehängt ist eine wertvolle Sammlung von 70 Übungsaufgaben und Lehrsätzen. Unter diesen befinden sich eine Reihe jener hübschen Sätze, welche die moderne Dreiecksgeometrie dem Verfasser verdankt. Referent begnügt sich aus den Exercices den folgenden Satz hervorzuheben: Etant donné un hexagone 1 2 3 4 5 6 inscrit à une conique, les points 5, 6, (15, 26), (16, 25), (35, 46), (36, 45) sont sur une même conique.

Zum Schlufs möchte Referent noch zu Kapitel V eine Bemerkung machen. Hier behandelt der Verfasser als Anwendung der vorangehenden Entwicklungen das Problem, den achten Durchschnittspunkt dreier Oberflächen zweiter Ordnung zu finden. In Bezug auf die citierte Litteratur ist zu bemerken, dafs eine einfache Konstruktion des achten Schnittpunktes, d. h. eine Konstruktion, wo nur der Schnittpunkt einer Ebene mit einer Geraden und die durch einen Punkt und eine Gerade bestimmte Ebene benutzt wird, von Herrn F. Caspary (Journal f. d. reine und angew. Math. XCIX, 128—130) gegeben worden ist. E. Jahnke.

H. Burkhardt. Funktionentheoretische Vorlesungen. Zweiter Teil. Elliptische Funktionen. Leipzig 1899, Veit & Comp. XVI und 373 S. gr. 8°.

Das in der Überschrift genannte Werk ist mit grofser Sachkenntnis geschrieben und trägt vor allem den neueren Theorien ausgiebig Rechnung.

Digitized by Google

Es zeichnet sich durch Allgemeinheit und Eleganz der Methoden aus. Der behandelte Stoff ist ein sehr umfangreicher. Die Theorie der doppeltperiodischen Funktionen wird auf doppeltem Wege abgeleitet, zunächst auf Grundlage der Weierstrafsschen, dann der Jacobischen Funktionen. Die Integraltheorie ist nach verschiedenen Richtungen hin entwickelt. Es werden die allgemeinen elliptischen Integrale auf den entsprechenden Riemannschen Flächen untersucht, die Reduktion des Integrales 1. Gattung auf die verschiedenen Normalformen gegeben und das Umkehrproblem in allgemeiner Gestalt entwickelt. Die Theorie der Modulsubstitutionen führt zur linearen Transformation der verschiedenen eingeführten Funktionen, sowie zur Theorie der Modulfunktionen, von denen in erster Linie der Modul des Normalintegrales erster Gattung und die Invariante J behandelt werden. Hieran schliefst sich in naturgemäfser Weise das spezielle Teilungs- und Transformationsproblem. Der allgemeinen Teilung und Transformation nebst komplexer Multiplikation ist ein eigener Abschnitt gewidmet.

Neben diesen soeben angedeuteten Theorien finden sich aber noch andere mehr spezielle Gegenstände behandelt vor, wie Abbildungsaufgaben, Ansartungen der elliptischen Transcendenten, sowie Realitätsverhältnisse und numerische Berechnungen derselben. Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und die Picardschen Differentialgleichungen schliefsen das Werk.

Schon diese flüchtigen Bemerkungen zeigen, wie umfangreich der behandelte Stoff ist. Erwägt man, dafs derselbe auf 370 Seiten verteilt ist, so ist klar, dafs die einzelnen Theorien nicht gleichmäfsig eingehend behandelt sein können. Der Herr Verfasser bringt mehrfach nur einige allgemeine Sätze, die zur Orientierung dienen sollen, ohne aber einen Abschlufs herbeizuführen. Da Litteraturangaben fehlen und die Darstellung eine kurze, nicht immer einfache ist, so macht sich dieser Umstand bisweilen recht störend bemerkbar.

M. Krause.

Jos. Lengauer. Geometrische Wahrscheinlichkeitsprobleme. Programm des Kgl. alten Gymnasiums zu Würzburg für das Schuljahr 1898—1899. Würzburg 1899, Universitäts-Buchdruckerei. 62 S.

Das erste, alles bis dahin auf dem Gebiete der geometrischen Wahrscheinlichkeit Geleistete zusammenfassende Buch war das von E. Czuber: Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte (Leipzig 1884). Referent hat es im 30. Bande der Zeitschrift f. Math. u. Phys., Hist.-litter. Abtlg. S. 24—27 angezeigt und die Gelegenheit benutzt, ein noch nicht veröffentlichtes Vorlesungsbeispiel von Ganfs mitzuteilen. In dem Czuberschen Buche ist die Behandlung beinahe regelmäfsig so, dafs das Eintreffen gewisser Ereignisse mit dem Flächenraume gewisser Figuren verglichen wird, und dafs also die Wahrscheinlichkeiten im Verhältnisse jener Flächenräume stehen. Nur ausnahmsweise bei dem IX. Probleme, die Herstellbarkeit eines Dreiecks aus 3 gegebenen Seitenlängen betreffend, sind Körperinhalte von Tetraedern die Vergleichsgebilde. An diese Aufgabe anknüpfend, hat Herr Lengauer in seinem lesenswerten Programme durchweg den Übergang von der Ebene zum Raume vollzogen und regelmäfsig gewisse Körperräume als Sinnbilder von Wahrscheinlichkeiten benutzt. Die erste in dieser Weise behandelte Aufgabe ist die von der Herstellbarkeit eines Dreiecks aus drei gegebenen Seiten, die letzte die von der Herstellbarkeit eines Dreiecks aus

Digitized by Google

einer Seite, dessen Gegenwinkel und dem Winkel zwischen zwei Medianen als willkürlich gegebenen Stücken. M. Cantor.

R. Niemeyer. Die Zahlenkunst. II. Teil. Das Rechnen mit ganzen Zahlen. 1. Fortsetzung. Dortmund 1899, im Selbstverlag des Verfassers. 81 S.

In den beiden früheren Heften, welche Bd. 44 der Zeitschr. f. Math. u. Phys. Histor. Litter. Abtlg. S. 122—123 angezeigt wurden, hat der Verfasser ein drittes Heft über das Bruchrechnen in Aussicht gestellt. Er hat sich inzwischen anders besonnen und eine Fortsetzung des zweiten Teiles vom Rechnen mit ganzen Zahlen eingeschoben, ja sogar diese Fortsetzung als erste bezeichnet, so daſs noch mehrere folgen können. Gleichwie früher läſst Herr Niemeyer eine groſse Belesenheit und eine Neigung zu philosophischen Erörterungen erkennen, welche das geschichtlich Gegebene ziemlich frei ergänzen. Die vorhandenen römischen Rechenbretter z. B., an deren Alter Altertumskenner von Fach nie gezweifelt haben, sollen dem 12. oder 13. Jahrhundert angehören (S. 41). Das Linienrechnen in Deutschland war Theorie, nicht Praxis (S. 65). Die Einmaleinstafel des Nikomachus ist nur fälschlich für eine solche gehalten worden (S. 78). Wir fürchten, Herr Niemeyer habe sich in solchen Äuſserungen mehr als gut von seiner Phantasie leiten lassen. Gegen eine Stelle (S. 45) müssen wir geradezu Verwahrung einlegen. In unserer Gesch. Mathem. I$^{(2)}$, 632 steht keineswegs, der chinesische Suanpan stamme erst aus dem 13. Jahrhundert, sondern nur, daſs die sogenannten wissenschaftlichen Ziffern nicht vor 1240 nachweisbar sind. Im übrigen wird ein vorsichtiger Leser auch in dem neuen Hefte Wissenswertes finden, welches Schriftstellern entnommen ist, von welchen wir wenigstens keinen Gebrauch gemacht hatten, bevor wir sie hier angeführt fanden. M. Cantor.

Fritz Kötter. Bemerkungen zu F. Klein's und A. Sommerfeld's Buch: Über die Theorie des Kreisels. Berlin 1899, Mayer und Müller. 26 S. gr. 8°. M. 1,00.

Das Buch von F. Klein und A. Sommerfeld: „Über die Theorie des Kreisels", von welchem bisher zwei Lieferungen erschienen sind, gehört zu den interessantesten Erscheinungen der neueren mathematischen Litteratur. Es beschäftigt sich fast ausschlieſslich mit der Theorie des symmetrischen Kreisels. Die Bewegung des unsymmetrischen Kreisels wird nur nebenher behandelt. Auſser der ziemlich vollständig erledigten Theorie des kräftefreien Kreisels werden nur der Hefssche Fall sowie die von Staude betrachteten permanenten Drehungen um eine vertikal aufgerichtete Axe des Körpers eingehend besprochen. Dagegen wird der integrable Fall, mit welchem die Namen der Frau von Kowalevski und des Herrn F. Kötter eng verknüpft sind, nur vorübergehend gestreift. Bei dieser Gelegenheit werden über die Bestrebungen einer Reihe von Mathematikern Urteile ausgesprochen, die der Verf. nicht für richtig hält, und die auf ihr richtiges Maſs zurückzuführen Zweck seiner Schrift ist.

Der Verf. erweist sich auch hier als ein Meister der Darstellung. Die Schrift kann jedem empfohlen werden, der von dem derzeitigen Stand

Digitized by Google

der Theorie des Kreisels schnell ein klares und scharfes Bild gewinnen will.

Besonders interessant sind die Stellen, wo der Verf. auf die vielfachen Beziehungen des Werkes zu den Untersuchungen von Herrn F. Caspary hinweist. „Leider scheinen die Untersuchungen von Caspary den Verfassern unbekannt geblieben zu sein; denn trotz mancher Übereinstimmung und Beziehung werden dieselben an keiner Stelle des Werkes von Klein und Sommerfeld citiert. So hat z. B. Caspary das bekannte Jacobische Theorem über die Zusammensetzung der Kreiselbewegung aus zwei Poinsot-Bewegungen mit Hilfe der Formeln für die Zusammensetzung der Parameter komponierter Bewegungen abgeleitet. Mit diesem Beweise stimmt nun in allen wesentlichen Zügen der zweite der beiden Beweise überein, welche die Herren Klein und Sommerfeld für das besagte Theorem geben."

JAHNKE.

H. Poincaré. Théorie du potentiel newtonien. Leçons professées à la Sorbonne pendant le premier semestre 1894—1895. Rédigées par E. Leroy et G. Vincent. Carré et Naud 1899, Paris. 366 p. 14 fr.

In neuerer Zeit ist die Schwierigkeit, sich über die neuesten Fortschritte einer Theorie zu orientieren, stetig gewachsen. Es hat sich daher, besonders in Frankreich, die Praxis immer weiter verbreitet, dafs die bedeutenden Mathematiker ihre oft in viele und schwer zugängliche Zeitschriften zerstreuten Abhandlungen zu einem Buch verarbeitet herausgeben. Diese Praxis wird besonders dankbar empfunden bei der in der Geschichte der mathematischen Wissenschaften fast einzig dastehenden schöpferischen Produktivität H. Poincarés. Im vorliegenden Falle haben es zwei seiner Schüler übernommen, die von ihrem Lehrer an der Sorbonne gehaltenen Vorlesungen über Potentialtheorie herauszugeben.

Das Werk zerfällt in neun Kapitel: die drei ersten enthalten die allgemeinen Eigenschaften des Potentials und die Theorie der Kugelfunktionen nebst Anwendungen, die übrigen handeln von dem Dirichletschen Problem, dessen Lösung durch den Verfasser in grundlegenden Untersuchungen weitergeführt worden ist.

Insbesondere bringt Kapitel V die Lösung des Dirichletschen Problems für den Fall des Kreisels und der Kugel. Nachdem sodann im nächsten Kapitel die Doppelbelegungen eingehend untersucht worden sind, setzt der Verf. in Kapitel VII seine „balayage"-Methode auseinander, welche auf dem Satze beruht, dafs man die Wirkung von Mafsen auf einen äufseren Punkt durch diejenige einer einfachen Oberflächenbelegung ersetzen kann. Vermöge dieser Methode sucht der Verfasser zu einem strengen und allgemeinen Beweis des Dirichletschen Prinzips zu gelangen. Hierauf (Kapitel VIII) wird die Neumannsche Methode zur Lösung des Dirichletschen Prinzips dargelegt. Zwar steht diese, vom Standpunkte der Allgemeinheit, der Poincaréschen Methode nach, doch bietet sie den Vorteil, die Existenz der betreffenden Funktion dadurch nachzuweisen, dafs sie dieselbe wirklich zu konstruieren gestattet.

Im letzten Kapitel endlich sucht der Verf. der Neumannschen Methode die gröfstmögliche Ausdehnung zu geben. (Vgl. nachstehendes Referat.)

E. JAHNKE.

Digitized by Google

A. Korn. Lehrbuch der Potentialtheorie. Allgemeine Theorie des Potentials und der Potentialfunktionen im Raume. Berlin 1899, F. Dümmler. XIV + 415 S. M. 9,00.

Das vorliegende Lehrbuch der Potentialtheorie besteht aus zwei Abschnitten, die von wesentlich verschiedenen Gesichtspunkten aus bearbeitet worden sind. Der erste (Teil I bis III) soll zur Einführung in die Potentialtheorie dienen, der zweite (Teil IV und V) reicht bis zu den Fragen, welche gegenwärtig die Mathematiker auf diesem Gebiete beschäftigen. Um beide Zwecke zu vereinigen, hat sich der Verf. so geholfen, dafs er einige Untersuchungen in Teil I bis III, welche für die erste Einführung in die Theorie nicht vonnöten sind, in kleinerem Druck beigefügt oder in besonderen Anmerkungen am Schlusse des Buches gegeben hat.

Nachdem im ersten Abschnitt die allgemeinen Eigenschaften der Potentiale, die Theorie der Kugelfunktionen und die Grundlagen der Theorie der Potentialfunktionen auseinandergesetzt sind, beschäftigt sich der Verf. im zweiten Abschnitt mit der Integration der Laplaceschen Differentialgleichung und mit den bisher allgemeinsten Lösungen des elektrostatischen und hydrodynamischen Problems.

Um eine Vorstellung von dem Inhalt dieses Abschnittes zu geben, genügt es, die Arbeiten zu nennen, auf welchen sich die Untersuchungen desselben aufbauen. Es sind die folgenden: C. Neumann: Über die Methode des arithmetischen Mittels (Leipz. Ber. 1870); H. Poincaré: La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet (Acta math. 1895); H. A. Schwarz: Über einen Grenzübergang durch ein alternierendes Verfahren (Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges., Zürich 1870); A. Ljapounoff: Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet (Journ. de math. 1898).

Eigene Untersuchungen bringt der Verf. in Teil IV bei. Poincaré hat nämlich die Neumannsche Methode für eine beliebig geschlossene, stetig gekrümmte, einfach zusammenhängende Fläche ω und für Randwerte f bewiesen, die mit allen Ableitungen auf ω stetig sind, aber unter folgenden beiden Voraussetzungen: 1) Es mufs die Existenz der gesuchten Funktion bereits auf irgend eine andere Weise gesichert sein. 2) Es müssen Transformationen existieren, welche den Innenraum der Fläche ω in den Innenraum einer Kugel, den Aufsenraum von ω in den Aufsenraum dieser Kugel verwandeln. Der Verf. zeigt, dafs in einem allgemeinen Fall die Neumannsche Methode unabhängig von der ersten Poincaréschen Voraussetzung gilt, und dafs sich gerade in diesem Fall die in der zweiten Poincaréschen Voraussetzung geforderten Transformationen wirklich angeben lassen. E. Jahnke.

P. Muth. Theorie und Anwendung der Elementarteiler. Leipzig. Teubner, 1899. XVI + 236 S.

Ich möchte zunächst kurz angeben, von welchen Gesichtspunkten aus man an die Beurteilung des Buches gehen könnte. Ich halte den Stoff, den Herr Muth sich zur Behandlung gewählt hat, für einen ziemlich spröden; es zeigt sich das, wie mir scheint, vor allem darin, dafs es sich im wesentlichen um eine Frage handelt; ungefähr drei Viertel des Buches (S. 1—159,

Digitized by Google

S. 173—187) beschäftigen sich entweder unmittelbar, oder vorbereitend, oder folgernd mit der Ableitung der charakteristischen Bedingungen für die Äquivalenz bilinearer Formen. Hierbei stehen natürlich im Mittelpunkt des Interesses die beiden Theoreme, deren erstes, 1868 von Weierstrafs gefundenes, die Frage für ordinäre Formenscharen beantwortet, und deren zweites, 1890 von Kronecker veröffentlichtes, sich auf singuläre Formenscharen bezieht. Bei aller Bewunderung, die man den Originalbeweisen zollen mufs, ist doch nicht zu verkennen, dafs die in ihnen eingeschlagenen Bahnen nicht die direktesten und übersichtlichsten sind. Daher haben sich ja auch viele Forscher mit der Neuableitung jener Resultate beschäftigt; und Herrn Frobenius ist es gelungen, in elegantester Art, auf rationalem Wege das Weierstrafssche Ergebnis zu beweisen. Für das Kroneckersche Theorem ist ein ähnlicher Abschlufs noch nicht erreicht; für seine Deduktion mufs noch der nicht sehr übersichtliche und recht mühsame Weg beibehalten werden, den der Autor uns gab. Und deshalb darf man wohl die Frage aufwerfen, ob jetzt schon die geeignete Zeit für eine solche Monographie gekommen war.

Die beiden angeführten Bedenken könnte man gegen die Berechtigung eines Buches über Elementarteiler geltend machen. Ich möchte von ihnen absehen und mich auf den Boden der vorliegenden Publikation stellen. Über seinen Inhalt habe ich schon Andeutungen gegeben; es sollen hier einige genauere Angaben darüber folgen.

Nachdem in § 1 die Definition und die allgemeinen Eigenschaften der Elementarteiler gegeben sind, wird in § 2 ein wichtiges Hilfsmittel für die weiteren Untersuchungen, das von Herrn Frobenius eingeführte symbolische Rechnen mit bilinearen Formen, behandelt. Die nächsten drei Paragraphen beschäftigen sich mit der Äquivalenz von Systemen ganzzahliger Elemente; solcher Systeme, deren Elemente ganze Funktionen einer Veränderlichen sind; und solcher Systeme, deren Elemente binäre Formen gleichen Grades sind. Durch diese letzten Untersuchungen ist die Äquivalenzfrage für Formenscharen erledigt und der berühmte Weierstrafssche Satz wird auf dem von Herrn Frobenius eingeschlagenen Wege gewonnen. Derselbe Satz wird in § 6 ein zweites Mal auf dem von Weierstrafs selbst beschrittenen Wege hergeleitet. Daran schliefst sich in § 7 der Nachweis, dafs Formenscharen bestehen, deren Determinanten vorgeschriebene Elementarteiler besitzen; und hierauf gründet sich dann eine Klassifikation von bilinearen Formenscharen, die von n variablen Paaren abhängen. Für $n = 1, 2, 3, 4$ werden die Normalformen angeführt. Alles Bisherige bezog sich auf ordinäre, d. h. auf solche Formenscharen, deren Determinante nicht identisch verschwindet; jetzt im § 8 folgt die Kroneckersche Behandlung der Reduktion einer singulären Schar von bilinearen Formen, und es treten zu den Weierstrafsschen Invarianten, nämlich den Elementarteilern, für singuläre Formen noch die Kroneckerschen Invarianten, d. h. gewisse Zahlen, welche die Grade von bestehenden Relationen angeben. — Hiermit ist zunächst die allgemeine Theorie beendet, und die abgeleiteten Sätze werden nun für die Untersuchung besonderer Formen benutzt. In § 9 handelt es sich um symmetrische und alternierende, in § 10 um kongruente, in § 11 um ähnliche und duale Formen. Bei allen diesen werden Begriff und Bedingungen der Äquivalenz festgestellt, und das Klassifizierungs-Prinzip wird verwendet.

Digitized by Google

Der Übergang von symmetrischen bilinearen zu quadratischen Formen ist natürlich und naheliegend. Es folgen nun Anwendungen, deren Vortrag durch die Wiederaufnahme der Theorie in § 15 unterbrochen wird; dieser Paragraph legt die Stickelbergerschen Resultate über lineare Elementarteiler dar. Und am Schlusse wird kurz die Erweiterung der eingeführten Begriffe gemäfs Henselscher Untersuchungen bei Systemen aus ganzen oder gebrochenen Funktionen eines Körpers angegeben. Die Anwendungen beziehen sich in § 12 auf die lineare Transformation der bilinearen Formen in sich selbst, in § 13 auf orthogonale und cyklische Formen, in § 14 auf definite Formen; diese Anwendungen sind algebraischer Natur. In § 16 wird eine analytische Anwendung besprochen, nämlich die Integration eines Systems linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten; in § 17 endlich folgt als geometrische Anwendung die Klassifikation der Kollineationen in einem Raume beliebig hoher Dimension.

Schon aus diesen Angaben ersieht man, dafs der Verfasser alles für sein Thema Wesentliche beigebracht hat. Dieser Eindruck wird noch erhöht durch die Lektüre der Einleitung des Buches und bei der Durchsicht der reichlich gegebenen Litteraturnachweise. Gleichwohl drängt sich hier die Frage auf, ob nicht eine gewisse, übrigens wohl erklärliche und durchaus nicht unberechtigte Einseitigkeit die Arbeiten des Herrn Frobenius anderen Forschungen gegenüber zu stark bevorzugt habe. Meiner Meinung nach hätten sich manche anderen schönen Untersuchungen und Beweise, z. B. solche von Gundelfinger, Hensel, Klein u. s. f, in dem Muthschen Werke ganz gut ausgenommen.

Die Disposition des Buches ist sachgemäfs und also gut. Die Darstellung nach der Richtung auf Präzision und Klarheit zeigt sich als durchaus anerkennenswert. An manchen Stellen wäre vielleicht eine etwas gröfsere Breite angebracht gewesen; so hätte unter anderem die Reproduktion der Kroneckerschen Herleitungen einige Zwischenbetrachtungen und Zwischenrechnungen recht wohl vertragen; und das Verständnis dürfte dabei gewonnen haben.

Leider ist das Studium des Werkes durch eine Reihe von Äufserlichkeiten gestört. Dahin gehören die in überströmender Fülle vorkommenden Druckfehler. Häufig treten sie sinnstörend auf (S. 54 „steigend“ statt „fallend“; S. 78 „ungleich“ statt „gleich“); mitunter sind sie aus dem Originalaufsatze übernommen (S. 102, Z. 3 v. u. „D“ statt „C“; S. 103, Z. 15 v. o. „$\gamma-\delta$“ statt „$\delta-\gamma$“). Dahin gehört eine Änderung in der Bedeutung von Buchstaben; am schlimmsten ist dies mit l_k, c_i, die von S. 70 ab plötzlich andere Gröfsen bezeichnen als vorher und auch später nachher von S. 141 ab; aber auch Wendungen „setzt man $\lambda = -\lambda$“ (S. 140) müfsten vermieden werden. Bei Rückverweisen wäre die Seitenangabe erwünscht; S. 170 „Theorem XX“ zu citieren reicht für schnelle Orientierung nicht aus. Dahin gehört endlich auch der gar zu sorglose Stil; „Elementarteiler hat das System keine“ S. 105, S. 132 und Ähnliches wird manchen Leser peinlich berühren.

Fast möchte ich mich entschuldigen, solche Kleinigkeiten den grofsen Verdiensten des Werkes entgegenzusetzen. Aber einmal können diese durch jene nicht geschmälert werden, und ferner darf der Leser doch auch verlangen, dafs sein ästhetisches Gefühl einige Berücksichtigung finde.

E. Netto.

Digitized by Google

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze.

Aufgaben über Fufspunktkurven.

1. Werden aus einem festen Punkte O Lote gefällt auf die Tangente t und die Normale n eines Punktes M der gegebenen Kurve C, so beschreiben deren Fufspunkte T, beziehungsweise N, während M die Kurve C durchläuft, neue Kurven C_T, C_N. Die erste heifst die Fufspunktkurve von C in Bezug auf den Pol O; C_N ist dann die Fufspunktkurve der Evolute von C in Bezug auf den nämlichen Pol.

Man kann die Entstehung der Kurven noch in anderer Weise auffassen. Dem Rechteck $OTMN$ kann ein Kreis K umschrieben werden; die der Punktgesamtheit von C entsprechenden Kreise bilden einen Kreisbüschel mit O als Zentrum. C_T ist das Erzeugnis des Kreisbüschels K mit dem Strahlenbüschel OT, C_N das Erzeugnis desselben Kreisbüschels mit dem Strahlenbüschel ON; die Zuordnung von Kreisen und Strahlen ist durch die Kurve C bestimmt.

Diese Auffassung erweist sich als der analytischen Behandlung förderlich. Ist

$$F(x, y) = 0$$

die Gleichung von C, bezogen auf ein rechtwinkliges System mit dem Ursprung O; sind x, y die Koordinaten von M, so ist

$$\xi^2 + \eta^2 - x\xi - y\eta = 0$$

die Gleichung des Kreises K,

$$\frac{\partial f}{\partial y}\xi - \frac{\partial f}{\partial x}\eta = 0$$

die Gleichung des Strahls OT,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta = 0$$

die Gleichung des Strahls ON. Mithin ist die Kurve C_T durch das Gleichungssystem

Digitized by Google

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} F(x, y) = 0, \\ \xi^2 + \eta^2 - x\xi - y\eta = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\xi - \dfrac{\partial f}{\partial x}\eta = 0, \end{cases}$$

die Kurve C_N durch das Gleichungssystem

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} F(x, y) = 0, \\ \xi^2 + \eta^2 - x\xi - y\eta = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}\xi + \dfrac{\partial F}{\partial y}\eta = 0 \end{cases}$$

bestimmt. Ihre Gleichungen ergeben sich durch Elimination von x, y.

Bei parametrischer Darstellung der Kurve C:

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

ist C_T durch das Gleichungspaar

$$\text{(I*)} \qquad \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 - x\xi - y\eta = 0, \\ \xi dx + \eta dy = 0, \end{cases}$$

C_N durch das Gleichungspaar

$$\text{(II*)} \qquad \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 - x\xi - y\eta = 0, \\ \xi dy - \eta dx = 0 \end{cases}$$

gekennzeichnet, wenn darin x, y, dx, dy aus den Kurvengleichungen entnommen werden.

Es sollen aus den Kegelschnittslinien und aus der Cykloide abgeleitete Fufspunktkurven nach dieser Methode bestimmt und als bemerkenswerte Beispiele höherer Kurven diskutiert werden. Der Kreis ist dabei nur der Vollständigkeit wegen mit herangezogen.

A. Der Kreis. O liegt in einem beliebigen Punkte der Ebene.
B. Die Parabel. O im Scheitel der Parabel.
C. Die Ellipse. O im Mittelpunkte der Ellipse.
D. Die Hyperbel. O im Mittelpunkte der Hyperbel.
E. Die Cykloide. O im Anfangspunkte eines vollständigen Bogens (in einem Rückkehrpunkte).

Die Diskussion hat sich auf die Eigenschaften der Kurven zu erstrecken; insbesondere ist die Quadratur zu bewerkstelligen. E. Czuber.

---

2. Soient les deux progressions par différence, à termes entiers,

$$\text{(A)} \qquad 1 \quad a_1 \quad a_2 \cdots\cdots$$

$$\text{(A')} \qquad 1 \quad a_1' \quad a_2' \cdots\cdots$$

On groupe les termes de la progression (A) en prenant successivement 1, a_1', a_2', $\cdots$ termes. Soit s_n la somme des termes composant le n^e groupe.

Digitized by Google

Réciproquement, on groupe les termes de la progression (A′) en prenant successivement 1, a_1, a_2, $\cdots$ termes. Soit s_n' la somme des termes composant le n' groupe.

Calculer la différence $s_n - s_n'$. C. A. Laisant.

---

3. Soit ABC un triangle; A', B', C' sont les points où une droite coupe BC, CA, AB. Démontrer qu'on ne peut avoir $AA' = BB' = CC'$.

E. Lemoine.

---

4. Ein Quadrat $ABCD$, dessen Seiten die Länge a haben, hat die Seiten AB und DC vertikal, AD und BC horizontal, AD als obere Seite. Ein schwerer Punkt gleitet reibungslos mit der Anfangsgeschwindigkeit Null von A auf AB bis zu einem Punkte P zwischen A und B, von P mit der erlangten Endgeschwindigkeit ohne Verlust an Geschwindigkeit auf der Geraden PC weiter. Wo ist P zu wählen, damit die Zeit für den gebrochenen Weg APC ein Minimum werde? Wie verhält sich diese Minimalzeit zu der Zeit des Abgleitens auf der Diagonale AC? E. Lampe.

---

5. Von einem Punkte P einer Ellipse lassen sich drei Normalen an sie ziehen, deren Fußpunkte nicht in P fallen. Das Produkt derselben ist:

$$PN_1 \cdot PN_2 \quad PN_3 = \frac{2\,Ra^2b^2}{a^2 - b^2},$$

wenn a, b die Halbaxen der Ellipse, R ihr Krümmungsradius in P ist.

E. Lampe.

---

6. Ein homogener materieller Körper von gegebenem Volumen $\frac{4}{3}R^3\pi$ hat die Form eines Kreiscylinders, auf dessen eine Basisfläche eine Halbkugel gesetzt ist. Wie mufs sich der Basisradius zur Höhe des Cylinders verhalten, damit die nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze auf einen Massenpunkt im Zentrum der freien Basisfläche ausgeübte Anziehung möglichst grofs sei? Wie verhält sich diese Maximalattraktion zu derjenigen einer Kugel vom Radius R aus derselben Masse auf den nämlichen materiellen Punkt an ihrer Oberfläche? E. Lampe.

---

7. Étant doné un triangle ABC, je trace les 3 cercles qui ont les somets pour centres et qui se touchent deus à deus aus points A', B', C' de contact du cercle inscrit avec les cotés. Il y a deus circonférences qui touchent ces trois cercles, soient Ω et Ω' les centres de ces deus circonférences. Trouver:

Digitized by Google

1° les rayons de ces cercles tangents,
2° les distances de Ω et de Ω' aus trois cotés.
3° les distances $A\Omega$, $A\Omega'$,
4° la distance $\Omega\Omega'$.
5° Montrer que Ω et Ω' peuvent s'obtenir comme il suit: Je prends sur la hauteur partant de A des points A_{p-a}, A'_{p-a} tels que $AA_{p-a} = 2(p-a)$, A_{p-a} étant en dehors du triangle et A'_{p-a} étant le simétrique de A_{p-a} par raport à A. $A'A_{p-a}$ contient Ω, $A'A'_{p-a}$ contient Ω'.
6° Montrer que $\Omega\Omega'$ passe par le centre du cercle inscrit à ABC et par le point de concours de AA', BB', CC' (point de Gergonne).
7° Doner le simbole géométrografique de la construction simultanée des points Ω, Ω' déduite de 6°.
8° Ecrire *immédiatement*, au moyen de la Transformation continue, tous les résultats précédents si au lieu de considérer les cercles $A(p-a)$, $B(p-b)$, $C(p-c)$ de l'énoncé, on considère les cercles $A(p)$, $B(p-c)$, $C(p-b)$. E. Lemoine.

---

8. Démontrer la formule

$$\Sigma\, a^2(a-b)(a-c)(2p-3b)(2p-3c) = 16S^2(R-2r)^2;$$

en déduire immédiatement sans aucun calcul

$$a^2(a+b)(a+c)(a-b+2c)(a-c+2b)$$
$$+\, b^2(b-c)(b+a)(b+c+2a)(b-a-2c)$$
$$+\, c^2(b-c)(c+a)(-c+a+2b)(c+b+2a) = 16S^2(R+2r_a)^2.$$

a, b, c sont les trois cotés d'un triangle dont S, R, r, r_a sont la surface, le rayon du cercle circonscrit, le rayon du cercle inscrit, le rayon du cercle circonscrit tangent à BC et au prolongement des deus autres cotés.
E. Lemoine.

---

9. Rein geometrisch zu bestimmen, von welcher Ordnungszahl $\lim_{\omega=0}(\sin\omega - \omega)$ unendlich klein ist. St. Jolles.

---

10. Die Summe der unendlichen Reihe

$$\sum_{q=2}^{\infty} 2^{q+1} \sin^3 \frac{\omega}{2q} \cos \frac{\omega}{2q}$$

zu bestimmen. St. Jolles.

Digitized by Google

11. Gegeben in der Ebene zwei dreifach perspektive Dreiecke. Man konstruiere zu dem einen in Beziehung auf die Seiten des andern die Lotpunkte, wie sie von Herrn Cwojdziński in seiner Arbeit S. 175 dieses Doppelheftes definiert worden sind. Auf diese Weise ergeben sich zwei neue Dreiecke. Es sind deren Beziehungen unter einander und gegen die ursprünglichen Dreiecke zu untersuchen. E. Jahnke.

2. Anfragen.

1. Die unter den Namen „Plückersches Konoid", „Cylindroid" (Cayley), „kubischer Fächer" (Schell) bekannte geradlinige Fläche dritten Grades ist der Gegenstand vieler geometrischer Untersuchungen gewesen. Herr d'Ocagne giebt in der Einleitung seiner Abhandlung auf S. 159 dieses Heftes nur einzelne Autoren an, die über diese Fläche geschrieben haben, macht auch die betreffenden Schriften nicht namhaft. Ist jemand im Besitze einer möglichst vollständigen Bibliographie dieser Fläche? E. Lampe.

2. Projiziert man eine auf dem Mantel eines Kreiskegels durch eine einfach geschlossene Linie begrenzte Figur F auf die Basisebene des Kreiskegels, so ist der Inhalt der Projektion gleich dem Produkte aus dem Inhalte der Figur F und dem Cosinus des Neigungswinkels einer Erzeugenden des Kegels gegen die Basis. Spezielle Fälle dieses aus dem gleichlautenden Satze über die Projektion einer ebenen Figur zu erschliefsenden bekannten Satzes sind in jüngster Zeit als neue Entdeckungen ausgegeben worden. Wo ist derselbe zuerst ausgesprochen? E. Lampe.

Bezüglich des Abdruckes der Lösungen und Antworten verweisen wir auf die am Anfang dieses Doppelheftes befindliche „Einführung".

Die Red.

Digitized by Google

Sur la résolution de certaines équations à deux variables à l'aide de fonctions rationnelles et sur un théorème de M. Nœther;

Par M. Émile Picard à Paris.

1. Dans diverses questions se rattachant à la théorie des fonctions algébriques de deux variables, il y aurait intérêt à savoir résoudre le problème suivant. Soit donné un polynôme $f(x, y, z)$ en x, y, z, et formons l'équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

Est-il possible de satisfaire identiquement à cette équation en prenant pour y et z des fractions rationnelles de x? Ce problème semble offrir quelques difficultés; en me réservant d'y revenir, je veux présenter seulement ici quelques remarques à son sujet. Tout d'abord *il n'admettra pas en général de solution;* il suffira, pour s'en convaincre, de considérer un cas particulier suffisamment étendu. Soit l'équation

$$z^m = a(x)\, y^m + b(x) \qquad (m > 2)$$

où a et b sont des polynômes arbitraires en x. On peut voir, comme il suit, qu'il n'est pas possible de satisfaire à cette équation en prenant pour y et z des fractions rationnelles de x. Supposons en effet que la chose soit possible, et posons

$$z = \sqrt[m]{b} \cdot Z, \quad y = \sqrt[m]{\frac{b}{a}} \cdot Y, \tag{1}$$

on aura

$$Z^m = Y^m + 1. \tag{2}$$

D'après les équations (1), Y et Z sont des fonctions rationnelles de

$$x, \quad \sqrt[m]{b(x)}, \quad \sqrt[m]{a(x)}; \tag{3}$$

mais, d'après une proposition élémentaire, on peut trouver deux paramètres ξ et η liés par une relation algébrique irréductible

$$F(\xi, \eta) = 0 \tag{4}$$

telle que les quantités (3) soient fonctions rationnelles de ξ et η. Par

Digitized by Google

suite les courbes (2) et (4) se correspondent rationnellement, de telle sorte que Z et Y sont des fonctions rationnelles de ξ et η. Or si les polynômes $a(x)$ et $b(x)$ sont arbitraires, il est clair que ceci ne sera pas possible, et l'impossibilité annoncée est ainsi mise en évidence.

2. Il arrivera évidemment que le problème sera possible dans certains cas particuliers; étudions plus en détail un cas très simple qui montrera la complexité du problème. Je suppose que la relation se réduise à

$$z^2 = f(x) \cdot F(y)$$

f et F étant des polynômes du troisième degré respectivement en x et en y. *Trois* solutions apparaissent immédiatement en prenant $z = 0$ et y égal à une racine de l'équation $F(y) = 0$. Supposons qu'il existe d'autres solutions y et z rationnelles en x; on a

$$\frac{dy}{\sqrt{F(y)}} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{f(x)}{z} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

De là on déduit que l'intégrale de première espèce

$$\int \frac{dy}{\sqrt{F(y)}}$$

se transforme, en prenant pour y une fonction rationnelle de x, en l'intégrale

$$\int R(x) \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

$R(x)$ étant rationnelle en x. Comme cette intégrale doit être aussi de première espèce, il faut que $R(x)$ se réduise à une constante, et par suite les fonctions rationnelles y de x répondant à la question doivent satisfaire à la relation

$$\frac{dy}{\sqrt{F(y)}} = C \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \tag{5}$$

C étant une constante non nulle. Réciproquement d'ailleurs, si une fonction rationnelle y de x satisfait à une telle relation, on aura

$$\sqrt{f(x) \cdot F(y)} = \frac{C \cdot F(y)}{\frac{dy}{dx}}$$

et par suite z sera rationnelle en x. *L'équation* (5) *se rencontre dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques;* il est évident, d'après cette équation, que si les deux polynômes du troisième degré $f(x)$ et $F(y)$ sont arbitraires, il ne sera pas possible de déterminer une fonction rationnelle y de x (ne se réduisant pas à une constante)

Digitized by Google

satisfaisant aux conditions voulues. De plus, en suivant la théorie de la transformation, on aura tous les polynômes associés $f(x)$ et $F(y)$ ayant la propriété cherchée. Un cas très simple sera celui où les deux polynômes sont identiques; soit

$$f(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

De ce qui précède, on conclut qu'on pourra trouver une infinité de fonctions rationnelles y de x, telles que l'équation

$$z^2 = f(x) \cdot f(y)$$

donnera pour z des fonctions rationnelles de x. En désignant par $\wp(u)$ la fonction elliptique (avec les notations de Weierstrass) correspondant au polynôme $f(x)$, posons

$$y = \wp(mu), \quad x = \wp(u)$$

m étant un entier arbitraire; y est une fonction rationnelle de x répondant à la question.

3. Reprenons l'équation considérée au no. **1** dans le cas où $m = 2$:

$$z^2 = a(x)y^2 + b(x), \tag{6}$$

et supposons que ni a ni b ne soient nuls. On pourra ici satisfaire à cette équation en prenant pour z et y des fonctions rationnelles de x. Nous l'établirons simplement en montrant qu'on peut déterminer deux polynômes u et v tels que

$$a(x) \cdot u^2 + b(x) \cdot v^2$$

soit un carré parfait. Supposons, pour fixer les idées, que $a(x)$ et $b(x)$ soient de degré pair $2m$, et désignons par μ le degré de u et v. L'expression précédente est un polynôme de degré $2m + 2\mu$; on obtiendra $m + \mu$ conditions en écrivant qu'il se réduit à un carré parfait. Or dans les deux polynômes u et v, il y a $2\mu + 1$ coefficients indéterminés, en supposant qu'un des coefficients ait une valeur numérique arbitraire; si donc

$$2\mu + 1 > m + \mu \text{ ou } \mu > m - 1,$$

on pourra trouver les polynômes u et v.

Le fait, que l'on peut trouver des fractions rationnelles z et y de x satisfaisant à la relation (6), revient au fond à une proposition de M. Nœther qui est fondamentale dans la théorie des surfaces unicursales. L'illustre géomètre d'Erlangen a considéré (Math. Annalen, tome III) des surfaces possédant un faisceau linéaire de courbes *unicursales*. Dans le cas où il n'y a qu'*une seule* courbe mobile de rencontre du faisceau linéaire

$$P + \lambda Q = 0$$

Digitized by Google

avec la surface envisagée, il établit d'abord que la surface correspond birationnellement soit à une surface réglée d'ordre n avec droite multiple d'ordre $n-1$, soit à une surface d'ordre n avec droite multiple d'ordre $n-2$. Dans ce dernier cas, qui seul présente quelques difficultés, M. Nœther considère particulièrement le cas où la section de la surface par un plan arbitraire contenant la droite multiple d'ordre $n-2$ est une conique indécomposable, et il établit qu'alors la surface est unicursale, en cherchant sur la surface une courbe *unisécante* de cette conique. Or, à notre point de vue, nous pouvons, en plaçant convenablement la droite multiple, et faisant sur z une transformation linéaire immédiate, mettre l'équation de la surface sous la forme (6), et le problème de M. Nœther revient à la résolution de l'équation (6) dans les conditions indiquées; on en déduit immédiatement que la surface est unicursale.

Paris, 10 décembre 1900.

Digitized by Google

Mathematische Probleme.

Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongrefs zu Paris 1900.

Von D. Hilbert in Göttingen.

Aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. 1900. Heft 3. Mit Zusätzen des Verfassers.

(Fortsetzung.)

Wir haben bisher lediglich Fragen über die *Grundlagen* mathematischer Wissenszweige berücksichtigt. In der That ist die Beschäftigung mit den Grundlagen einer Wissenschaft von besonderem Reiz, und es wird die Prüfung dieser Grundlagen stets zu den vornehmsten Aufgaben des Forschers gehören. „Das Endziel", so hat Weierstrafs einmal gesagt, „welches man stets im Auge behalten mufs, besteht darin, dafs man über die Fundamente der Wissenschaft ein sicheres Urteil zu erlangen suche" ... „Um überhaupt in die Wissenschaften einzudringen, ist freilich die Beschäftigung mit einzelnen Problemen unerläfslich." In der That bedarf es zur erfolgreichen Behandlung der Grundlagen einer Wissenschaft des eindringenden Verständnisses ihrer speziellen Theorien; nur der Baumeister ist im stande, die Fundamente für ein Gebäude sicher anzulegen, der die Bestimmung des Gebäudes selbst im einzelnen gründlich kennt. So wenden wir uns nunmehr zu speziellen Problemen einzelner Wissenszweige der Mathematik und berücksichtigen dabei zunächst die Arithmetik und die Algebra.

7. Irrationalität und Transzendenz bestimmter Zahlen.

Hermites arithmetische Sätze über die Exponentialfunktion und ihre Weiterführung durch Lindemann sind der Bewunderung aller mathematischer Generationen sicher. Aber zugleich erwächst uns die Aufgabe, auf dem betretenen Wege fortzuschreiten, wie dies bereits A. Hurwitz in zwei interessanten Abhandlungen „Über arithmetische Eigenschaften gewisser transzendenter Funktionen"[1]) gethan hat. Ich

1) Mathematische Annalen. Bd. 22 und 32.

Digitized by Google

möchte daher eine Klasse von Problemen kennzeichnen, die meiner Meinung nach als die nächstliegenden hier in Angriff zu nehmen sind. Wenn wir von speziellen, in der Analysis wichtigen transzendenten Funktionen erkennen, dafs sie für gewisse algebraische Argumente algebraische Werte annehmen, so erscheint uns diese Thatsache stets als besonders merkwürdig und der eingehenden Untersuchung würdig. Wir erwarten eben von transzendenten Funktionen, dafs sie für algebraische Argumente im allgemeinen auch transzendente Werte annehmen, und obgleich uns wohl bekannt ist, dafs es thatsächlich ganze transzendente Funktionen giebt, die für alle algebraischen Argumente sogar rationale Werte besitzen, so werden wir es doch für höchst wahrscheinlich halten, dafs z. B. die Exponentialfunktion $e^{\pi z}$, die offenbar für alle rationalen Argumente z stets algebraische Werte hat, andererseits für alle irrationalen algebraischen Argumente z stets transzendente Zahlenwerte annimmt. Wir können dieser Aussage auch eine geometrische Einkleidung geben, wie folgt. *Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck das Verhältnis vom Basiswinkel zum Winkel an der Spitze algebraisch, aber nicht rational ist, so ist das Verhältnis zwischen Basis und Schenkel stets transzendent.* Trotz der Einfachheit dieser Aussage und der Ähnlichkeit mit den von Hermite und Lindemann gelösten Problemen halte ich doch den Beweis dieses Satzes für äufserst schwierig, ebenso wie etwa den Nachweis dafür, *dafs die Potenz a^β für eine algebraische Basis a und einen algebraisch irrationalen Exponenten β, z. B. die Zahl $2^{\sqrt{2}}$ oder $e^\pi = i^{-2i}$, stets eine transzendente oder auch nur eine irrationale Zahl darstellt.* Es ist gewifs, dafs die Lösung dieser und ähnlicher Probleme uns zu ganz neuen Methoden und zu neuen Einblicken in das Wesen spezieller irrationaler und transzendenter Zahlen führen mufs.

8. Primzahlenprobleme.

In der Thorie der Verteilung der Primzahlen sind in neuerer Zeit durch Hadamard, de la Vallée-Poussin, v. Mangoldt und andere wesentliche Fortschritte gemacht worden. Zur vollständigen Lösung der Probleme, die uns die Riemannsche Abhandlung „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Gröfse" gestellt hat, ist es jedoch noch nötig, die Richtigkeit der äufserst wichtigen Behauptung von Riemann *nachzuweisen, dafs die Nullstellen der Funktion $\zeta(s)$*, die durch die Reihe

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

dargestellt wird, *sämtlich den reellen Bestandteil $\frac{1}{2}$ haben* — wenn man

Digitized by Google

von den bekannten negativ ganzzahligen Nullstellen absieht. Sobald dieser Nachweis gelungen ist, so würde die weitere Aufgabe darin bestehen, die Riemannsche unendliche Reihe für die Anzahl der Primzahlen genauer zu prüfen und insbesondere *zu entscheiden, ob die Differenz zwischen der Anzahl der Primzahlen unterhalb einer Gröfse x und dem Integrallogarithmus von x in der That von nicht höherer als der $\frac{1}{2}$ten Ordnung in x unendlich wird*[1]), und ferner, ob dann die von den ersten komplexen Nullstellen der Funktion $\zeta(s)$ abhängenden Glieder der Riemannschen Formel wirklich die stellenweise Verdichtung der Primzahlen bedingen, welche man bei den Zählungen der Primzahlen bemerkt hat.

Nach einer erschöpfenden Diskussion der Riemannschen Primzahlenformel wird man vielleicht dereinst in die Lage kommen, an die strenge Beantwortung des Problems von Goldbach[2]) zu gehen, ob jede gerade Zahl als Summe zweier Primzahlen darstellbar ist, ferner an die bekannte Frage, ob es unendlich viele Primzahlenpaare mit der Differenz 2 giebt oder gar an das allgemeinere Problem, ob die lineare diophantische Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

mit gegebenen ganzzahligen paarweise teilerfremden Koeffizienten a, b, c stets in Primzahlen x, y lösbar ist.

Aber von nicht geringerem Interesse und vielleicht von noch gröfserer Tragweite erscheint mir die Aufgabe, *die für die Verteilung der rationalen Primzahlen gewonnenen Resultate auf die Theorie der Verteilung der Primideale in einem gegebenen Zahlkörper k zu übertragen* — eine Aufgabe, die auf das Studium der dem Zahlkörper zugehörigen Funktion

$$\zeta_k(s) = \sum \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s}$$

hinausläuft, wo die Summe über alle Ideale $\mathfrak{j}$ des gegebenen Zahlkörpers k zu erstrecken ist und $n(\mathfrak{j})$ die Norm des Ideals $\mathfrak{j}$ bedeutet.

Ich nenne noch drei speziellere Probleme aus der Zahlentheorie, nämlich eines über die Reziprozitätsgesetze, eines über diophantische Gleichungen und ein drittes aus dem Gebiete der quadratischen Formen.

---

1) Vgl. eine demnächst in den Math. Ann. erscheinende Arbeit von H. v. Koch über diesen Gegenstand.

2) Vgl. P. Stäckel: Über Goldbach's empirisches Theorem. Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1896 und Landau, ebenda 1900.

Digitized by Google

9. Beweis des allgemeinsten Reziprozitätsgesetzes im beliebigen Zahlkörper.

Für einen beliebigen Zahlkörper soll das Reziprozitätsgesetz der $l$ten Potenzreste bewiesen werden, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet, und ferner, wenn l eine Potenz von 2 oder eine Potenz einer ungeraden Primzahl ist. Die Aufstellung des Gesetzes, sowie die wesentlichen Hilfsmittel zum Beweise desselben werden sich, wie ich glaube, ergeben, wenn man die von mir entwickelte Theorie des Körpers der $l$ten Einheitswurzeln[1]) und meine Theorie[2]) des relativ-quadratischen Körpers in gehöriger Weise verallgemeinert.

10. Entscheidung der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung.

Eine diophantische Gleichung mit irgend welchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlenkoeffizienten sei vorgelegt: *man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittelst einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läfst, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.*

11. Quadratische Formen mit beliebigen algebraischen Zahlenkoeffizienten.

Unsere jetzige Kenntnis der Theorie der quadratischen Zahlkörper[3]) setzt uns in den Stand, *die Theorie der quadratischen Formen mit beliebig vielen Variabeln und beliebigen algebraischen Zahlenkoeffizienten erfolgreich in Angriff zu nehmen.* Damit gelangen wir insbesondere zu der interessanten Aufgabe, eine vorgelegte quadratische Gleichung beliebig vieler Variabeln mit algebraischen Zahlenkoeffizienten in solchen ganzen oder gebrochenen Zahlen zu lösen, die in dem durch die Koeffizienten bestimmten algebraischen Rationalitätsbereiche gelegen sind.

---

1) Bericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung über die Theorie der algebraischen Zahlkörper **4**, 1897. Fünfter Teil.

2) Mathematische Annalen **51** und Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1898. Vgl. ferner die demnächst erscheinende Inauguraldissertation von G. Rückle Göttingen 1901.

3) Hilbert: Über den Dirichletschen biquadratischen Zahlenkörper, Mathematische Annalen **45**; Über die Theorie der relativ-quadratischen Zahlkörper, Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1897 und Mathematische Annalen **51**; Über die Theorie der relativ-Abel'schen Körper, Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1898; Grundlagen der Geometrie, Festschrift zur Enthüllung des Gaufs-Weber-Denkmals in Göttingen, Leipzig 1899, Kapitel VIII § 83.

Digitized by Google

Den Übergang zur Algebra und Funktionentheorie möge das folgende wichtige Problem bilden.

12. Ausdehnung des Kroneckerschen Satzes über Abelsche Körper auf einen beliebigen algebraischen Rationalitätsbereich.

Von Kronecker rührt der Satz her, dafs jeder Abelsche Zahlkörper im Bereich der rationalen Zahlen durch Zusammensetzung aus Körpern von Einheitswurzeln entsteht. Dieser fundamentale Satz aus der Theorie der ganzzahligen Gleichungen enthält zwei Aussagen, nämlich

erstens wird durch denselben die Frage nach der Anzahl und Existenz derjenigen Gleichungen beantwortet, die einen vorgeschriebenen Grad, eine vorgeschriebene Abelsche Gruppe und eine vorgeschriebene Diskriminante in Bezug auf den Bereich der rationalen Zahlen besitzen, und

zweitens wird behauptet, dafs die Wurzeln solcher Gleichungen einen Bereich algebraischer Zahlen bilden, der genau mit demjenigen Bereiche übereinstimmt, den man erhält, wenn man in der Exponentialfunktion $e^{2\pi i z}$ für das Argument z der Reihe nach alle rationalen Zahlenwerte einträgt.

Die erste Aussage betrifft die Frage der Bestimmung gewisser algebraischer Zahlen durch ihre Gruppe und ihre Verzweigung; diese Frage entspricht also dem bekannten Problem der Bestimmung algebraischer Funktionen zu gegebener Riemannscher Fläche. Die zweite Aussage liefert die verlangten Zahlen durch ein transzendentes Mittel, nämlich durch die Exponentialfunktion $e^{2\pi i z}$.

Da nächst dem Bereiche der rationalen Zahlen der Bereich der imaginären quadratischen Zahlkörper der einfachste ist, so entsteht die Aufgabe, den Kroneckerschen Satz auf diesen Fall auszudehnen. Kronecker selbst hat die Behauptung ausgesprochen, dafs die Abelschen Gleichungen im Bereiche eines quadratischen Körpers durch die Transformationsgleichungen der elliptischen Funktionen mit singulären Moduln gegeben werden, so dafs hiernach die elliptische Funktion die Rolle der Exponentialfunktion im vorigen Falle übernimmt. Der Beweis der Kroneckerschen Vermutung ist bisher nicht erbracht worden; doch glaube ich, dafs derselbe auf Grund der von H. Weber[1]) entwickelten Theorie der komplexen Multiplikation unter Hinzuziehung der von mir aufgestellten rein arithmetischen Sätze über Klassenkörper ohne erhebliche Schwierigkeit gelingen mufs.

1) Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen, Braunschweig 1891.

Digitized by Google

Von der höchsten Bedeutung endlich erscheint mir die Ausdehnung des Kroneckerschen Satzes auf den Fall, *dafs an Stelle des Bereiches der rationalen Zahlen oder des imaginären quadratischen Zahlenbereiches ein beliebiger algebraischer Zahlkörper als Rationalitätsbereich zu Grunde gelegt wird;* ich halte dies Problem für eines der tiefgehendsten und weittragendsten Probleme der Zahlen- und Funktionentheorie.

Das Problem erweist sich von mannigfachen Seiten aus als zugänglich. Den wichtigsten Schlüssel zur Lösung des arithmetischen Teiles dieses Problemes erblicke ich in dem allgemeinen Reziprozitätsgesetze der $l$ten Potenzreste innerhalb eines beliebig vorgelegten Zahlkörpers.

Was den funktionentheoretischen Teil des Problems betrifft, so wird sich der Forscher auf diesem so anziehenden Gebiete durch die merkwürdigen Analogien leiten lassen, die zwischen der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen und der Theorie der algebraischen Zahlen bemerkbar sind. Das Analogon zur Potenzreihenentwickelung einer algebraischen Funktion in der Theorie der algebraischen Zahlen hat Hensel[1]) aufgestellt und untersucht und das Analogon für den Riemann-Rochschen Satz hat Landsberg[2]) behandelt. Auch die Analogie zwischen dem Begriff des Geschlechts einer Riemannschen Fläche und dem Begriff der Klassenanzahl eines Zahlkörpers fällt ins Auge. Betrachten wir, um nur den einfachsten Fall zu berühren, eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht $p = 1$ und andererseits einen Zahlkörper von der Klassenanzahl $h = 2$, so entspricht dem Nachweise der Existenz eines überall endlichen Integrals auf der Riemannschen Fläche der Nachweis der Existenz einer ganzen Zahl α im Zahlkörper, die von solcher Art ist, dafs die Zahl $\sqrt{\alpha}$ einen relativ unverzweigten quadratischen Körper in Bezug auf den Grundkörper darstellt. In der Theorie der algebraischen Funktionen dient bekanntlich zum Nachweise jenes Riemannschen Existenzsatzes die Methode der Randwertaufgabe; auch in der Theorie der Zahlkörper bietet der Nachweis der Existenz jener Zahl α gerade die meiste Schwierigkeit. Dieser Nachweis gelingt mit wesentlicher Hilfe des Satzes, dafs es im Zahlkörper stets Primideale mit vorgeschriebenen Restcharakteren giebt; die letztere Thatsache ist also das zahlentheoretische Analogon zum Randwertproblem.

1) Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung VI, sowie eine demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinende Arbeit: „Über die Entwickelung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen".

2) Mathematische Annalen **50**. 1898.

Digitized by Google

Die Gleichung des Abelschen Theorems in der Theorie der algebraischen Funktionen sagt bekanntlich die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, dafs die betreffenden Punkte der Riemannschen Fläche die Nullstellen einer algebraischen zur Fläche gehörigen Funktion sind; das genaue Analogon des Abelschen Theorems ist in der Theorie des Zahlkörpers von der Klassenanzahl $h = 2$ die Gleichung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes[1])

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{j}}\right) = +1,$$

welche aussagt, dafs das Ideal j dann und nur dann ein Hauptideal des Zahlkörpers ist, wenn jene Zahl α in Bezug auf das Ideal j einen positiven quadratischen Restcharakter besitzt.

Wie wir sehen, treten in dem eben gekennzeichneten Problem die drei grundlegenden Disziplinen der Mathematik, nämlich Zahlentheorie, Algebra und Funktionentheorie, in die innigste gegenseitige Berührung, und ich bin sicher, dafs insbesondere die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Variabeln eine wesentliche Bereicherung erfahren würde, wenn es gelänge, *diejenigen Funktionen aufzufinden und zu diskutieren, die für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper die entsprechende Rolle spielen, wie die Exponentialfunktion für den Körper der rationalen Zahlen und die elliptische Modulfunktion für den imaginären quadratischen Zahlkörper.*

Wir kommen nun zur Algebra; ich nenne im folgenden ein Problem aus der Gleichungstheorie und eines, auf welches mich die Theorie der algebraischen Invarianten geführt hat.

13. Unmöglichkeit der Lösung der allgemeinen Gleichung 7ten Grades mittelst Funktionen von nur 2 Argumenten.

Die Nomographie[2]) hat die Aufgabe, Gleichungen mittelst gezeichneter Kurvenscharen zu lösen, die von *einem* willkürlichen Parameter abhängen. Man sieht sofort, dafs jede Wurzel einer Gleichung, deren Koeffizienten nur von zwei Parametern abhängen, d. h. jede Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen auf mannigfache

---

1) Vgl. Hilbert: Über die Theorie der relativ-Abel'schen Zahlkörper, Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1898.

2) M. d'Ocagne: Traité de Nomographie, Paris 1899.

Digitized by Google

Weise durch dieses der Nomographie zu Grunde liegende Prinzip darstellbar ist. Ferner sind durch dieses Prinzip allein ohne Hinzunahme beweglicher Elemente offenbar auch eine grofse Klasse von Funktionen von drei und mehr Veränderlichen darstellbar, nämlich alle diejenigen Funktionen, die man dadurch erzeugen kann, dafs man zunächst eine Funktion von zwei Argumenten bildet, dann jedes dieser Argumente wieder gleich Funktionen von zwei Argumenten einsetzt, an deren Stelle wiederum Funktionen von zwei Argumenten treten u. s. f., wobei eine beliebige endliche Anzahl von Einschachtelungen der Funktionen zweier Argumente gestattet ist. So gehört beispielsweise jede rationale Funktion von beliebig vielen Argumenten zur Klasse dieser durch nomographische Tafeln konstruierbaren Funktionen; denn sie kann durch die Prozesse der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erzeugt werden, und jeder dieser Prozesse repräsentiert eine Funktion von nur zwei Argumenten. Man sieht leicht ein, dafs auch die Wurzeln aller Gleichungen, die in einem natürlichen Rationalitätsbereiche durch Wurzelziehen auflösbar sind, zu der genannten Klasse von Funktionen gehören; denn hier kommt zu den vier elementaren Rechnungsoperationen nur noch der Prozefs des Wurzelziehens hinzu, der ja lediglich eine Funktion eines Argumentes repräsentiert. Desgleichen sind die allgemeinen Gleichungen 5ten und 6ten Grades durch geeignete nomographische Tafeln auflösbar; denn diese können durch solche Tschirnhausentransformationen, die ihrerseits nur Ausziehen von Wurzeln verlangen, in eine Form gebracht werden, deren Koeffizienten nur von zwei Parametern abhängig sind.

Wahrscheinlich ist nun die Wurzel der Gleichung 7ten Grades eine solche Funktion ihrer Koeffizienten, die nicht zu der genannten Klasse von Funktionen gehört, d. h. die sich nicht durch eine endliche Anzahl von Einschachtelungen von Funktionen zweier Argumente erzeugen läfst. Um dieses einzusehen, wäre der Nachweis dafür nötig, *dafs die Gleichung 7ten Grades*

$$f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$$

nicht mit Hilfe beliebiger stetiger Funktionen von nur zwei Argumenten lösbar ist. Dafs es überhaupt analytische Funktionen von drei Argumenten x, y, z giebt, die nicht durch endlich-malige Verkettung von Funktionen von nur zwei Argumenten erhalten werden können, davon habe ich mich, wie ich noch bemerken möchte, durch eine strenge Überlegung überzeugt.

Durch Hinzunahme beweglicher Elemente gestattet die Nomographie auch die Konstruktion von Funktionen mit mehr als zwei Argumenten

Digitized by Google

— wie dies kürzlich M. d'Ocagne[1]) hinsichtlich der Gleichung 7ten Grades gezeigt hat.

14. Nachweis der Endlichkeit gewisser voller Funktionensysteme.

In der Theorie der algebraischen Invarianten verdienen, wie mir scheint, die Fragen nach der Endlichkeit voller Formensysteme ein besonderes Interesse. Es ist neuerdings L. Maurer[2]) gelungen, die von P. Gordan und mir bewiesenen Endlichkeitssätze der Invariantentheorie auf den Fall auszudehnen, dafs nicht, wie in der gewöhnlichen Invariantentheorie, die allgemeine projektive Gruppe, sondern eine beliebige Untergruppe der Definition der Invarianten zu Grunde gelegt wird. Einen wesentlichen Schritt in dieser Richtung hatte bereits vorher A. Hurwitz[3]) gethan, indem es ihm durch ein sinnreiches Verfahren gelang, den Nachweis der Endlichkeit der orthogonalen Invarianten einer beliebigen Grundform allgemein zu führen.

Die Beschäftigung mit der Frage nach der Endlichkeit der Invarianten hat mich auf ein einfaches Problem geführt, welches jene Frage nach der Endlichkeit der Invarianten als besonderen Fall in sich enthält, und zu dessen Lösung wahrscheinlich eine erheblich feinere Ausbildung der Theorie der Elimination und der Kroneckerschen algebraischen Modulsysteme nötig ist, als sie bisher gelungen ist.

Es seien eine Anzahl m von ganzen rationalen Funktionen X_1, X_2, ..., X_m der n Variabeln x_1, x_2, ..., x_n vorgelegt:

$$(S)\qquad \begin{cases} X_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ X_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_m = f_m(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Jede ganze rationale Verbindung von X_1, ..., X_m wird offenbar durch Eintragung dieser Ausdrücke notwendig stets eine ganze rationale Funktion von x_1, ..., x_n. Es kann jedoch sehr wohl gebrochene rationale Funktionen von X_1, ..., X_m geben, die nach Ausführung jener Substitution (S) zu *ganzen* Funktionen in x_1, ..., x_n werden. Eine jede solche rationale Funktion von X_1, ..., X_m, die nach Ausführung

1) Sur la résolution nomographique de l'équation du septième degré. Comptes rendus, Paris 1900.

2) Vgl. Sitzungsberichte der K. Akademie der Wiss. zu München 1899 und eine demnächst in den mathematischen Annalen erscheinende Arbeit.

3) Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration. Nachr. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen 1897.

Digitized by Google

der Substitution (S) ganz in $x_1, \ldots, x_n$ wird, möchte ich eine *relativganze* Funktion von $X_1, \ldots, X_m$ nennen. Jede ganze Funktion von $X_1, \ldots X_m$ ist offenbar auch relativganz; ferner ist die Summe, die Differenz und das Produkt relativganzer Funktionen stets wiederum relativganz.

Das entstehende Problem ist nun: zu entscheiden, ob es stets möglich ist, *ein endliches System von relativganzen Funktionen von $X_1, \ldots, X_m$ aufzufinden, durch die sich jede andere relativganze Funktion von $X_1, \ldots, X_m$ in ganzer rationaler Weise zusammensetzen läfst.* Wir können das Problem noch einfacher formulieren, wenn wir den Begriff *des endlichen Integritätsbereiches* einführen. Unter einem endlichen Integritätsbereiche möchte ich ein solches System von Funktionen verstehen, aus welchem sich eine endliche Anzahl von Funktionen auswählen läfst, mit deren Hilfe alle übrigen Funktionen des Systems in ganzer rationaler Weise ausdrückbar sind. Unser Problem läuft dann darauf hinaus, zu zeigen, dafs die sämtlichen relativganzen Funktionen eines beliebigen Rationalitätsbereiches stets einen endlichen Integritätsbereich bilden.

Es liegt auch nahe, das Problem *zahlentheoretisch zu verfeinern*, indem man die Koeffizienten der gegebenen Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ als ganze rationale Zahlen annimmt und unter den relativganzen Funktionen von $X_1, \ldots, X_m$ nur solche rationale Funktionen dieser Argumente versteht, die nach Ausführung jener Substitution (S) ganze rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ mit ganzen rationalen Koeffizienten werden.

Ein besonderer einfacher Fall dieses verfeinerten Problems ist der folgende: Gegeben seien m ganze rationale Funktionen $X_1, \ldots, X_m$ der einen Veränderlichen x mit ganzen rationalen Koeffizienten und ferner eine Primzahl p. Man betrachte das System derjenigen ganzen rationalen Funktionen von x, welche sich in der Gestalt

$$\frac{G(X_1, \ldots, X_m)}{p^h}$$

darstellen lassen, wo G eine ganze rationale Funktion der Argumente $X_1, \ldots, X_m$ und p^h irgend eine Potenz der Primzahl p ist. Frühere Untersuchungen von mir[1]) zeigen dann unmittelbar, dafs alle solchen Ausdrücke bei bestimmten Exponenten h einen endlichen Integritätsbereich bilden; die Frage ist aber hier, ob das Gleiche auch für alle Exponenten h zugleich gilt, d. h. ob sich eine endliche Anzahl von solchen Ausdrücken auswählen läfst, durch die jeder andere Ausdruck

1) Mathematische Annalen **36**, 485.

Digitized by Google

von jener Gestalt für irgend einen Exponenten h ganz und rational darstellbar ist.

Aus den Grenzgebieten zwischen Algebra und Geometrie möchte ich zwei Probleme nennen: das eine betrifft den geometrischen Abzählungskalkül und das zweite die Topologie algebraischer Kurven und Flächen.

15. Strenge Begründung von Schuberts Abzählungskalkül.

Das Problem besteht darin, *diejenigen geometrischen Anzahlen strenge und unter genauer Feststellung der Grenzen ihrer Gültigkeit zu beweisen, die insbesondere Schubert*[1]) *auf Grund des sogenannten Prinzips der speziellen Lage oder der Erhaltung der Anzahl mittelst des von ihm ausgebildeten Abzählungskalküls bestimmt hat.* Wenn auch die heutige Algebra die Durchführbarkeit der Eliminationsprozesse im Prinzip gewährleistet, so ist zum Beweise der Sätze der abzählenden Geometrie erheblich mehr erforderlich, nämlich die Durchführung der Elimination bei besonders geformten Gleichungen in der Weise, dafs der Grad der Endgleichungen und die Vielfachheit ihrer Lösungen sich voraussehen läfst.

16. Problem der Topologie algebraischer Kurven und Flächen.

Die Maximalzahl der geschlossenen und getrennt liegenden Züge, welche eine ebene algebraische Kurve $n$ter Ordnung haben kann, ist von Harnack[2]) bestimmt worden; es entsteht die weitere Frage nach der gegenseitigen Lage der Kurvenzüge in der Ebene. Was die Kurven 6ter Ordnung angeht, so habe ich mich — freilich auf einem recht umständlichen Wege — davon überzeugt, dafs die 11 Züge, die sie nach Harnack haben kann, keinesfalls sämtlich aufserhalb von einander verlaufen dürfen, sondern dafs ein Zug existieren mufs, in dessen Innerem ein Zug und in dessen Äufserem neun Züge verlaufen oder umgekehrt. *Eine gründliche Untersuchung der gegenseitigen Lage bei der Maximalzahl von getrennten Zügen scheint mir ebenso sehr von Interesse zu sein, wie die entsprechende Untersuchung über die Anzahl, Gestalt und Lage der Mäntel einer algebraischen Fläche im Raume* — ist doch bisher noch nicht einmal bekannt, wieviel Mäntel eine Fläche 4ter Ordnung des dreidimensionalen Raumes im Maximum wirklich besitzt.[3])

---

1) Kalkül der abzählenden Geometrie. Leipzig 1879.

2) Mathematische Annalen **10**.

3) Vgl. Rohn: Flächen vierter Ordnung, Preisschriften der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig 1886.

Digitized by Google

Im Anschluſs an dieses rein algebraische Problem möchte ich eine Frage aufwerfen, die sich, wie mir scheint, mittelst der nämlichen Methode der kontinuierlichen Koeffizientenänderung in Angriff nehmen läſst, und deren Beantwortung für die Topologie der durch Differentialgleichungen definierten Kurvenscharen von entsprechender Bedeutung ist — nämlich die Frage nach *der Maximalzahl und Lage der Poincaréschen Grenzcyklen (cycles limites) für eine Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades* von der Form:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

wo X, Y ganze rationale Funktionen $n$ten Grades in x, y sind, oder in homogener Schreibweise

$$X\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + Y\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + Z\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

wo X, Y, Z ganze rationale homogene Funktionen $n$ten Grades von x, y, z bedeuten und diese als Funktionen des Parameters t zu bestimmen sind.

17. Darstellung definiter Formen durch Quadrate.

Definit heifst eine solche ganze rationale Funktion oder Form beliebig vieler Veränderlichen mit reellen Koeffizienten, die für keine reellen Werte dieser Veränderlichen negativ ausfällt. Das System aller definiten Funktionen verhält sich invariant gegenüber den Operationen der Addition und der Multiplikation; aber auch der Quotient zweier definiten Funktionen ist — sofern er eine ganze Funktion der Veränderlichen wird — eine definite Form. Das Quadrat einer jeden beliebigen Form ist offenbar stets eine definite Form; da aber, wie ich gezeigt habe[1]), nicht jede definite Form durch Addition aus Formenquadraten zusammengesetzt werden kann, so entsteht die Frage — die ich für den Fall ternärer Formen in bejahendem Sinne entschieden habe[2]) —, *ob nicht jede definite Form als Quotient von Summen von Formenquadraten dargestellt werden kann.* Zugleich ist es für gewisse Fragen hinsichtlich der Möglichkeit gewisser geometrischer Konstruktionen wünschenswert, zu wissen, ob die Koeffizienten der bei der Darstellung zu verwendenden Formen stets in demjenigen Rationalitätsbereiche angenommen werden dürfen, der durch die Koeffizienten der dargestellten Form gegeben ist.[3])

1) Mathematische Annalen **32**.

2) Acta mathematica **17**.

3) Vgl. Hilbert: Grundlage der Geometrie, Leipzig 1899, Kap. VII, insbesondere § 38.

Digitized by Google

Ich nenne noch eine geometrische Aufgabe.

18. Aufbau des Raumes aus kongruenten Polyedern.

Wenn man nach denjenigen Gruppen von Bewegungen in der Ebene fragt, für die ein Fundamentalbereich existiert, so fällt bekanntlich die Antwort sehr verschieden aus, je nachdem die betrachtete Ebene die Riemannsche (elliptische), Euklidische oder Lobatschefskijsche (hyperbolische) ist. Im Falle der elliptischen Ebene giebt es eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener Arten von Fundamentalbereichen, und es reicht eine endliche Anzahl von Exemplaren kongruenter Bereiche zur lückenlosen Überdeckung der ganzen Ebene aus: die Gruppe besteht eben nur aus einer endlichen Anzahl von Bewegungen. Im Falle der hyperbolischen Ebene giebt es eine unendliche Anzahl wesentlich verschiedener Arten von Fundamentalbereichen, nämlich die bekannten Poincaréschen Polygone; zur lückenlosen Überdeckung der Ebene ist eine *unendliche* Anzahl von Exemplaren kongruenter Bereiche notwendig. Der Fall der Euklidischen Ebene steht in der Mitte; denn in diesem Falle giebt es nur eine *endliche* Anzahl von wesentlich verschiedenen Arten von Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich; aber zur lückenlosen Überdeckung der ganzen Ebene ist eine *unendliche* Anzahl von Exemplaren kongruenter Bereiche notwendig.

Genau die entsprechenden Thatsachen gelten auch im dreidimensionalen Raume. Die Thatsache der Endlichkeit der Bewegungsgruppen im elliptischen Raume ist eine unmittelbare Folge eines fundamentalen Satzes von C. Jordan[1]), wonach die Anzahl der wesentlich verschiedenen Arten von *endlichen* Gruppen linearer Substitutionen mit n Veränderlichen eine gewisse endliche, von n abhängige Grenze nicht überschreitet. Die Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich im hyperbolischen Raume sind von Fricke und Klein in den Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen[2]) untersucht worden, und endlich haben Fedorow[3]), Schoenflies[4]) und neuerdings Rohn[5]) den Beweis dafür erbracht, dafs es im Euklidischen Raume nur eine endliche Zahl wesentlich verschiedener Arten von Bewegungsgruppen

1) Journal für Mathematik **84** (1878) und Atti della Reale Accademia di Napoli 1880.

2) Leipzig 1897. Vgl. insbesondere Abschnitt I, Kap. 2—3.

3) Symmetrie der regelmäfsigen Systeme von Figuren 1890.

4) Krystallsysteme und Krystallstruktur, Leipzig 1891.

5) Mathematische Annalen **53**.

Digitized by Google

mit Fundamentalbereich giebt. Während nun die den elliptischen und hyperbolischen Raum betreffenden Resultate und Beweismethoden unmittelbar auch für den n-dimensionalen Raum Geltung haben, so scheint die Verallgemeinerung des den Euklidischen Raum betreffenden Satzes erhebliche Schwierigkeiten zu bieten, und es ist daher die Untersuchung der Frage wünschenswert, *ob es auch im n-dimensionalen Euklidischen Raume nur eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener Arten von Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich giebt.*

Ein Fundamentalbereich einer jeden Bewegungsgruppe zusammen mit den kongruenten, aus der Gruppe entspringenden Bereichen liefert offenbar eine lückenlose Überdeckung des Raumes. Es erhebt sich die Frage, ob ferner auch *solche Polyeder existieren, die nicht als Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen auftreten, und mittelst derer dennoch durch geeignete Aneinanderlagerung kongruenter Exemplare eine lückenlose Erfüllung des ganzen Raumes möglich ist.* Ich weise auf die hiermit in Zusammenhang stehende, für die Zahlentheorie wichtige und vielleicht auch der Physik und Chemie einmal Nutzen bringende Frage hin, wie man unendlich viele Körper von der gleichen vorgeschriebenen Gestalt, etwa Kugeln mit gegebenem Radius oder reguläre Tetraeder mit gegebener Kante (bez. in vorgeschriebener Stellung), im Raume am dichtesten einbetten, d. h. so lagern kann, daſs das Verhältnis des erfüllten Raumes zum nicht erfüllten Raume möglichst groſs ausfällt.

Überblicken wir die Entwickelung der Theorie der Funktionen im letzten Jahrhundert, so bemerken wir vor allem die fundamentale Rolle derjenigen Klasse von Funktionen, die wir heute als analytische Funktionen bezeichnen — eine Klasse von Funktionen, die wohl dauernd im Mittelpunkt des mathematischen Interesses stehen wird.

Wir können nach sehr verschiedenen Gesichtspunkten aus der Fülle aller denkbaren Funktionen umfassende Klassen herausheben, die einer besonders eingehenden Untersuchung würdig sind. Betrachten wir beispielsweise die Klasse derjenigen Funktionen, *die sich durch gewöhnliche oder partielle algebraische Differentialgleichungen charakterisieren lassen.* In dieser Klasse von Funktionen kommen, wie wir sofort bemerken, gerade solche Funktionen *nicht* vor, die aus der Zahlentheorie stammen und deren Erforschung für uns von höchster Wichtigkeit ist. Beispielsweise genügt die schon früher erwähnte Funktion $\zeta(s)$ keiner algebraischen Differentialgleichung, wie man leicht mit Hilfe der bekannten Relation zwischen $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$

Digitized by Google

erkennen kann, wenn man den von Hölder[1]) bewiesenen Satz benutzt, dafs die Funktion $\Gamma(x)$ keine algebraische Differentialgleichung befriedigt. Ferner genügt die durch die unendliche Reihe

$$\zeta(s, x) = x + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \frac{x^4}{4^s} + \cdots$$

definierte Funktion der beiden Veränderlichen s und x, die zu jener Funktion $\zeta(s)$ in enger Beziehung steht, wahrscheinlich keiner partiellen algebraischen Differentialgleichung; bei der Untersuchung dieser Frage wird man die Funktionalgleichung zu benutzen haben:

$$x \frac{\partial \zeta(s, x)}{\partial x} = \zeta(s - 1, x).$$

Wenn wir andererseits, was aus arithmetischen und geometrischen Gründen nahe liegt, die Klasse aller derjenigen Funktionen betrachten, *welche stetig und unbegrenzt differentiierbar sind*, so würden wir bei deren Untersuchung auf das gefügige Werkzeug der Potenzreihe und auf den Umstand verzichten müssen, dafs die Funktion durch die Wertezuordnung in jedem beliebig kleinen Gebiet völlig bestimmt ist. Während also die vorige Abgrenzung des Funktionsgebietes zu eng war, erscheint uns diese als zu weit.

Der Begriff der *analytischen* Funktion dagegen nimmt in sich den ganzen Reichtum der für die Wissenschaft wichtigsten Funktionen auf, mögen sie aus der Zahlentheorie, aus der Theorie der Differentialgleichungen oder der algebraischen Funktionalgleichungen, mögen sie aus der Geometrie oder der mathematischen Physik stammen; und so führt mit Recht die analytische Funktion im Reiche der Funktionen die unbedingte Herrschaft.

19. Sind die Lösungen regulärer Variationsprobleme stets notwendig analytisch?

Eine der begrifflich merkwürdigsten Thatsachen in den Elementen der Theorie der analytischen Funktionen erblicke ich darin, dafs es partielle Differentialgleichungen giebt, deren Integrale sämtlich notwendig analytische Funktionen der unabhängigen Variabeln sind, die also, kurz gesagt, nur analytischer Lösungen fähig sind. Die bekanntesten partiellen Differentialgleichungen dieser Art sind die Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

1) Mathematische Annalen 28.

Digitized by Google

und gewisse von Picard[1]) untersuchte lineare Differentialgleichungen, ferner die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^f,$$

die partielle Differentialgleichung der Minimalfläche und andere. Die Mehrzahl dieser partiellen Differentialgleichungen haben als Merkmal mit einander gemein, dafs sie die Lagrangeschen Differentialgleichungen gewisser Variationsprobleme sind und zwar solcher Variationsprobleme:

$$\iint F(p, q, z; x, y)\, dx dy = \text{Minimum} \qquad \left[p = \frac{\partial z}{\partial x},\ \ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right],$$

bei denen für alle in Frage kommenden Argumente die Ungleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\, \partial q}\right)^2 > 0$$

gilt, während F selbst eine analytische Funktion ist. Wir wollen ein solches Variationsproblem ein reguläres Variationsproblem nennen. Die regulären Variationsprobleme sind es vornehmlich, die in der Geometrie, Mechanik und mathematischen Physik eine Rolle spielen, und es liegt die Frage nahe, ob alle Lösungen regulärer Variationsprobleme stets notwendig analytische Funktionen sein müssen, *d. h. ob jede Lagrangesche partielle Differentialgleichung eines regulären Variationsproblems die Eigenschaft hat, dafs sie nur analytische Integrale zuläfst* — selbst, wenn man, wie bei dem Dirichletschen Potentialprobleme, der Funktion irgend welche stetige, aber nicht analytische Randwerte aufzwingt.

Ich bemerke noch, dafs es beispielsweise Flächen von *negativer* konstanter Gaufsscher Krümmung giebt, die durch stetige und fortgesetzt differentiierbare, aber nicht analytische Funktionen dargestellt werden, während wahrscheinlich jede Fläche von *positiver* konstanter Gaufsscher Krümmung stets notwendig eine analytische Fläche sein mufs. Bekanntlich stehen ja auch die Flächen positiver konstanter Krümmung in engster Verbindung mit dem regulären Variationsproblem, durch eine geschlossene Raumkurve eine Fläche kleinsten Flächeninhaltes zu legen, die mit einer festen Fläche durch die nämliche Raumkurve ein gegebenes Volumen abschliefst.

20. Allgemeines Randwertproblem.

Ein wichtiges Problem, welches mit dem eben genannten in engem Zusammenhange steht, ist die Frage nach der Existenz von Lösungen

1) Journal de l'École Polytechnique 1890.

Digitized by Google

von partiellen Differentialgleichungen mit vorgeschriebenen Randwerten. Die scharfsinnigen Methoden von H. A. Schwarz, C. Neumann und Poincaré haben dieses Problem für die Differentialgleichung des Potentials im wesentlichen gelöst; doch erscheinen diese Methoden im allgemeinen nicht unmittelbar der Ausdehnung fähig auf den Fall, in dem am Rande die Differentialquotienten oder Beziehungen zwischen diesen und den Werten der Funktion vorgeschrieben sind, oder wenn es sich nicht um Potentialflächen handelt, sondern etwa nach Flächen kleinsten Flächeninhalts oder nach Flächen mit konstanter positiver Gaufsscher Krümmung gefragt wird, die durch eine vorgelegte Raumkurve hindurch laufen oder über eine gegebene Ringfläche zu spannen sind. Ich bin überzeugt, dafs es möglich sein wird, diese Existenzbeweise durch einen allgemeinen Grundgedanken zu führen, auf den das Dirichletsche Prinzip hinweist, und der uns dann vielleicht in den Stand setzen wird, der Frage näher zu treten, *ob nicht jedes reguläre Variationsproblem eine Lösung besitzt, sobald hinsichtlich der gegebenen Grenzbedingungen gewisse Annahmen* — etwa die Stetigkeit und stückweise öftere Differentiierbarkeit der für die Randbedingungen mafsgebenden Funktionen — *erfüllt sind und nötigenfalls der Begriff der Lösung eine sinngemäfse Erweiterung erfährt.*[1])

21. Beweis der Existenz linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe.

Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen z möchte ich auf ein wichtiges Problem hinweisen, welches wohl bereits Riemann im Sinne gehabt hat, und welches darin besteht, zu zeigen, dafs es stets *eine lineare Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse mit gegebenen singulären Stellen und einer gegebenen Monodromiegruppe giebt.* Die Aufgabe verlangt also die Auffindung von n Funktionen der Variabeln z, die sich überall in der komplexen z-Ebene regulär verhalten, aufser etwa in den gegebenen singulären Stellen: in diesen dürfen sie nur von endlich hoher Ordnung unendlich werden, und beim Umlauf der Variabeln z um dieselben erfahren sie die gegebenen linearen Substitutionen. Die Existenz solcher Differentialgleichungen ist durch Konstantenzählung wahrscheinlich gemacht worden, doch gelang der strenge Beweis bisher nur in dem besonderen Falle, wo die Wurzeln der Fundamentalgleichungen der gegebenen Substitutionen sämtlich vom absoluten Betrage 1 sind.

1) Vgl. meinen Vortrag über das Dirichletsche Prinzip. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung VIII 1900, S. 184.

Digitized by Google

Diesen Beweis hat L. Schlesinger[1]) auf Grund der Poincaréschen Theorie der Fuchsschen ζ-Funktionen erbracht. Es würde offenbar die Theorie der linearen Differentialgleichungen ein wesentlich abgeschlosseneres Bild zeigen, wenn die allgemeine Erledigung des bezeichneten Problems gelänge.

22. Uniformisierung analytischer Beziehungen mittelst automorpher Funktionen.

Wie Poincaré zuerst bewiesen hat, gelingt die Uniformisierung einer beliebigen algebraischen Beziehung zwischen zwei Variabeln stets durch automorphe Funktionen einer Variabeln, d. h. wenn eine beliebige algebraische Gleichung zwischen zwei Variabeln vorgelegt ist, so lassen sich für dieselben stets solche eindeutigen automorphen Funktionen einer Variabeln finden, nach deren Einsetzung die algebraische Gleichung identisch in dieser Variabeln erfüllt ist. Die Verallgemeinerung dieses fundamentalen Satzes auf nicht algebraische, sondern beliebige analytische Beziehungen zwischen zwei Variabeln hat Poincaré[2]) ebenfalls mit Erfolg in Angriff genommen und zwar auf einem völlig anderen Wege, als derjenige war, der ihn bei dem anfangs genannten speziellen Probleme zum Ziele führte. Aus Poincarés Beweis für die Möglichkeit der Uniformisierung einer beliebigen analytischen Beziehung zwischen zwei Variabeln geht jedoch noch nicht hervor, ob es möglich ist, die eindeutigen Funktionen der neuen Variabeln so zu wählen, daſs, während diese Variable das *reguläre* Gebiet jener Funktionen durchläuft, auch wirklich die Gesamtheit aller regulären Stellen des vorgelegten analytischen Gebildes zur Darstellung gelangt. Vielmehr scheinen in Poincarés Untersuchungen, abgesehen von den Verzweigungspunkten, noch gewisse andere, im allgemeinen unendlich viele diskrete Stellen des vorgelegten analytischen Gebildes ausgenommen zu sein, zu denen man nur gelangt, indem man die neue Variable gewissen Grenzstellen der Funktionen nähert. *Eine Klärung und Lösung dieser Schwierigkeit scheint mir in Anbetracht der fundamentalen Bedeutung der Poincaréschen Fragestellung äuſserst wünschenswert.*

Im Anschluſs an dieses Problem bietet sich das Problem der Uniformisierung einer algebraischen oder beliebigen analytischen Beziehung zwischen drei oder mehr komplexen Veränderlichen — ein

1) Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. 2, Teil 2, Nr. 366.

2) Bulletin de la Société Mathématique de France XI, 1883.

Digitized by Google

Problem, das bekanntlich in zahlreichen besonderen Fällen lösbar ist, und für welches die neueren Untersuchungen von Picard über algebraische Funktionen von zwei Variabeln als willkommene und bedeutsame Vorarbeiten in Anspruch zu nehmen sind.

23. Weiterführung der Methoden der Variationsrechnung.

Bisher habe ich im allgemeinen möglichst bestimmte und spezielle Probleme genannt, in der Erwägung, dafs es gerade die bestimmten und speziellen Probleme sind, die uns am meisten anziehen und von denen oft der nachhaltige Einflufs auf die Gesamtwissenschaft ausgeht. Dennoch möchte ich mit einem allgemeinen Probleme schliefsen, nämlich mit dem Hinweise auf eine Disziplin, die bereits mehrmals in meinem Vortrage Erwähnung fand — eine Disziplin, die trotz der erheblichen Förderung, die sie in neuerer Zeit durch Weierstrafs erfahren hat, dennoch nicht die allgemeine Schätzung geniefst, die ihr meiner Ansicht nach zukommt — ich meine die *Variationsrechnung.*[1]) Die geringe Verbreitung dieser Disziplin ist vielleicht zum Teil durch den bisherigen Mangel an neueren zuverlässigen Lehrbüchern verschuldet. Um so verdienstvoller ist es daher, dafs A. Kneser[2]) in einem jüngst erschienenen Werke die Variationsrechnung nach den neueren Gesichtspunkten und mit Berücksichtigung der modernen Forderungen der Strenge bearbeitet hat.

Die Variationsrechnung im weitesten Sinne ist die Lehre vom Variieren der Funktionen und erscheint uns als solche wie eine denknotwendige Fortsetzung der Differential- und Integralrechnung. So aufgefafst, bilden beispielsweise die Poincaréschen Untersuchungen über das Dreikörperproblem ein Kapitel der Variationsrechnung, insofern darin Poincaré aus bekannten Bahnkurven von gewisser Beschaffenheit durch das Prinzip des Variierens neue Bahnkurven von ähnlicher Beschaffenheit ableitet.

---

1) Lehrbücher sind Moigno-Lindelöf: „Leçons du calcul des variations", Paris 1861 und A. Kneser: „Lehrbuch der Variationsrechnung", Braunschweig 1900.

2) Braunschweig 1900. Zur Charakterisierung des Inhaltes dieses Werkes sei bemerkt, dafs A. Kneser bei den einfachsten Problemen auch für den Fall, dafs eine Integrationsgrenze veränderlich ist, hinreichende Bedingungen des Extremums ableitet und die Enveloppe einer Schar von Kurven, die den Differentialgleichungen des Problems genügen, benutzt, um die Notwendigkeit der Jacobischen Bedingungen des Extremums nachzuweisen. Ferner sei hervorgehoben, dafs A. Kneser in seinem Lehrbuche die Weierstrafsche Theorie auch auf die Frage nach dem Extremum solcher Gröfsen anwendet, die durch Differentialgleichungen definiert sind.

Digitized by Google

Den am Anfange meines Vortrags gemachten allgemeinen Bemerkungen über Variationsrechnung füge ich hier eine kurze Begründung hinzu.

Das einfachste Problem der eigentlichen Variationsrechnung besteht bekanntlich darin, eine Funktion y der Veränderlichen x derart zu finden, dafs das bestimmte Integral

$$J = \int_a^b F(y_x, y; x)dx \qquad \left[y_x = \frac{dy}{dx}\right]$$

einen Minimalwert erhält im Vergleich zu denjenigen Werten, die das Integral annimmt, wenn wir statt y andere Funktionen von x mit den nämlichen gegebenen Anfangs- und Endwerten in das bestimmte Integral einsetzen. Das Verschwinden der ersten Variation im üblichen Sinne

$$\delta J = 0$$

liefert für die gesuchte Funktion y die bekannte Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1) \qquad \frac{dF_{y_x}}{dx} - F_y = 0 \qquad \left[F_{y_x} = \frac{\partial F}{\partial y_x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}\right].$$

Um nun des Näheren die notwendigen und hinreichenden Kriterien für das Eintreten des verlangten Minimums zu untersuchen, betrachten wir *das Integral*

$$J^* = \int_a^b \{F + (y_x - p)\, F_p\}\, dx$$

$$\left[F = F(p, y; x), \quad F_p = \frac{\partial F(p, y; x)}{\partial p}\right]$$

und fragen, wie darin p als Funktion von x, y, zu nehmen ist, damit der Wert dieses Integrals J von dem Integrationswege, d. h. von der Wahl der Funktion y der Variabeln x unabhängig wird.* Das Integral J^* hat die Form

$$J^* = \int_a^b \{A y_x - B\}\, dx,$$

wo A und B nicht y_x enthalten, und das Verschwinden der ersten Variation

$$\delta J^* = 0$$

in dem Sinne, den die neue Fragestellung erfordert, liefert die Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0,$$

Digitized by Google

d. h. wir erhalten für die Funktion p der beiden Veränderlichen x, y die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1^*) \qquad \frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial (pF_p - F)}{\partial y} = 0.$$

Die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) und die eben gefundene partielle Differentialgleichung (1*) stehen zu einander in engster Beziehung. Diese Beziehung wird uns unmittelbar deutlich durch die folgende einfache Umformung:

$$\begin{aligned}\delta J^* &= \int_a^b \{F_y \delta y + F_p \delta p + (\delta y_x - \delta p) F_{y'} + (y_x - p)\, \delta F_p\}\, dx \\ &= \int_a^b \{F_y \delta y + \delta y_x F_{y'} + (y_x - p)\, \delta F_p\}\, dx \\ &= \delta J + \int_a^b (y_x - p)\, \delta F_p dx.\end{aligned}$$

Wir entnehmen nämlich hieraus folgende Thatsachen: wenn wir uns irgend eine *einfache* Schar von Integralkurven der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) verschaffen und dann eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$(2) \qquad y_x = p\,(x,\ y)$$

bilden, die diese Integralkurven ebenfalls als Lösungen zuläßt, so ist stets die Funktion $p(x,\ y)$ ein Integral der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (1*); und umgekehrt, wenn $p(x,\ y)$ irgend eine Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (1*) bedeutet, so sind die sämtlichen nicht singulären Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung (2) zugleich Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung (1); oder kurz ausgedrückt: wenn $y_x = p\,(x,\ y)$ eine Integralgleichung erster Ordnung der Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) ist, so stellt $p\,(x,\ y)$ ein Integral der partiellen Differentialgleichung (1*) dar und umgekehrt; die Integralkurven der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) sind also zugleich die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (1*).

In dem vorliegenden Falle finden wir das nämliche Resultat auch mittelst einer einfachen Rechnung; diese liefert uns nämlich die in Rede stehenden Differentialgleichungen (1), bez. (1*) in der Gestalt

$$(1) \qquad y_{xx} F_{y_x y_x} + y_x F_{y_x y} + F_{y_x x} - F_y = 0,$$

bez.

$$(1^*) \qquad (p_x + pp_y) F_{pp} + pF_{py} + F_{px} - F_y = 0,$$

Digitized by Google

wo die unteren Indices in leichtverständlicher Schreibweise die partiellen Ableitungen nach x, y, p, y_x bedeuten. Hieraus leuchtet die Richtigkeit der behaupteten Beziehung ein.

Die vorhin aufgestellte und soeben bewiesene enge Beziehung zwischen der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) und der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (1*) ist, wie mir scheint, für die Variationsrechnung von grundlegender Bedeutung. Denn wegen der Unabhängigkeit des Integrales J^* vom Integrationswege folgt nunmehr

$$(3) \qquad \int_a^b \{F(p) + (y_x - p)\, F_p(p)\}\, dx = \int_a^b F(\overline{y_x})\, dx,$$

wenn wir das Integral linker Hand auf irgend einem Wege y und das Integral rechter Hand auf einer Integralkurve y der Differentialgleichung

$$\overline{y_x} = p(x, \bar{y})$$

genommen denken. Mit Hilfe der Gleichung (3) gelangen wir zu der Weierstrafsschen Formel

$$(4) \qquad \int_a^b F(y_x)\, dx - \int_a^b F(\overline{y_x})\, dx = \int_a^b E(y_x, p)\, dx,$$

wo E den von den 4 Argumenten y_x, p, y, x abhängigen Weierstrafsschen Ausdruck

$$E(y_x, p) = F(y_x) - F(p) - (y_x - p)\, F_p(p)$$

bezeichnet. Da es hiernach lediglich darauf ankommt, die in Rede stehende Integralkurve $\bar{y}$ in der xy-Ebene auf eindeutige und stetige Weise mit Werten einer entsprechenden Integralfunktion $p(x, y)$ zu umgeben, so führen die eben angedeuteten Entwickelungen unmittelbar — ohne Heranziehung der zweiten Variation, sondern allein durch Anwendung des Polarenprozesses auf die Differentialgleichung (1) — zur Aufstellung der Jacobischen Bedingung und zur Beantwortung der Frage, inwiefern diese Jacobische Bedingung im Verein mit der Weierstrafsschen Bedingung $E > 0$ für das Eintreten eines Minimums notwendig und hinreichend ist.

Die angedeuteten Entwickelungen lassen sich, ohne dafs eine weitere Rechnung nötig wäre, auf den Fall zweier oder mehr gesuchter Funktionen, sowie auf den Fall eines Doppel- oder mehrfachen Integrals übertragen. So liefert beispielsweise im Fall des über ein gegebenes Gebiet ω zu erstreckenden Doppelintegrals

$$J = \int F(z_x, z_y, z; x, y)\, d\omega \qquad \left[z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

Digitized by Google

das im üblichen Sinne zu verstehende Verschwinden der ersten Variation

$$\delta J = 0$$

für die gesuchte Funktion z von x, y die bekannte Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(I)} \quad \frac{dF_{z_x}}{dx} + \frac{dF_{z_y}}{dy} - F_z = 0 \qquad \left[F_{z_x} = \frac{\partial F}{\partial z_x}, \quad F_{z_y} = \frac{\partial F}{\partial z_y}, \quad F_z = \frac{\partial F}{\partial z}\right].$$

Andererseits betrachten wir *das Integral*

$$J^* = \int \{F + (z_x - p)\, F_p + (z_y - q)\, F_q\}\, d\omega$$

$$\left[F = F(p, q, z; x, y), \quad F_p = \frac{\partial F(p, q, z; x, y)}{\partial p}, \quad F_q = \frac{\partial F(p, q, z; x, y)}{\partial q}\right]$$

und fragen, wie darin p und q als Funktionen von x, y, z zu nehmen sind, damit der Wert dieses Integrals von der Wahl der durch die gegebene geschlossene Raumkurve gelegten Fläche, d. h. von der Wahl der Funktion z der Variabeln x, y unabhängig wird. Das Integral J^* hat die Form

$$J^* = \int \{Az_x + Bz_y - C\}\, d\omega,$$

und das Verschwinden der ersten Variation

$$\delta J^* = 0$$

in dem Sinne, den die neue Fragestellung erfordert, liefert die Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

d. h. wir erhalten für die Funktionen p und q der drei Variabeln x, y, z die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y} + \frac{\partial (pF_p + qF_q - F)}{\partial z} = 0.$$

Fügen wir zu dieser Differentialgleichung noch die aus den Gleichungen

$$z_x = p(x, y, z), \quad z_y = q(x, y, z)$$

resultierende partielle Differentialgleichung

$$\text{(I*)} \qquad p_y + qp_z = q_x + pq_z$$

hinzu, so stehen die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung (I) für die Funktion z der zwei Veränderlichen x, y und das simultane System der zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (I*) für die zwei Funktionen p und q der drei Veränderlichen x, y, z zu einander genau in der analogen Beziehung, wie vorhin im Falle eines einfachen Integrals die Differentialgleichungen (1) und (1*).

Wegen der Unabhängigkeit des Integrals J^* von der Wahl der Integrationsfläche z folgt:

$$\int \{F(p, q) + (z_x - p)\, F_p(p, q) + (z_y - q)\, F_q(p, q)\}\, d\omega = \int F(\overline{z_x}, \overline{z_y})\, d\omega,$$

Digitized by Google

wenn wir das Integral rechter Hand auf einer Integralfläche $\bar{z}$ der partiellen Differentialgleichungen

$$\bar{z}_x = p(x, y, \bar{z}), \quad \bar{z}_y = q(x, y, \bar{z})$$

genommen denken, und mit Hilfe dieser Formel gelangen wir dann sofort zu der Formel

$$\text{(IV)} \qquad \int F(z_x, z_y)\,d\omega - \int F(\bar{z}_x, \bar{z}_y)\,d\omega = \int E(z_x, z_y, p, q)\,d\omega,$$

$$E(z_x, z_y, p, q) = F(z_x, z_y) - F(p, q) - (z_x - p)F_p(p, q) - (z_y - q)F_q(p, q),$$

die für die Variation der Doppelintegrale die nämliche Rolle spielt, wie die vorhin angegebene Formel (4) für die einfachen Integrale, und mit deren Hilfe wir wiederum die Frage beantworten können, inwiefern die Jacobische Bedingung im Verein mit der Weierstrafsschen Bedingung $E > 0$ für das Eintreten eines Minimums notwendig und hinreichend ist.

Mit dieser Entwickelung verwandt ist die Modifikation, in welcher, von anderen Gesichtspunkten ausgehend, A. Kneser[1]) die Weierstrafssche Theorie dargestellt hat. Während nämlich Weierstrafs zur Ableitung hinreichender Bedingungen des Extremums die durch einen festen Punkt gehenden Integralkurven der Gleichung (1) benutzt, macht A. Kneser von einer beliebigen einfachen Schar solcher Kurven Gebrauch und konstruiert zu jeder solchen Schar eine für sie charakteristische Lösung derjenigen partiellen Differentialgleichung, welche als Verallgemeinerung der Jacobi-Hamiltonschen anzusehen ist.

Die genannten Probleme sind nur Proben von Problemen; sie genügen jedoch, um uns vor Augen zu führen, wie reich, wie mannigfach und wie ausgedehnt die mathematische Wissenschaft schon heute ist, und es drängt sich uns die Frage auf, ob der Mathematik einst bevorsteht, was anderen Wissenschaften längst widerfahren ist, nämlich dafs sie in einzelne Teilwissenschaften zerfällt, deren Vertreter kaum noch einander verstehen und deren Zusammenhang daher immer loser wird. Ich glaube und wünsche dies nicht; die mathematische Wissenschaft ist meiner Ansicht nach ein unteilbares Ganze, ein Organismus, dessen Lebensfähigkeit durch den Zusammenhang seiner Teile bedingt wird. Denn bei aller Verschiedenheit des mathematischen Wissensstoffes im einzelnen, gewahren wir doch sehr deutlich die Gleichheit der logischen Hilfsmittel, die Verwandtschaft der Ideenbildungen in der ganzen

1) Vgl. sein vorhin genanntes Lehrbuch der Variationsrechnung § 14, § 15, § 19, § 20.

Digitized by Google

Mathematik und die zahlreichen Analogien in ihren verschiedenen Wissensgebieten. Auch bemerken wir: je weiter eine mathematische Theorie ausgebildet wird, desto harmonischer und einheitlicher gestaltet sich ihr Aufbau, und ungeahnte Beziehungen zwischen bisher getrennten Wissenszweigen werden entdeckt. So kommt es, dafs mit der Ausdehnung der Mathematik ihr einheitlicher Charakter nicht verloren geht, sondern desto deutlicher offenbar wird.

Aber — so fragen wir — wird es bei der Ausdehnung des mathematischen Wissens für den einzelnen Forscher nicht schliefslich unmöglich, alle Teile dieses Wissens zu umfassen? Ich möchte als Antwort darauf hinweisen, wie sehr es im Wesen der mathematischen Wissenschaft liegt, dafs jeder wirkliche Fortschritt stets Hand in Hand geht mit der Auffindung schärferer Hilfsmittel und einfacherer Methoden, die zugleich das Verständnis früherer Theorien erleichtern und umständliche ältere Entwickelungen beseitigen, und dafs es daher dem einzelnen Forscher, indem er sich diese schärferen Hilfsmittel und einfacheren Methoden zu eigen macht, leichter gelingt, sich in den verschiedenen Wissenszweigen der Mathematik zu orientieren, als dies für irgend eine andere Wissenschaft der Fall ist.

Der einheitliche Charakter der Mathematik liegt im inneren Wesen dieser Wissenschaft begründet; denn die Mathematik ist die Grundlage alles exakten naturwissenschaftlichen Erkennens. Damit sie diese hohe Bestimmung vollkommen erfülle, mögen ihr im neuen Jahrhundert geniale Meister erstehen und zahlreiche in edlem Eifer erglühende Jünger!

Digitized by Google

Über die Helligkeit der Sehorgane bei Menschen und Tieren, insbesondere bei den Knochenfischen.

Von Alexander Gleichen in Berlin.

I. *Allgemeiner Ausdruck für die Helligkeit, mit der ein Auge sieht.*

In der Fig. 1 sei $PAA'P'$ die optische Achse eines menschlichen Auges. In A und A' befinden sich die sogenannten Eintritts- und Austrittspupillen (die (EP) und die (AP)). Beide sind Bilder der Iris, die sich innerhalb des optischen Systems des Auges bei K befindet und

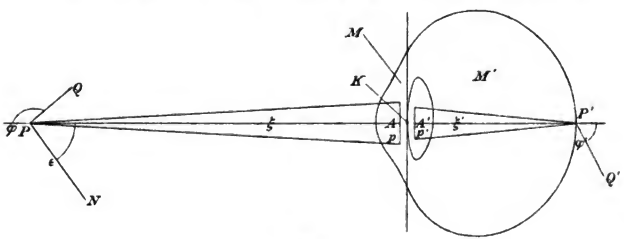


Fig. 1.

dieses System gewissermafsen in zwei Teile M und M' teilt. Der Teil M wird durch die Hornhaut und das Kammerwasser, der Teil M' durch die Linse gebildet, die jedoch (in Richtung zur Netzhaut) nicht an Luft grenzt, sondern an das Medium des Glaskörpers, dessen Brechungsexponenten wir mit n' bezeichnen wollen. Das Bild der Iris, in Luft durch das System M erzeugt, ist die (EP) mit dem Radius p. Das Bild der Iris, im Medium des Glaskörpers durch das System M' erzeugt, ist die (AP) mit dem Radius p'.

Auf der optischen Achse des Auges befinde sich ein Flächenelement $PQ = dq$. Wir denken uns durch die optische Achse und durch die Normale PN des Elementes eine Ebene gelegt, welche mit der Papierebene in Fig. 1 zusammenfalle.

Digitized by Google

Wir wollen die Helligkeit berechnen, mit der das Auge das Element dq sieht, und zwar unter Voraussetzung eines beliebigen Emanationsgesetzes. Wenn ein Auge ein kleines Flächenstück fixiert, so mufs dieses Flächenstück in der Nähe der optischen Achse liegen, und wir können eine Abbildung mittels „Paraxialstrahlen" als vorhanden betrachten. Unter „Paraxialstrahlen" verstehen wir herkömmlicher Weise solche Strahlen, die sich in unmittelbarer Nähe der Achse befinden, so dafs man nach Belieben die Sinus und Tangenten ihrer Achsenneigungen mit diesen Winkeln selbst vertauschen kann. Da das Menschenauge und auch die Augen der meisten Wirbeltiere nach dem Typus eines Systems zentrierter Kugelflächen konstruiert sind, so sind wir in der Lage, die bekannten, für ein solches System gültigen Abbildungsgesetze bei dem vorliegenden Problem anzuwenden.

Man nahm häufig an, dafs die von dq ausgehende Strahlung ihrer spezifischen Intensität nach proportional dem Kosinus des Emanationswinkels ε (Winkel zwischen Normale PN und Strahlungsrichtung PA) sei, eine von Lambert zuerst aufgestellte Hypothese, und kam dann zu dem Resultat, dafs das Auge ein leuchtendes Flächenelement in jeder Entfernung und jeder Lage gleich hell sehe. Die Beweisführung hierfür beruht darauf, dafs die Gröfse des Netzhautbildes von dq proportional gesetzt wird dem räumlichen Sehwinkel, unter dem dieses Bild vom zweiten (bildseitigen) Knotenpunkt des Auges aus erscheint. Diese Annahme ist nicht streng notwendig, und wir werden weiter unten den allgemeinsten Ausdruck für die Helligkeit genauer kennen lernen, der für die Photometrie nicht ganz ohne Interesse sein dürfte. Aufserdem ist an der Gültigkeit des Lambertschen Gesetzes in neuerer Zeit verschiedentlich Zweifel erhoben, namentlich auch, weil es sich für die Beleuchtung der Planeten durch die Sonne als unzutreffend erwiesen hat. Die neueren, von Lommel und Seeliger aufgestellten Formeln haben allerdings auch nicht zu widerspruchsfreien Ergebnissen geführt.

Wir nehmen infolge dessen zunächst ein beliebiges Emanationsgesetz $f(\varepsilon)$ an. Dann ist die von dem Flächenelement dq ausgehende Lichtenergie

$$dE = kf(\varepsilon)dqd\omega,$$

wo $d\omega$ das kleine Flächenstück ist, das der von P ausgehende Strahlenkegel aus einer um P mit dem Radius Eins geschlagenen Kugel herausschneidet und k eine Konstante bedeutet. Nun folgt nach einer einfachen Proportion aus der Figur

$$d\omega = \frac{p^2\pi}{\xi^2},$$

wo ξ die Entfernung des Elementes dq von A und π die Ludolphine

Digitized by Google

ist. Ferner können wir den Flächeninhalt von dq gleich dem Produkt aus der Strecke $PQ = ds$, und einem zu PQ senkrechten Durchmesser dz dieses Flächenstückes setzen, welcher letztere auf der Papierebene und also auch auf der optischen Achse senkrecht steht.

Dann ist

$$dq = dsdz$$

und also:

$$dE = kf(\varepsilon)ds\,\frac{dzp^2\pi}{\xi^2}.$$

Die Größe des Bildes von dq auf der Netzhaut können wir durch $ds'dz'$ ausdrücken, wenn ds' und dz' die Bilder auf der Netzhaut von ds und dz sind, die auch nach der Brechung auf einander senkrecht stehen. Als Helligkeit definieren wir nun, wie üblich, das Quantum Lichtenergie, das auf die Flächeneinheit des Netzhautbildes gelangt, und erhalten:

$$h = \frac{dE}{ds'dz'} = kf(\varepsilon)\,\frac{ds}{ds'}\,\frac{dz}{dz'}\cdot\frac{p^2\pi}{\xi^2}.$$

Nach den Prinzipien der Abbildungslehre bei zentrierten Systemen ist nun das Verhältnis $\frac{dz'}{dz}$ zweier achsensenkrechten Linienelemente an den konjugierten Stellen P und P' gleich der Lateralvergrößerung β. Bilden ferner die Elemente ds und ds', von denen das erste dem Bildraum, das andere dem Objektraum angehört, mit der Axe die Winkel φ und φ', so ist

$$\frac{ds'}{ds} = \beta\,\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}.$$

Bezeichnet ferner ξ' die Entfernung der Austrittspupille vom Punkte P' und sind n und n' die Brechungsexponenten im Objektraum und Bildraum, so ist ferner[1])

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{n'}{n}\beta B,$$

wo B die Lateralvergrößerung in den Pupillen, d. h. in den Punkten A und A' bedeutet. Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen wird der Ausdruck für die Helligkeit, mit der das Auge sieht:

$$h = kf(\varepsilon)\,\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}\left(\frac{n'B}{n}\right)^2\frac{p^2\pi}{\xi'^2}. \tag{1}$$

Da p und p' die Radien der Ein- und Austrittspupille sind, so ist auch $B = \frac{p'}{p}$. Ist ferner Ω der Raumwinkel, unter dem die Austrittspupille vom Punkte P' aus erscheint, so hat man aus der Figur:

$$\pi p^2 = \Omega\xi^2.$$

1) Siehe z. B. Czapski: Theorie der optischen Instrumente nach Abbe. Breslau 1893. S. 166.

Digitized by Google

Unter Berücksichtigung dieser Relationen kann man den Ausdruck für h auch in der einfachen Form schreiben:

$$h = kf(\varepsilon)\mathfrak{Q}\left(\frac{n'}{n}\right)^2 \frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}. \tag{2}$$

Das Bild dq' von dq ist unter dem Winkel φ' zur Achse geneigt, könnte also von einer als Fläche gedachten Netzhaut gar nicht perzipiert werden. Diese Perzeption könnte nur dann vorhanden sein, wenn die lichtempfindliche Schicht eine gewisse Dicke hätte und eine Struktur, die das wirkliche Zustandekommen eines dioptrischen Bildes erlaubte. Im andern Falle würde gar nicht die Gröfse von dq' in Frage kommen, sondern nur die Projektion von dq' auf die als achsensenkrecht gedachte Netzhaut, mit anderen Worten: Wir hätten, um die Helligkeit h zu erhalten, die Energie $d\varepsilon$ nicht durch $dq = ds'\,dz'$, sondern durch $ds'\,dz'\sin\varphi'$ dividieren müssen, wodurch in den Gleichungen (1) und (2) der Faktor $\sin\varphi'$ verschwinden würde. Welche der beiden Annahmen wir in der Natur auch als giltig ansehen, es läfst sich immer zeigen, dafs für einigermafsen entfernte Objekte beide Fälle zu demselben mathematischen Ausdruck für die Helligkeit führen.

Nach den allgemeinen Prinzipien der dioptrischen Abbildung durch ein zentriertes System besteht nämlich zwischen den Winkeln φ und φ' die Beziehung

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{n}{n'}\frac{1}{\beta} = \frac{\xi}{\xi'}\frac{B}{}.$$

Mittels dieser letzteren Beziehung erhält man:

$$\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\varphi + \left(\frac{\xi'}{\xi B}\right)^2 \cos^2\varphi}}. \tag{3}$$

Die Gröfse $\left(\frac{\xi'}{\xi B}\right)^2$ ist für nicht zu kleine Gröfsen ξ immer selbst sehr klein, schon für die deutliche Sehweite des normalen Menschenauges erhält man sie zu 0,007. Für einigermafsen beträchtliche Werte von ξ wird man sie also vernachlässigen können, und Gl. (2) ergiebt dann mittels Gl. (3)

$$h = kf(\varepsilon)\mathfrak{Q}\left(\frac{n'}{n}\right)^2 \frac{1}{\sin\varphi} \tag{4}$$

einen Wert, den wir nach obigem auch erhalten hätten, wenn wir die Netzhaut nur als eine lichtempfindliche mathematische „Fläche" ohne jede Tiefenausdehnung angenommen hätten. Unter den gemachten Voraussetzungen beträchtlicher Werte von ξ kann also Gl. (4) unter allen Umständen als allgemeingiltig angenommen werden. Über die Gröfse $f(\varepsilon)$, d. h. über das herrschende Emanationsgesetz, haben wir bis jetzt keine besondere Annahme gemacht. Wie aber schon erwähnt, scheint ein

Digitized by Google

derartiges allgemeines, für alle Körper geltendes Gesetz nicht zu existieren; denn verschiedene Autoren haben auch verschiedene Formen desselben aufgestellt. Von den vier in der Litteratur bekannten Formen von Lambert, Euler, Lommel, Seeliger wollen wir hier nur das erstere näher betrachten, weil es eine bemerkenswerte Eigenschaft zeigt. Nach Lambert ist

$$f(\varepsilon) = \cos \varepsilon.$$

Da nun aus unserer Figur

$$\varphi - \varepsilon = 90^0$$

folgt, so wird

$$f(\varepsilon) = \sin \varphi,$$

und (4) giebt

$$h = k \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \Omega. \tag{5}$$

Die Helligkeit ergiebt sich also in diesem Falle als unabhängig von der Achsenneigung des strahlenden Flächenelementes.

Da das Emanationsgesetz auf einen Vorgang aufserhalb des Auges sich bezieht, so ist es gleichgiltig, sobald wir die Helligkeit verschieden konstruierter Augen, wie Menschen- und Tieraugen mit einander vergleichen wollen. Wir brauchen in diesem Falle uns das strahlende Element nur unter demselben Winkel zur Achse vorzustellen und können uns dann die Gröfse $\frac{f(\varepsilon)}{\sin \varphi}$ mit der Konstante k vereinigt denken. Noch bequemer ist es, das Element dq als achsensenkrecht anzunehmen; dann werden wir $f(\varepsilon) = 1$ und $\sin \varphi = 1$ setzen dürfen und erhalten

$$h = k \frac{B^2 n'^2 p^2 \pi}{n^2 g'^2}, \tag{6}$$

einen Ausdruck, den wir den folgenden Betrachtungen zu Grunde legen wollen.

II. *Das Menschenauge und das Fischauge.*

Für das Menschenauge ist n, der Brechungsindex der Luft, gleich der Einheit zu setzen, während n', der Brechungsindex des Bildraumes, d. h. der wässerigen Flüssigkeit,

$$n' = 1{,}3365$$

zu setzen ist.

Die Gröfse B, d. h. das Vergröfserungsverhältnis der Ein- und Austrittspupille, hat nach Helmholtz den Wert

$$B = 0{,}923.$$

Da nach den Untersuchungen desselben Forschers die Austrittspupille nur um 0,1 *mm* von der Iris entfernt liegt, so können wir im Mittel

Digitized by Google

für ξ', d. h. für die Entfernung der Austrittspupille von der Netzhaut, den Wert $\xi' = 20\ mm$ annehmen und erhalten

$$h = kp^2\pi \cdot 0{,}003801.$$

Hierbei ist p der Radius der Austrittspupille; dieser ist nach Helmholtz um ein Siebentel größer als der Radius der Iris. Kennt man den letzteren gleich r, so ist also $p = \frac{8}{7}r$, und es wird

$$h = kr^2\pi \cdot 0{,}00496. \tag{6a}$$

Wir wollen jetzt noch das Auge eines anderen Geschöpfes als des Menschen in unsere Betrachtung ziehen. Während die Augen der höheren Wirbeltiere insbesondere der Säugetiere und Vögel im allgemeinen dem Menschenauge analog gebildet sind, zeigen die Sehorgane der Knochenfische einen abweichenden, einfachen und doch sehr charakteristischen Bau.[1]) Die Linse hat beinahe strenge Kugelform und einen hohen Brechungsexponenten, sie liegt unmittelbar der vorderen Augenwand an, eine vordere Augenkammer ist nicht vorhanden, die Hornhaut bildet vor der Iris eine ebene Platte[2]) ohne jede dioptrische Wirkung. Die Iris scheint die Fähigkeit sich auszudehnen und zusammenzuziehen verloren zu haben; wenigstens sind deutliche Irisbewegungen nur ganz ausnahmsweise (beim Aal und Hundshai) konstatiert.

In Figur 2 sei ein solches Auge dargestellt. $A'AM$ ist die optische Achse, der Kreis um M mit dem Radius MA sei die Kugellinse im Durchschnitt. Diese wird zwar, analog wie die Linse des Menschenauges, einen geschichteten Bau aufweisen. Für eine erste Annäherung aber wird es genügen, wenn wir sie als homogen und von konstantem Brechungsindex n_1 (gegen Luft) annehmen. In A befinde sich die Iris von der Größe $\alpha\beta$.

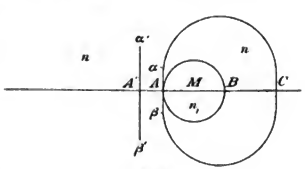


Fig. 2.

Da hier, wie schon erwähnt, infolge der planen Hornhaut eine objektseitige Abbildung nicht stattfindet, so fällt also hier Iris und Eintrittspupille zusammen. Um die Austrittspupille zu finden, muß man $\alpha\beta$ nach der Bildseite hin durch die Kugellinse vom Index n_1 in das Medium des Glaskörpers abbilden. Es ergiebt sich das virtuelle vergrößerte Bild $\alpha'\beta'$. Der Brechungsindex dieses Körpers

1) Leuckart: Organologie des Auges. Leipzig 1876.

2) Plateau: Sur la vision des poissons. Mém. cour. par l'Académie de Bruxelles. T. XXIII 1867.

Digitized by Google

(früher n' genannt) fällt hier fast genau mit dem Brechungsindex n des Objektraumes zusammen, so dafs in Formel (6) die Werte n' und n einander gleichzusetzen sind; man erhält also

$$h = k \left(\frac{B}{\xi'}\right)^2 p^2 \pi.$$

Unter der Voraussetzung also, dafs der Glaskörper den Exponenten n und die Linse den Exponenten n_1 hat, ist zunächst der Quotient $B = \frac{\overline{\alpha'\beta'}}{\overline{\alpha\beta}}$ zu berechnen. Man findet nach den Prinzipien der Abbildungslehre

$$B = \frac{n_1}{n_1 - 2n}$$

und

$$BA' = \frac{2\varrho n}{n_1 - 2n},$$

wo ϱ der Radius der Kugellinse ist.

Da nun ferner die Strecke MC sich leicht ergiebt $MC = \frac{n_1 \varrho}{2(n_1 - n)}$, so ist man nun auch imstande, die Gröfse ξ', d. h. die Entfernung der Austrittspupille von der Netzhaut, also die Strecke $A'C$ anzugeben.

Man findet:

$$\xi' = \frac{\frac{n_1^2}{n^2}\varrho}{2\left(\frac{n_1}{n} - 1\right)\left(2 - \frac{n_1}{n}\right)}.$$

Hieraus folgt dann

$$\frac{B}{\xi'} = \frac{2\left(\frac{n_1}{n} - 1\right)}{\frac{n_1}{n}\varrho}.$$

Bezeichnet man noch den relativen Brechungsexponenten der Linse in Bezug auf das umgebende Medium, also den Quotienten $\frac{n_1}{n}$ mit N, so erhält man schliefslich:

$$h_1 = 4k\frac{(N-1)^2 p^2 \pi}{N^2 \varrho^2}. \tag{7}$$

Wie schon oben bemerkt, ist der Radius p der Iris bei den Knochenfischen fast immer gleich dem Radius ϱ der Kugellinse und ändert seine Gröfse unter Einwirkung verschiedener Intensitäten nicht.

Für $p = \varrho$ wird Gl. (7)

$$h_1 = \frac{4k(N-1)^2\pi}{N^2}. \tag{8}$$

Direkte Messungen der Gröfse N sind mir nicht bekannt. Aus einer Abbildung eines Hechtauges in dem Werke von Leuckart (Organologie des Auges. 1876. S. 219, Fig. 40) kann man den Durchmesser der

Digitized by Google

Kugellinse zu 6,5 *mm* und die Entfernung dieser Linse von der Netzhaut (in Fig. 2 die Strecke BC) zu 3,7 *mm* abmessen. Aus diesen Notizen kann man N bestimmen. Denn wie oben angegeben, ist die Strecke $MC = \frac{N\varrho}{2(N-1)}$. Da hier $MC = 6{,}95$ und $\varrho = 3{,}25$ ist, so ergiebt sich

$$N = 1{,}30.$$

Demnach folgt aus (8) für die Helligkeit, mit der ein Fischauge sieht:

$$h = 0{,}213\, k\pi. \tag{9}$$

Setzen wir nun in die Formel (6a), die für das Menschenauge gilt, für den Radius r der Iris 2 *mm*, welcher Wert bei mittlerer Tagesbeleuchtung statthat, und vergleichen den so erhaltenen Wert mit dem Wert aus Formel (9), so folgt, dafs das Fischauge 10,7 mal so hell sieht als ein Menschenauge bei normaler Beleuchtung. Vergröfsert sich der Radius r der Iris dagegen bis 4 *mm*, was einem Pupillendurchmesser von über 9 *mm* entspricht, so sieht der Mensch mit einer Helligkeit, die von der eines Fischauges nur noch um das 2,7 fache übertroffen wird.

Berlin, den 10. Januar 1901.

Digitized by Google

An Expression of the Number of Primes lying between two given Integers.

By T. Hayashi, Matsuyama (Japan).

Previously, we will prove the following theorem:
Represent the roots of the binomial equation

$$x^n - 1 = 0$$

by α^i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$; then
1°. when n is a prime,

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha^{i\{(n-1)!+1\}} = n;$$

2°. when n is not a prime,

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha^{i\{(n-1)!+1\}} = 0.$$

To prove this, we proceed as follows:
When n is a prime, by Wilson's theorem, we have

$$(n-1)!+1 \equiv 0 \pmod{n},$$

whence, for all positive integral values of i,

$$\alpha^{i\{(n-1)!+1\}} = 1.$$

Therefore, when n is a prime,

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha^{i\{(n-1)!+1\}} = n.$$

When n is not a prime, also by Wilson's theorem,

$$(n-1)!+1 \equiv a \pmod{n},$$

where a is not only a positive integer, not zero, but is prime to n; because, if a and n have a common factor, not 1, the factor must be a factor of $(n-1)!$ and consequently of unity. Thus

$$i\{(n-1)!+1\} \equiv ia \pmod{n}.$$

Hence

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha^{i\{(n-1)!+1\}} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha^{ia}.$$

Digitized by Google

But since a and n are prime to each other, the smallest positive remainders of the series

$$0,\ a,\ 2a,\ \ldots,\ (n-1)\,a,$$

with respect to n, are nothing else than a permutation of the series

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Hence

$$\sum_{i=0}^{i=1} \alpha^{i\,\{(n-1)!+1\}} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha^{i}$$
$$= 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1}$$
$$= 0. \qquad \text{Q. E. D.}$$

The expression of the number of primes lying between two integers, proceeds immediately from this theorem.

Now, if the residuum of a function $f(x)$ be represented by $Rf(x)$,

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} (\alpha^i)^{(n-1)!+1} = n \cdot R\,\frac{x^{(n-1)!}}{x^n - 1}$$
$$= \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^{(n-1)!+1}\, e^{\{(n-1)!+1\}\,\theta\sqrt{-1}}\, d\theta}{r^n e^{n\theta\sqrt{-1}} - 1}$$
$$(r > 1).$$

Therefore

$$R\,\frac{x^{(n-1)!}}{x^n - 1} = 1 \quad (n \text{ prime}),$$
$$= 0 \quad (n \text{ not prime}).$$

Therefore the required expression is

$$R \sum_{n=s}^{n=t} \frac{x^{(n-1)!}}{x^n - 1},$$

or

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=s}^{n=t} \int_0^{2\pi} \frac{r^{(n-1)!+1}\, e^{\{(n-1)!+1\}\,\theta\sqrt{-1}}}{r^n e^{n\theta\sqrt{-1}} - 1}\, d\theta.$$

By the way, we get a theorem of the integral calculus:

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^{(n-1)!+1}\, e^{\{(n-1)!+1\}\,\theta\sqrt{-1}}}{r^n e^{n\theta\sqrt{-1}} - 1}\, d\theta = 2\pi \quad (n \text{ prime}),$$
$$= 0 \quad (n \text{ not prime}).$$

Digitized by Google

On some Theorems concerning with Prime Numbers.

By T. Hayashi, Matsuyama (Japan).

In the preceding paper „An Expression of the Number of Primes lying between two given Integers", we have obtained a theorem, which distinguishes prime numbers and composite numbers, as Wilson's theorem does, in the following form:

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^{(n-1)!+1} e^{\{(n-1)!+1\}\theta\sqrt{-1}}}{r^n e^{n\theta\sqrt{-1}} - 1}\, d\theta = 2\pi \quad (n \text{ prime}),$$

$$= 0 \quad (n \text{ composite}).$$

$$(r > 1)$$

Realizing the denominator of the fraction to be integrated, then separating the real and imaginary parts, and finally changing r into $\frac{1}{r}$, we shall get

$$\text{(I)} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{r^{n-m}\{\cos(m-n)\theta - r^n \cos m\theta\}}{1 - 2r^n \cos n\theta + r^{2n}}\, d\theta = 2\pi \quad (n \text{ prime}),$$

$$= 0 \quad (n \text{ composite});$$

$$(m = (n-1)! + 1,\ r < 1)$$

$$\text{(II)} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{r^{n-m}\{\sin(m-n)\theta + r^n \sin m\theta\}}{1 - 2r^n \cos n\theta + r^{2n}}\, d\theta = 0$$

$$(m = (n-1)! + 1,\ r < 1).$$

1. We shall now prove these theorems without using the theory of residua, but in a most elementary way.

Firstly we shall deal with the integral (I).

It is well known, that, if $\alpha < 1$,

$$\frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2} = 1 + 2\sum_{p=1}^{p=\infty} \alpha^p \cos p\gamma.$$

Digitized by Google

Hence, since $r < 1$, the integral (I) becomes

$$\frac{r^{n-m}}{1-r^{2n}} \int_0^{2\pi} \{\cos(m-n)\theta - r^n \cos m\theta\} \cdot \left\{1 + 2\sum_{p=1}^{p=\infty} r^{pn} \cos pn\theta\right\} d\theta.$$

Let $n = 2$. Then $m = 2$. Thus we have

$$\frac{1}{1-r^4} \int_0^{2\pi} (1 - r^2 \cos 2\theta) \cdot \left\{1 + 2\sum_{p=1}^{p=\infty} r^{2p} \cos 2p\theta\right\} d\theta.$$

Since, if $s \neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} \cos s\theta d\theta = 0,$$

we have

$$\frac{1}{1-r^4}\left\{2\pi - 2r^2 \sum_{p=1}^{p=\infty} r^{2p} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \cos 2p\theta d\theta\right\}.$$

But

$$\int_0^{2\pi} 2 \cos s\theta \cos t\theta = 0 \qquad (s \neq t),$$
$$= 2\pi \qquad (s = t).$$

Therefore, when $n = 2$, the integral (I) is equal to

$$\frac{1}{1-r^4}\{2\pi - r^4 \cdot 2\pi\},$$

or 2π.

Let n be prime, not 2. Then the integral (I) becomes

$$\frac{r^{n-m}}{1-r^{2n}} \cdot 2\sum_{p=1}^{p=\infty} r^{pn} \int_0^{2\pi} \{\cos(m-n)\theta - r^n \cos m\theta\} \cdot \cos pn\theta d\theta.$$

Now, by Wilson's theorem, m is exactly divisible by n; let its quotient be A. Then we can choose such values p_1, p_2, that

$$m - n = p_1 n,$$

and

$$m = p_2 n,$$

p_1 being $A - 1$ and p_2 being A.

Therefore the integral (I) becomes equal to

$$\frac{r^{n-m}}{1-r^{2n}}\{r^{(A-1)n} \cdot 2\pi - r^{An} \cdot r^n \cdot 2\pi\},$$

or

$$2\pi \frac{r^{n-m}}{1-r^{2n}}\{r^{m-n} - r^{m+n}\},$$

or

$$2\pi.$$

Digitized by Google

If n be composite, we cannot obtain such values p_1 and p_2; and therefore the integral (I) must be equal to zero.

In precisely the same way, we can prove that the integral (II) is zero, whatever value n may be.

2. Whe shall next deduce some theorems in spherical harmonics from the above.

Let

$$\frac{1}{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}=\sum_{q=0}^{q=\infty}Q_q(\gamma)\cdot\alpha^q.$$

Then, when n be a prime number,

$$r^{n-m}\sum_{q=0}^{q=\infty}r^{qn}\int_0^{2\pi}\{\cos(m-n)\theta-r^n\cos n\theta\}Q_q(n\theta)\,d\theta=2\pi$$

for any values of $r<1$.

Let $n=2$; this becomes

$$\sum_{q=0}^{q=\infty}r^{2q}\int_0^{2\pi}(1-r^2\cos 2\theta)\,Q_q(2\theta)\,d\theta=2\pi,$$

or

$$\int_0^{2\pi}Q_0(2\theta)\cdot d\theta+\sum_{q=1}^{q=\infty}r^{2q}\int_0^{2\pi}\{Q_q(2\theta)-\cos 2\theta\cdot Q_{q-1}(2\theta)\}\,d\theta=2\pi.$$

Of course

$$\int_0^{2\pi}Q_0(2\theta)\,d\theta=2\pi,$$

and hence

$$\int_0^{2\pi}\{Q_q(2\theta)-\cos 2\theta\cdot Q_{q-1}(2\theta)\}\,d\theta=0,$$

or

$$\text{(III)}\qquad\int_0^{2\pi}Q_q(2\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\,Q_{q-1}(2\theta)\,d\theta$$

for any values of q, not zero.

Let n be a prime number, not 2. Then we get

$$r^{n-m}\Big[\int_0^{2\pi}\cos(m-n)\theta\cdot Q_0(n\theta)\,d\theta$$

$$+\sum_{q=1}^{q=\infty}r^{qn}\int_0^{2\pi}\{\cos(m-n)\theta\cdot Q_q(n\theta)-\cos m\theta\cdot Q_{q-1}(n\theta)\}\,d\theta\Big]=2\pi.$$

Digitized by Google

Of course $$\int_0^{2\pi} \cos(m-n)\theta \cdot Q(n\theta)\, d\theta = 0.$$

But in this case, we can get a value of q, for which $n - m + qn = 0$. For that value of q:

$$\text{(IV)} \quad \int_0^{2\pi} \cos(m-n)\theta \cdot Q_q(n\theta) \cdot d\theta = 2\pi + \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cdot Q_{q-1}(n\theta)\, d\theta.$$

For all other values of q:

$$\text{(V)} \quad \int_0^{2\pi} \cos(m-n)\theta \cdot Q_q(n\theta) \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cdot Q_{q-1}(n\theta)\, d\theta.$$

If n be a composite number, we shall get

$$\text{(VI)} \quad \int_0^{2\pi} \cos(m-n)\theta \cdot Q_q(n\theta) \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cdot Q_{q-1}(n\theta)\, d\theta,$$

for any value of q.

In precisely the same way, from the integral (II), we get, for any values of n and q:

$$\text{(VII)} \quad \int_0^{2\pi} \sin(m-n)\theta \cdot Q_q(n\theta) \cdot d\theta + \int_0^{2\pi} \sin m\theta \cdot Q_{q-1}(n\theta)\, d\theta = 0.$$

Matsuyama, Japan, May 11, 1900.

Digitized by Google

Über die analytische Darstellung zweier Dreiecke, die auf 6 Arten perspektivisch liegen.

(Auszug aus zwei Briefen von Herrn S. GUNDELFINGER an Herrn E. JAHNKE.)

Darmstadt, im Januar 1901.

1. Es seien

$$1)\quad x_1 = 0, \qquad 2)\quad x_2 = 0, \qquad 3)\quad x_3 = 0$$

und

$$\text{I})\quad u_x = 0, \qquad \text{II})\quad v_x = 0, \qquad \text{III})\quad w_x = 0,$$

$$u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3, \quad \text{etc.},$$

die Gleichungen zweier Dreiecke abc und ABC, wobei $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Ecke a; $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ die Ecke A, etc., bedeuten.

Die Schnittpunkte (1, I), (2, II), (3, III) liegen offenbar in einer Geraden G (1, I; 2, II; 3, III), wenn

$$\begin{vmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. wenn

a) $$u_2 v_1 w_2 - u_2 v_3 w_1 = 0 \qquad (1\,\text{I};\ 2\,\text{II};\ 3\,\text{III}).$$

Analog drücken auf Grund cyklischer Weiterschiebung

b) $$v_3 w_1 u_2 - v_2 w_3 u_1 = 0 \qquad (1\,\text{II};\ 2\,\text{III};\ 3\,\text{I}),$$

c) $$w_3 u_1 v_2 - w_2 u_3 v_1 = 0 \qquad (1\,\text{III};\ 2\,\text{I};\ 3\,\text{II})$$

die Existenz zweier Perspektivitätsachsen (1 II; 2 III; 3 I) und (1 III; 2 I; 3 II) aus.

Verlangt man dagegen, dafs die 3 Schnittpunkte (1 I); (2 III); (3 II) auf einer Geraden sich befinden, so mufs vermöge Vertauschung von v und w sein:

α) $$u_3 w_1 v_2 - u_2 v_1 w_3 = 0 \qquad (1\,\text{I};\ 2\,\text{III};\ 3\,\text{II})$$

und analog durch cyklische Vertauschungen von u, v, w:

β) $$v_3 u_1 w_2 - v_2 w_1 u_3 = 0 \qquad (1\,\text{II};\ 2\,\text{I};\ 3\,\text{III}),$$

γ) $$w_3 v_1 u_2 - w_2 u_1 v_3 = 0 \qquad (1\,\text{III};\ 2\,\text{II};\ 3\,\text{I})$$

Digitized by Google

Setzt man in den 6 Gleichungen a), b), c) und $\alpha), \beta), \gamma)$

$$u_1 : u_2 : u_3 = y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2 ,$$

so gehen durch die Substitutionen

$$V_i = v_i y_i , \qquad W_i = w_i y_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

die sechs anderen hervor:

a′) $V_1 W_2 = W_1 V_3$, b′) $V_2 W_1 = V_1 W_3$, c′) $W_3 V_2 = W_2 V_1$,

α') $W_1 V_2 = V_1 W_3$, β') $V_3 W_2 = V_2 W_1$, γ') $W_3 V_1 = W_2 V_3$,

die offenbar mit a), b), c) und $\alpha), \beta), \gamma)$ übereinstimmen, wenn man in letzteren die u_i durch die Einheit und die v_i, w_i durch V_i, W_i ersetzt.

Die 6 letzten Gleichungen lassen sich auch schreiben:

a′) $\frac{V_2}{V_1} = \frac{W_2}{W_1}$, b′) $\frac{V_3}{V_2} = \frac{W_1}{W_3}$, c′) $\frac{V_1}{V_3} = \frac{W_3}{W_2}$,

α') $\frac{V_1}{V_2} = \frac{W_1}{W_3}$, β') $\frac{V_3}{V_2} = \frac{W_2}{W_1}$, γ') $\frac{V_3}{V_1} = \frac{W_3}{W_2}$,

also durch Kombination von α') und b′), β') und a′):

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_2}{V_3} = \frac{V_3}{V_1} = C$$

$$= \frac{W_1}{W_2} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{W_3}{W_2} = C,$$

$$C^3 = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V_3} \cdot \frac{V_3}{V_1} = 1 .$$

Da $C = 1$ ausgeschlossen ist, so kann C nur eine Wurzel der Gleichung:

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$$

sein, so dafs die Gleichungen der Geraden $u_x = 0$, $v_x = 0$, $w_x = 0$ identisch sind mit:

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} = 0 ,$$

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{\varepsilon x_2}{y_2} + \frac{\varepsilon^2 x_3}{y_3} = 0 ,$$

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{\varepsilon^2 x_2}{y_2} + \frac{\varepsilon x_3}{y_3} = 0 .$$

Zu der hier gegebenen Darstellung, die mir seit 20 Jahren bekannt ist, kann man vergleichen:

J. Vályi: „Ueber die Gruppen von mehrfach perspektiven Dreiecken in der Ebene“. Monatshefte für Math. und Physik. IX. Jahrg. 1898.

2. Jede Kurve 3. Ordnung, welche durch die 9 Schnittpunkte der beiden Dreiseite $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0$ und $u \cdot v \cdot w = 0$ geht, ist dargestellt

Digitized by Google

durch eine Gleichung der Form $a \cdot uvw + b \cdot x_1 x_2 x_3 = 0$, d. h. $Ax_1^3 + Bx_2^3 + Cx_3^3 + Dx_1 x_2 x_3 = 0$. Die 9 Schnittpunkte von $x_1 x_2 x_3 = 0$ mit $uvw = 0$ sind somit die Wendepunkte jeder durch sie gelegten Kurve 3. Ordnung, welchen Satz ich zuerst durch dualistische Betrachtungen (Math. Ann. **7**, 455) abgeleitet habe. Mit Rücksicht auf die Identität

$$3(y_1 y_2 y_3)^{-1}(y_1 x_2 x_3 + y_2 x_3 x_1 + y_3 x_1 x_2) = \left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3}\right)^3 - \left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{\varepsilon x_2}{y_2} + \frac{\varepsilon^2 x_3}{y_3}\right)\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{\varepsilon^2 x_2}{y_2} + \frac{\varepsilon x_3}{y_3}\right)$$

kann man also das Theorem aussprechen:

Die gerade und die konische Polare eines beliebigen Punktes A in bezug auf ein Dreiseit abc schneiden sich in zwei Punkten B, C derart, daſs ABC und abc die Wendepunktsdreiseite eines syzygetischen Büschels sind.

Diese Fassung, die ich der Schröterschen Konstruktion zweier sechsfach perspektivisch liegenden Dreiecke (Math. Ann. **2**, 553) gegeben und meinem Kollegen H. Wiener mitgeteilt habe, ist für diesen der Ausgangspunkt wichtiger Untersuchungen geworden (cf. dessen demnächst erscheinendes Werk: „Einteilung der ebenen Kurven und Kegel 3. Ordnung").

Digitized by Google

Über Ausartungen von Kreisen in Punktepaare.

Von Herrn S. GUNDELFINGER in Darmstadt.

Die Ausartungen von Kreisen in Geradenpaare sind bekannt.

Soll eine Kurve 2. Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte geht, in 2 Geraden zerfallen, so sind nur zwei Fälle denkbar:

1. Die Spitze C des Geradenpaares liegt im Endlichen: Alsdann hat man den Fall des „zirkularen" Geradenpaares mit der reellen Spitze C. 2. Das Zentrum (C) des Geradenpaares liegt unendlich fern: Der ausartende Kreis besteht nunmehr aus der unendlich fernen und einer im Endlichen liegenden Geraden mit dem unendlich fernen Punkte C.

Betrachtet man dagegen einen Kreis als Einhüllende von Geraden, so ist seine Gleichung in Linienkoordinaten $u_i (i = 1, 2, 3)$ von der Form:

$$\text{(I)} \qquad \mu\omega(uu) + \nu u_y^2 = 0^1), \quad u_y \equiv u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3.$$

Setzt man die Diskriminante dieser Kurve zweiter Klasse gleich Null, so entsteht die Gleichung:

$$\mu^2 \cdot \nu \cdot \tau p_y^2 = 0.^2)$$

So lange also $p_y \lesseqgtr 0$, d. h. das Zentrum y im Endlichen liegt, giebt es in der Schar Kreise (I) für veränderliche $\frac{\mu}{\nu}$ nur zwei ausartende: den Doppelpunkt $u_y^2 = 0$ $(\mu \cdot \mu = 0)$ und das Kreispunktepaar $\omega(uu) = 0$ selbst $(\nu = 0)$. Sobald jedoch $p_y = 0$, artet jeder Kreis der Schar (I) in ein Punktepaar aus. Dieselben liegen natürlich sämtlich im Unendlichen. Man zeigt auch leicht umgekehrt:

Jedes Punktepaar im Unendlichen (etwa auf den Schenkeln eines gegebenen Winkels) kann betrachtet werden als ein Kreis mit zwei Zentren (den unendlich fernen Punkten der Winkelhalbierenden).

---

1) Vgl. Vorlesungen aus der analyt. Geometrie der Kegelschnitte von S. Gundelfinger. Herausgeg. von F. Dingeldey S. 57. [Hier mit Gfr-Ddey. K. zitiert.]

2) Vgl. Gfr.-Ddey. K. § 2, 6 und S. 58.

Digitized by Google

So lange nämlich das Punktepaar im Unendlichen $\varphi(u_1 u_2 u_3) = \varphi(uu) = 0$ nicht mit $\omega(uu) = 0$ zusammenfällt, lassen sich nur auf eine Art Transformationen der Form herstellen:

$$\varphi(uu) = \lambda_1 U_1^2 + \lambda_2 U_2^2, \qquad \omega(uu) = U_1^2 + U_2^2,$$

also:

$$\begin{aligned} \varphi(uu) &= \lambda_1 \cdot \omega(uu) + (\lambda_2 - \lambda_1) U_2^2 \\ &= \lambda_2 \cdot \omega(uu) + (\lambda_1 - \lambda_2) U_1^2, \end{aligned}$$

q. e. d.

Die hier gegebene Auffassung wurde angeregt durch die Frage: Welches ist die dritte Schar von Kreisen, welche eine gegebene Kurve zweiter Klasse doppelt berühren? Bekanntlich hat man zwei Scharen von Kreisen, deren Zentren auf den beiden Achsen der Kurve liegen. (Cf. Gfr.-Ddey. K., S. 186—187.)

Sucht man dagegen die Kreise, deren Zentren auf der unendlich fernen Geraden liegen, so fallen sie alle mit dem unendlich fernen Punktepaar auf den Asymptoten der Kurve 2. Klasse zusammen. Die 2 Zentren sind die unendlich fernen Punkte der Hauptachsen.

Herr Brückel, dem ich meine Auffassung der ausartenden Kreise mit 2 Zentren mitgeteilt, machte mich auf folgendes elementare Beispiel zur Bestätigung der ganzen Theorie aufmerksam.

Wenn in einem Dreieck zwei Seiten parallel werden, so ist das unendlich ferne Punktepaar, welches von dem Parallelenpaar und der dritten Seite tangiert wird, als Kreis aufzufassen, dessen beide Zentren die unendlich fernen Punkte der Winkelhalbierenden sind.

Darmstadt, den 18. Januar 1901.

Digitized by Google

Polygones semi-réguliers dans l'ellipse;

Par M. C. A. Laisant.

1. — Abel Transon (*Nouv. Ann. de Math.*, 1863, p. 317) a défini «polygone semi-régulier inscrit dans une ellipse» la projection d'un polygone régulier inscrit dans le cercle dont cette ellipse est la projection orthogonale. Il a donné en même temps une intéressante propriété de ces polygones.[1])

Je me propose dans cet article, de montrer quelques autres propriétés de ces figures, et notamment, de généraliser les théorèmes d'Apollonius par cette considération. On remarquera en effet tout d'abord que les deux théorèmes d'Apollonius, en appelant «parallélogramme semi-régulier» la projection d'un carré inscrit dans le cercle, peuvent s'énoncer de la manière suivante:

1°. *Les triangles en lesquels se décompose un parallélogramme semi-régulier, le sommet commun étant au centre, ont une aire constante, quelle que soit la position des parallélogrammes semi-réguliers dans la courbe; cette aire a pour expression* $\frac{ab}{2}$.

2°. *La moyenne arithmétique des carrés des rayons d'un parallélogramme semi-régulier est aussi constante, et égale à* $\frac{a^2+b^2}{2}$. *Nous appelons ici rayons les segments qui partent du centre pour aboutir aux sommets.*

Ces deux propositions sont encore vraies, en y remplaçant le mot *parallélogramme* par *polygone.*

La première est pour ainsi dire évidente d'après la définition des polygones semi-réguliers, et l'on voit de plus que l'aire de chaque

1) Le théorème de Transon est le suivant: *Si* $R_1, R_2, \cdots, R_n$ *sont les rayons de courbure de l'ellipse aux sommets d'un polygone semi-régulier, la moyenne des quantités* $R_1^{\frac{2}{3}}, \cdots, R_n^{\frac{2}{3}}$ *est* $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$, *a et b étant les demi-axes de l'ellipse.* Cette moyenne ne dépend donc, ni de la position du polygone sur l'ellipse, ni du nombre des côtés.

Digitized by Google

triangle a pour expression $\frac{ab}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$. L'aire du polygone tout entier est $\frac{n}{2}ab\sin\frac{2\pi}{n}$.

On reconnaît aussi immédiatement que les secteurs elliptiques compris entre deux rayons consécutifs sont tous équivalents, et exprimés par $\frac{\pi ab}{n}$. Les segments compris entre les côtés du polygone et la courbe le sont donc aussi; leur expression est $ab\left(\frac{\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)$.

Passons à la proposition (2°). En appelant t le paramètre angulaire correspondant à un rayon CM quelconque, nous représentons ce rayon par l'équipollence

$$OM = a\cos t + ib\sin t = \frac{a+b}{2}\varepsilon^t + \frac{a-b}{2}\varepsilon^{-t},$$

où ε représente e^i. Pour avoir tous les rayons du polygone semi-régulier de n côtés, il suffit de donner à t successivement les n valeurs

$$t,\ t+\frac{2\pi}{n},\ \cdots,\ t+\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Le carré l^2 de la longueur de OM est OM cj.[1]) OM ou

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+\frac{a^2-b^2}{4}(\varepsilon^{2t}+\varepsilon^{-2t}) = \frac{a^2+b^2}{2}+\frac{a^2-b^2}{4}(\varepsilon^{2t}+\varepsilon^{-2t}).$$

En faisant la somme pour les valeurs de t ci-dessus indiquées, on reconnaît que $\Sigma\varepsilon^{2t}=\Sigma\varepsilon^{-2t}=0$, et par conséquent $\Sigma l^2 = n\frac{a^2+b^2}{2}$, ou $\frac{\Sigma l^2}{n}=\frac{a^2+b^2}{2}$.

2. — Posons $\frac{2\pi}{n}=\alpha$. Un côté quelconque du polygone s'exprimera par

$$a(\cos(t+\alpha)-\cos t)+ib(\sin(t+\alpha)-\sin t)$$

ou

$$-2a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)+2ib\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left[-a\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)+ib\cos\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

Ceci montre que les côtés successifs d'un polygone semi-régulier de n côtés sont équipollents aux rayons d'un polygone semi-régulier, également de n côtés, inscrit dans une ellipse semblable, le rapport de similitude étant $2\sin\frac{\alpha}{2}$. Donc, d'après ce qui précède, la somme des carrés des côtés d'un polygone semi-régulier inscrit, de n côtés, est $n\frac{a^2+b^2}{2}\cdot 4\sin^2\frac{\alpha}{2}=2n(a^2+b^2)\sin^2\frac{\pi}{n}$. La moyenne des carrés

1) cj. = conjugué.

Digitized by Google

des côtés est $2(a^2+b^2)\sin^2\frac{\pi}{n}$. Par exemple, pour le parallélogramme ($n=4$) cette moyenne est a^2+b^2; pour l'hexagone ($n=6$), c'est $\frac{a^2+b^2}{2}$; pour le triangle ($n=3$) on aurait $\frac{3}{2}(a^2+b^2)$.

Dans le cercle dont l'ellipse est la projection, tous les côtés sont égaux, et leur carré est $4a^2\sin^2\frac{\pi}{n}$. On peut donc dire que c'est la valeur moyenne de ces carrés, et le rapport des deux moyennes de carrés, dans l'ellipse et dans le cercle, est $\frac{a^2+b^2}{2a^2}$.

3. — Considérons maintenant les carrés des *quantités géométriques* OM, et non plus de leurs longueurs. Nous avons

$$OM^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\varepsilon^{2t}+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\varepsilon^{-2t}+\frac{a^2-b^2}{2}.$$

En faisant la somme, on voit que les deux premiers termes s'annulent, et par conséquent,

$$\Sigma OM^2=\frac{n}{2}(a^2-b^2)=\frac{n}{2}c^2=\frac{n}{2}OF^2,$$

F' étant l'un quelconque des deux foyers. Il est d'ailleurs évident que cette identité $\Sigma OM^2=\frac{n}{2}OF^2$ est indépendante du choix de l'origine des inclinaisons. Pour le cas du parallélogramme $ABCD$, elle donne $OA^2+OB^2=OF^2$, propriété que j'ai signalée depuis longtemps déjà, et qui est relative à deux demi-diamètres conjugués OA, OB.

En posant $OG=\frac{OF}{\sqrt{2}}$, l'identité précédente s'écrit $\Sigma OM^2=nOG^2$. Les deux points G ainsi construits, et que j'ai appelés *pseudo-foyers*, jouissent de propriétés assez intéressantes et quelquefois utiles dans certaines questions; mais nous ne saurions y revenir ici.

Nous ne voulons pas non plus démontrer le théorème de Transon dont l'énoncé a été rappelé dans la note du début, bien que ce soit chose facile en suivant la voie que nous avons indiquée. Le lecteur pourra s'y exercer, si la question l'intéresse.

4. — Imaginons que l'on construise le triangle OGM, M étant un point quelconque de l'ellipse, puis OMX directement semblable à OGM. Alors $OX=\frac{OM^2}{OG}$, ou

$$OX=\frac{1}{OG}\left(\frac{a+b}{2}\varepsilon^{t}+\frac{a-b}{2}\varepsilon^{-t}\right)^2$$

$$=\frac{1}{OG}\left(\frac{a^2-b^2}{2}+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\varepsilon^{2t}+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\varepsilon^{-2t}\right).$$

Digitized by Google

Le lieu du point X est donc une ellipse dont le centre a pour abscisse, sur le grand axe, $\frac{a^2-b^2}{2OG} = OG$, c'est-à-dire est précisément le point G. Quand M parcourt une fois l'ellipse primitive, X parcourt deux fois la nouvelle ellipse.

Si on transforme ainsi les sommets M d'un polygone semi-régulier de n côtés, les sommets X correspondants seront ceux d'un polygone semi-régulier de $\frac{n}{2}$ côtés, chaque somme étant obtenue deux fois, si n est pair, et ceux d'un polygone semi-régulier étoilé de n côtés, si n est impair. Il est clair du reste qu'en appelant a', b' les demi-axes de la nouvelle ellipse de centre G, et g la longueur de OG, c'est-à-dire $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$, nous avons

$$\frac{a'+b'}{2} = \frac{(a+b)^2}{4g}, \qquad \frac{a'-b'}{2} = \frac{(a-b)^2}{4g},$$

d'où

$$a' = \frac{a^2+b^2}{2g}, \qquad b' = \frac{ab}{g}.$$

En appliquant au nouveau polygone ce que nous avons dit à la fin du n° **1**, on voit que la somme des carrés des rayons est

$$\frac{n}{2}(a'^2+b'^2) = \frac{n}{8g^2}(a^4+6a^2b^2+b^4).$$

On peut remarquer, en formant $a'^2-b'^2$, que l'ellipse de centre G a pour foyer le centre de l'ellipse primitive.

5. — Un polygone dont les côtés sont les tangentes à une ellipse, aux sommets d'un polygone semi-régulier inscrit, est lui-même un polygone semi-régulier. Circonscrit à l'ellipse considérée de demi-axes a, b, il est inscrit dans une ellipse homothétique dont les demi-axes sont $\frac{a}{\cos\frac{\pi}{n}}$, $\frac{b}{\cos\frac{\pi}{n}}$. On le voit immédiatement par la propriété correspondante des polygones réguliers.

Toutes les propriétés précédentes peuvent donc s'étendre à ces polygones circonscrits. De plus, cette considération montre que si un polygone inscrit se déplace, — en se déformant, bien entendu — et en restant inscrit à une ellipse, ses côtés restent tangents à une ellipse homothétique intérieure.

6. — Reprenons l'expression du carré de la longueur d'un rayon

$$l^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{4}(\varepsilon^{2t}+\varepsilon^{-2t}).$$

Digitized by Google

Nous en tirons

$$l^4 = \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 + \frac{(a^2-b^2)^2}{8} + \frac{a^4-b^4}{4}(\varepsilon^{2t}+\varepsilon^{-2t}) + \left(\frac{a^2-b^2}{4}\right)^2(\varepsilon^{4t}+\varepsilon^{-4t}),$$

et, en faisant la somme pour toutes les valeurs de t correspondant aux rayons d'un polygone semi-régulier, les deux derniers termes s'annulent, et il reste pour la valeur moyenne des 4es puissances des rayons

$$\frac{\Sigma l^4}{n} = \frac{3a^4+2a^2b^2+3b^4}{8}.$$

De là on passerait à la moyenne analogue pour les 4es puissances des côtés; et le tour même de la démonstration permet d'énoncer le théorème suivant:

Les puissances d'exposant pair p des rayons ou des côtés d'un polygone semi-régulier ont une somme constante, indépendante de la position du polygone et du nombre de ses côtés.

Il y a cependant un cas d'exception, et il se présente précisément pour les diamètres conjugués et les 4es puissances. La démonstration précédente suppose en effet que $\Sigma\varepsilon^{pt} = 0$, c'est-à-dire que les extrémités des rayons d'inclinaisons $p\alpha$, $2p\alpha$, $\cdots$, $np\alpha$ sont sur un cercle les sommets d'un polygone régulier. C'est exact, excepté lorsque $p\alpha = 2\pi$, car alors toutes ces extrémités coïncident. Or comme $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, il en résulte $p = n$. Tant qu'on se tient, en particulier, à des puissances paires inférieures à n, on est assuré de l'exactitude de la proposition.

7. — Considérons maintenant les rayons FM qui vont d'un des foyers de l'ellipse aux sommets d'un polygone semi-régulier. Nous avons

$$FM = a\cos t - c + ib\sin t,$$

et en appelant f la longueur de FM,

$$f^2 = a^2\cos^2 t + c^2 - 2ac\cos t + b^2\sin^2 t$$

$$= \frac{a^2+b^2}{2} + c^2 - 2ac\cos t + \frac{a^2-b^2}{2}\cos 2t,$$

$$\frac{\Sigma f^2}{n} = \frac{a^2+b^2}{2} + c^2 = \frac{3a^2-b^2}{2}.$$

Il y aurait sans doute encore d'intéressantes propriétés à étudier, sur ces figures remarquables, sur leur extension possible à l'hyperbole, et sur des polygones analogues. Mais je n'ai pas le loisir de pousser plus loin cette recherche quant à présent, et d'un autre côté, je tiens à n'user qu'avec discrétion de l'hospitalité qui m'a été si gracieusement et amicalement offerte.

Paris, 10 janvier 1901.

Digitized by Google

Über die partiellen Differentialgleichungen, denen Hermitesche Formen genügen.

Von Ludwig Schlesinger in Klausenburg.

1. Sei $y_1, y_2, \cdots, y_n$ ein Fundamentalsystem einer linearen homogenen Differentialgleichung $n$ter Ordnung (A), dessen Determinante den Wert Eins hat, und mögen die Koeffizienten von (A) als eindeutige Funktionen der unabhängigen Variabeln

$$x = \xi + \eta\sqrt{-1}$$

vorausgesetzt werden. Wir betrachten die Hermitesche Form

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k \bar{y}_k,$$

wo, wie auch stets im Folgenden, die konjugierte komplexe Größe einer Größe a durch $\bar{a}$ bezeichnet wird und die $c_1, c_2, \cdots, c_n$ reale Größen bedeuten; dann ist

$$\frac{\partial \log \varphi}{\partial x} = \frac{\sum_k c_k y_k' y_k}{\sum_k c_k \overline{y_k' y_k}},$$

$$\frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x \partial \bar{x}} = \frac{1}{\varphi^2} \begin{vmatrix} \sum_k c_k y_k \bar{y}_k & \sum_k c_k y_k \bar{y}_k' \\ \sum_k c_k y_k' \bar{y}_k & \sum_k c_k y_k' \bar{y}_k' \end{vmatrix},$$

woselbst

$$y_k' = \frac{dy_k}{dx}, \qquad \bar{y}_k' = \frac{d\bar{y}_k}{d\bar{x}}$$

gesetzt wurde. Nach bekannten Determinantensätzen[1]) folgt dann weiter

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x \partial \bar{x}} = \frac{1}{\varphi^2} \sum_{i<k} \sum c_i c_k (y_i y_i' - y_k y_i')(\bar{y}_i \bar{y}_k' - \bar{y}_k \bar{y}_i').$$

Die Ausdrücke

$$w_{ik} = y_i y_k' - y_k y_i' \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n;\ i < k)$$

1) Vergl. Baltzer: Determinanten (1881), S. 49.

Digitized by Google

bilden ein Fundamentalsystem der $(n-2)$ten assoziierten Gleichung[1]) der Differentialgleichung (A), der Faktor von φ^{-2} auf der rechten Seite der Gleichung (I) ist folglich eine Hermitesche Form, gebildet aus den $(n)_2$ Gröfsen w_{ik} und ihren konjugierten.

2. Sei zunächst $n = 2$. Dann reduziert sich zufolge der Gleichung

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = 1 \tag{II}$$

die auf der rechten Seite von (I) auftretende Hermitesche Form auf das Produkt $c_1 c_2$; die Form

$$\varphi = c_1 y_1 \bar{y}_1 + c_2 y_2 \bar{y}_2$$

befriedigt demnach die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x \partial \bar{x}} = \frac{c_1 c_2}{\varphi^2},$$

die sich, wenn man an Stelle von φ den Ausdruck

$$u = \log \frac{4}{\varphi^2}$$

einführt und beachtet, dafs

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Delta u \tag{IIa}$$

ist, in die in neuerer Zeit vielfach[2]) behandelte Gleichung

$$\Delta u = -2 c_1 c_2 e^u \tag{III}$$

verwandelt.

Besitzt die lineare Differentialgleichung (A) die Eigenschaft, dafs ihre dem Fundamentalsysteme y_1, y_2 entsprechende Monodromiegruppe die Hermitesche Form φ ungeändert läfst[3]), so ist φ eine eindeutige Funktion der realen Variabeln ξ, η und liefert demnach eine eindeutige Lösung u der partiellen Differentialgleichung (III). Kennt man umgekehrt eine Lösung u der Gleichung (III), die eine eindeutige Funktion von ξ, η ist, so ist, da durch Differentiation der Gleichung (II)

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = 0$$

folgt, der Quotient

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{\varphi} = \frac{c_1 y_1'' \bar{y}_1 + c_2 y_2'' \bar{y}_2}{c_1 y_1 \bar{y}_1 + c_2 y_2 \bar{y}_2} = \frac{y_1''}{y_1} = \frac{y_2''}{y_2},$$

---

1) Vergl. mein Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen Bd. II, 1 (1897), S. 127.

2) Picard: Liouvilles Journal, 1890, 1893; Poincaré, ebenda, 1898.

3) Von dieser Art ist z. B. jede Gaufssche Differentialgleichung, deren Exponenten reziproke ganze Zahlen sind und allgemeiner jede lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in welcher die Umkehrung des Integralquotienten eine Fuchssche Funktion liefert; vergl. Poincaré, a. a. O.

Digitized by Google

worin

$$\varphi = 2e^{-\frac{u}{2}}, \qquad y_k'' = \frac{d^2 y_k}{dx^2}$$

gesetzt wurde, eine bloſse Funktion $q(x)$ von x und zwar, da gleichzeitig mit u auch φ eindeutig ist, eine eindeutige Funktion.

Die y_1, y_2 befriedigen folglich die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = q(x) y, \tag{IV}$$

mit eindeutigen Koeffizienten, und da die Form φ eine eindeutige Funktion von ξ, η ist, besitzt die zu y_1, y_2 gehörige Monodromiegruppe von (IV) die Eigenschaft, die Hermitesche Form φ in sich selbst zu transformieren.

Die partielle Differentialgleichung (III) läſst auch die Beziehung, die zwischen einer linearen Differentialgleichung (IV) von der angegebenen Beschaffenheit und der Geometrie auf gewissen Flächen von konstantem Krümmungsmaſse besteht, in einfachster Weise hervortreten. Faſst man nämlich

$$ds = \frac{2\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}}{\varphi}$$

als das Linienelement auf einer Fläche auf, so haben die Gaufsschen Fundamentalgröſsen die Werte

$$E = G = \frac{4}{\varphi^2} = e^u, \quad F = 0,$$

der Ausdruck für das Krümmungsmaſs der Fläche

$$K = -\frac{1}{2E}\left[\frac{\partial^2 \log E}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \log E}{\partial \eta^2}\right]$$

liefert folglich mit Rücksicht auf die partielle Differentialgleichung (III) für K den konstanten Wert $c_1 c_2$.

3. Sei ferner $n = 3$. Die Ausdrücke w_{ik}:

$$\begin{aligned} z_1 &= y_2 y_3' - y_3 y_2', \\ z_2 &= y_3 y_1' - y_1 y_3', \\ z_3 &= y_1 y_2' - y_2 y_1' \end{aligned}$$

konstituieren dann das dem Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3 der Differentialgleichung

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 3p\frac{dy}{dx} + qy = 0 \tag{A}$$

adjungierte Fundamentalsystem der zu (A) adjungierten Differentialgleichung

$$\frac{d^3 z}{dx^3} + 3p\frac{dz}{dx} - (q - 3p')z = 0 \qquad \left(p' = \frac{dp}{dx}\right), \tag{B}$$

Digitized by Google

die auf der rechten Seite der partiellen Differentialgleichung (I) auftretende Hermitesche Form ist also einfach

$$\sum_{i<k}\sum c_i c_k \mid y_i y_k' - y_k y_i' \mid^2 = c_1 c_2 c_3 \cdot \psi,$$

wo

$$\psi = \frac{1}{c_1} z_1 \bar{z}_1 + \frac{1}{c_2} z_2 \bar{z}_2 + \frac{1}{c_3} z_3 \bar{z}_3$$

die zu

$$\varphi = c_1 y_1 \bar{y}_1 + c_2 y_2 \bar{y}_2 + c_3 y_3 \bar{y}_3$$

adjungierte Form bedeutet. Da für ψ offenbar eine der für φ gültigen analoge Differentialgleichung besteht und die Beziehung zwischen φ und ψ eine gegenseitige ist, so erhalten wir, mit Rücksicht auf (IIa):

$$\Delta \log \varphi = 4 c_1 c_2 c_3 \frac{\psi}{\varphi^2},$$

$$\Delta \log \psi = 4 c_1 c_2 c_3 \frac{\varphi}{\psi^2},$$

oder indem wir

$$u = \log \varphi, \quad v = \log \psi$$

setzen, das System partieller Differentialgleichungen

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} \Delta u = 4 c_1 c_2 c_3 e^{-2u+v}, \\ \Delta v = 4 c_1 c_2 c_3 e^{-2v+u}. \end{cases}$$

Wenn die zu dem Fundamentalsysteme y_1, y_2, y_3 gehörige Monodromiegruppe der Differentialgleichung (A) die Eigenschaft hat, die Hermitesche Form φ in sich selbst zu transformieren[1]), so transformiert die zu dem adjungierten Fundamentalsysteme z_1, z_2, z_3 gehörige Monodromiegruppe von (B) die adjungierte Form ψ in sich selbst; in diesem Falle sind also φ, ψ eindeutige Funktionen von ξ, η und die Differentialgleichung (A) bestimmt auf diese Weise ein eindeutiges Lösungssystem u, v des Systems partieller Differentialgleichungen (V).

4. Um zu zeigen, dafs, ähnlich wie für $n = 2$, auch hier ein eindeutiges Lösungssystem der Gleichungen (V) eine lineare Differentialgleichung von der Form (A) mit eindeutigen Koeffizienten determiniert, deren Monodromiegruppe eine Hermitesche Form ungeändert läfst, müssen wir an einige Formeln erinnern.

Aus

$$\text{(VI)} \qquad z_1 = y_2 y_3' - y_3 y_2'$$

1) Vergl. über solche Differentialgleichungen, für beliebiges n, Fuchs: Berliner Sitzungsberichte, 1896, S. 753; für $n = 3$ auch Picard: Acta Mathematica, Bd. I, S. 297.

Digitized by Google

folgt durch Differentiation nach x[1])

$$\text{(VII)} \qquad \begin{cases} z_1' = y_2 y_3'' - y_3 y_2'', \\ z_1'' = y_2 y_3^{(3)} - y_3 y_2^{(3)} + y_2' y_3'' - y_3' y_2'', \end{cases}$$

und wenn wir die Differentialgleichung (A) beachten und

$$\text{(VIII)} \qquad \xi_1 = y_2' y_3'' - y_3' y_2''$$

setzen:

$$\text{(IX)} \qquad z_1'' = -3pz_1 + \xi_1.$$

Den Gleichungen (VI)—(IX) denken wir uns die analogen, aus ihnen durch cyklische Permutation der Indices 1, 2, 3 hervorgehenden hinzugefügt.

Bedeutet y irgend ein Integral von (A), z irgend ein Integral von (B), so folgt, indem man (A) mit z, (B) mit y multipliziert, durch Subtraktion und Addition

$$\text{(X)} \qquad y^{(3)} z - z^{(3)} y + 3p(y'z - z'y) + 2\vartheta_3 yz = 0,$$

$$\text{(Xa)} \qquad y^{(3)} z + z^{(3)} y + 3p(y'z + z'y) + 3p' yz = 0,$$

wo

$$\vartheta_3 = q - \tfrac{3}{2} p'$$

die Laguerresche Differentialinvariante vom Gewichte Drei[2]) der Differentialgleichung (A) bedeutet. Die Gleichung (Xa) oder

$$\frac{d}{dx}[yz'' + y''z - z'y' + 3pzy] = 0$$

ergiebt sich auch unmittelbar aus der Lagrangeschen Identität[3]); der Ausdruck

$$\text{(C)} \qquad yz'' + y''z - z'y' + 3pzy$$

hat also für irgend ein Integralpaar y, z der einander adjungierten Differentialgleichungen (A), (B) einen von x unabhängigen Wert.

Bilden wir diesen Ausdruck (C) für $y = y_k$, $z = z_i$, so folgt mit Rücksicht auf die Gleichung (IX):

$$y_k z_i'' + y_k'' z_i - y_k' z_i' + 3p y_k z_i = y_k \xi_i - y_k' z_i' + y_k'' z_i \qquad (i, k = 1, 2, 3);$$

hier hat aber die rechte Seite den Wert δ_{ik}[4]), wie aus

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \\ y_3 & y_3' & y_3'' \end{vmatrix} = 1$$

1) Obere Accente bedeuten im folgenden stets Ableitungen nach x.

2) Vergl. z. B. Handbuch, Bd. II, 1, S. 190.

3) Vergl. z. B. Handbuch, Bd. I (1895), S. 54.

4) δ_{ik} bedeutet in Kroneckerscher Bezeichnung Null oder Eins, je nachdem $k = i$ oder $k \neq i$ ist.

Digitized by Google

unter Bezugnahme auf die Gleichungen (VI), (VII), (VIII) ohne weiteres folgt.

5. Wenn wir $\bar{x}$ und x als von einander unabhängige Variable auffassen, so befriedigt als Funktion von x die Form φ die Differentialgleichung (A), die Form ψ die Differentialgleichung (B), der Ausdruck (C), gebildet für $y = \varphi$, $z = \psi$, wird also einen von x unabhängigen Wert annehmen; wir können diesen Wert auch sofort angeben. Bezeichnen wir nämlich die partiellen Ableitungen von φ, ψ nach x durch obere Accente, so ist

$$\varphi\psi'' + \psi\varphi'' - \varphi'\psi' + 3p\varphi\psi = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_k c_i^{-1}\bar{y}_k\bar{z}_i[y_k z_i'' + y_k'' z_i - y_k' z_i' + 3p y_k z_i]_b$$

die rechte Seite hat aber mit Rücksicht auf das Rechnungsergebnis der vorigen Nummer (**4**) den Wert

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_k c_i^{-1}\bar{y}_k\bar{z}_i\delta_{ki} = \bar{y}_1\bar{z}_1 + \bar{y}_2\bar{z}_2 + \bar{y}_3\bar{z}_3 = 0.$$

Somit ergiebt sich für p die Darstellung

$$\text{(XI)} \qquad p = -\frac{\varphi\psi'' + \psi\varphi'' - \varphi'\psi'}{3\varphi\psi},$$

und indem man in (X) φ an die Stelle von y, ψ an die Stelle von z und für p seinen eben gefundenen Wert einsetzt, folgt ferner

$$\text{(XII)} \qquad \vartheta_3 = \frac{[\varphi\psi'' + \psi\varphi'' - \varphi'\psi'][\varphi'\psi - \psi'\varphi] - \varphi\psi[\varphi^{(3)}\psi - \psi^{(3)}\varphi]}{2\varphi^2\psi^2}.$$

Kennt man nun zwei in ξ, η eindeutige Lösungen u, v des Systems partieller Differentialgleichungen (V) und bildet mit

$$\varphi = e^u, \quad \psi = e^v$$

die Ausdrücke (XI) und (XII), so sind diese blofse Funktionen von x und zwar eindeutige Funktionen dieser komplexen Variabeln; die mit denselben gebildete Differentialgleichung mit eindeutigen Koeffizienten

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3p\frac{dy}{dx} + \left(\vartheta_3 + \tfrac{3}{2}\frac{dp}{dx}\right)y = 0$$

hat demnach die Eigenschaft, dafs ihre zu dem Fundamentalsysteme y_1, y_2, y_3 gehörige Monodromiegruppe die Hermitesche Form

$$\varphi = c_1 y_1\bar{y}_1 + c_2 y_2\bar{y}_2 + c_3 y_3\bar{y}_3$$

in sich selbst transformiert.

Die Verallgemeinerung der hier für $n = 2, 3$ durchgeführten Betrachtungen auf den Fall eines beliebigen n bietet keinerlei prinzipielle

Digitized by Google

Schwierigkeiten dar, wenn man die algebraischen Relationen beachtet, die nach Herrn Forsyth[1]) zwischen den Lösungen der successiven assoziierten von assoziierten Differentialgleichungen bestehen. Es ist mir aber bisher nicht gelungen, die für ein beliebiges n erforderlichen komplizierten Rechnungen in eine übersichtliche Form zu bringen; ich habe mich darum in dieser Note auf die Fälle $n = 2, 3$ beschränkt.

Klausenburg, den 22. Dezember 1900.

1) Philosophical Transactions, Vol. 179, S. 454 ff.

Digitized by Google

Zur neueren Dreiecksgeometrie.

Von F. CASPARY in Charlottenburg.

(Fortsetzung.)[1]

§ 4.

25. Der durch (25) dargestellte Punkt S gestattet noch zwei Ausdrucksformen, von denen die eine unmittelbar an Theorem *XII* sich anschliefst.

Nach (25) und (28) hat man

$$sS = (x_1 + x_2)(x_3 + x_1)A_1 + (x_2 + x_3)\{(x_1 + x_2)A_2 + (x_3 + x_1)A_3\},$$

und nach (2)

$$x(B_2 + B_3) = (x_2 + x_3)A_1 + (x_1 + x_3)A_2 + (x_3 + x_1)A_3.$$

Demnach folgt

$$\begin{aligned} sS - x(x_2 + x_3)(B_2 + B_3) &= \{(x_1 + x_2)(x_3 + x_1) - (x_2 + x_3)^2\}A_1 \\ &= (\omega_2 + \omega_3 - \omega_1)A_1; \end{aligned}$$

also ergiebt sich

$$sS = (\omega_k + \omega_i - \omega_i)A_i + x(x_k + x_i)(B_k + B_i). \tag{47}$$

Führt man nun die zu R assoziierten Punkte ein, nämlich:

$$\begin{cases} (\omega_2 + \omega_3 - \omega_1)R_1 = -\omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 + \omega_3 B_3, \\ (\omega_3 + \omega_1 - \omega_2)R_2 = \omega_1 B_1 - \omega_2 B_2 + \omega_3 B_3, \\ (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)R_3 = \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 - \omega_3 B_3, \end{cases} \tag{48}$$

so folgt wegen (19)

$$(\omega_i + \omega_i - \omega_i)R_i + \omega A_i = (\omega_k + \omega_i)(B_k + B_i).$$

Daher verwandelt sich (47) in:

$$\begin{aligned} (\omega_k + \omega_i)sS = &\{(\omega_k + \omega_i)(\omega_k + \omega_i - \omega_i) + \omega x(x_k + x_i)\}A_i \\ &+ x(x_k + x_i)(\omega_k + \omega_i - \omega_i)R_i. \end{aligned}$$

Der Faktor von A_i wird aber wegen $(\mathfrak{N}_6)$ gleich $2\omega_k\omega_i$, und daher erhält man:

$$(\omega_k + \omega_i)sS = 2\omega_k\omega_i A_i + x(x_k + x_i)(\omega_k + \omega_i - \omega_i)R_i, \tag{49}$$

---

1) Die Korrektur dieser Fortsetzung hat der Verf., der seit Monaten schwer krank darniederliegt, nicht lesen können. Die Red.

Digitized by Google

oder in Worten:

XVI. Der Punkt S ist der Schnittpunkt der drei Geraden A_1R_1, A_2R_2, A_3R_3, wobei R_1, R_2, R_3 die zu R assoziierten Punkte sind.

26. Wendet man auf den Punkt S das bereits in § 3 benutzte Übertragungsprinzip an, welches darin besteht, dafs man x_i mit ω_i und A_i mit B_i vertauscht, so erhält man aus Theorem *XII*:

XVII. Bezeichnet man mit A_{ik} die Mittelpunkte der Segmente A_kA_l, so schneiden sich die drei Geraden B_iA_{ik} in einem Punkte O.

Für diesen Punkt O erhält man aus (25_1) und (25) die folgenden Ausdrücke:

$$(50)\quad \begin{cases} \tilde{\omega}\cdot O = x_1(x_2+x_3-x_1)A_1 + x_2(x_3+x_1-x_2)A_2 + x_3(x_1+x_2-x_3)A_3 \\ \qquad = x_1(x-2x_1)A_1 + x_2(x-2x_2)A_2 + x_3(x-2x_3)A_3 \end{cases}$$

und

$$(50_1)\quad \tilde{\omega}\,\omega\, O = (\omega_1+\omega_2)(\omega_3+\omega_1)B_1 + (\omega_2+\omega_3)(\omega_1+\omega_2)B_2 + (\omega_3+\omega_1)(\omega_2+\omega_3)B_3,$$

wobei

$$\tilde{\omega} = \omega + \delta$$

ist. Zugleich verwandeln sich die Gleichungen (26) in

$$(51)\quad \begin{cases} \tilde{\omega}\, O = \quad \omega R + \delta D_1, \\ \qquad = -z\,Z \;+ 3\delta G, \\ \qquad = -w\,W + \delta(D_2+D_3), \\ \qquad = -x^2X + 2\delta(D_2+D_3), \end{cases}$$

und die Gleichungen (47) und (49) in:

$$(52)\quad \tilde{\omega}\, O = (x_k+x_i-x_l)xB_l + (\omega_k+\omega_i)(A_k+A_i)$$

und

$$(53)\quad (x_k+x_l)\tilde{\omega}\, O = 2x_kx_l\cdot xB_l + (\omega_k+\omega_l)(x_k+x_l-x_l)X_l,$$

wobei X_1, X_2, X_3 die zu X assoziierten und durch

$$(54)\quad \begin{cases} (x_2+x_3-x_1)X_1 = -x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3, \\ (x_3+x_1-x_2)X_2 = \quad x_1A_1 - x_2A_2 + x_3A_3, \\ (x_1+x_2-x_3)X_3 = \quad x_1A_1 + x_2A_2 - x_3A_3 \end{cases}$$

definierten Punkte sind.

27. Führt man noch die zum Schwerpunkt

$$3G = B_1 + B_2 + B_3$$

assoziierten Punkte ein, indem man

$$(55)\quad \begin{cases} H_1 = -B_1 + B_2 + B_3, \\ H_2 = \quad B_1 - B_2 + B_3, \\ H_3 = \quad B_1 + B_2 - B_3 \end{cases}$$

Digitized by Google

setzt, so erhält man für die äufseren Produkte $[A_i H_i]$ die Ausdrücke:

$$\begin{cases} [A_1 H_1] = & (\omega_3 - \omega_2)[B_2 B_3] - (\omega_1 + \omega_2)[B_3 B_1] + (\omega_1 + \omega_3)[B_1 B_2], \\ [A_2 H_2] = & (\omega_2 + \omega_1)[B_2 B_3] + (\omega_1 - \omega_3)[B_3 B_1] - (\omega_2 + \omega_3)[B_1 B_2], \\ [A_3 H_3] = - & (\omega_3 + \omega_1)[B_2 B_3] + (\omega_3 + \omega_2)[B_3 B_1] + (\omega_2 - \omega_1)[B_1 B_2], \end{cases}$$

deren rechte Seiten die Summe Null ergeben. Daher schneiden sich die drei Geraden $A_1 H_1$, $A_2 H_2$, $A_3 H_3$ in *einem* Punkte H, für den man durch äufsere Multiplikation zweier der vorstehenden drei Gleichungen findet:

$$\begin{aligned} \omega(\omega + \delta) H &= \omega(\omega - \delta)(B_1 + B_2 + B_3) \\ &\quad - 2\{\omega_1^2 B_1 + \omega_2^2 B_2 + \omega_3^2 B_3\} \end{aligned}$$

oder wegen (30)

$$(\omega + \delta) H = 3(\omega - \delta) G + 2 z Z.$$

Da nach der zweiten Gleichung (51)

$$z Z = 3\delta G - (\omega + \delta) O$$

war, so folgt

$$\begin{aligned} (\omega + \delta) H &= 3(\omega - \delta) G + 6\delta G - 2(\omega + \delta) O \\ &= 3(\omega + \delta) G - 2(\omega + \delta) O, \end{aligned}$$

oder

$$H + 2O = 3G. \tag{56}$$

Diese Relation stimmt formal mit der bekannten Eulerschen überein, und geht thatsächlich in diese über, wenn man $x_i = a_i^2$ (vergl. No. **15**) setzt, da in diesem Falle H der Höhenschnittpunkt und O der Mittelpunkt des um $A_1 A_2 A_3$ beschriebenen Kreises wird.

28. Mit Hilfe der Gleichungen (2) nimmt das Gleichungssystem (55) die folgende Form an:

$$\begin{cases} x H_1 = z_1 A_1 + z_3 A_2 + z_2 A_3, \\ x H_2 = z_3 A_1 + z_2 A_2 + z_1 A_3, \\ x H_3 = z_2 A_1 + z_1 A_2 + z_3 A_3, \end{cases} \tag{57}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$z_i = x_k + x_l - x_i. \tag{58}$$

Bildet man aus (57) die äufseren Produkte $[A_i H_i]$ und aus zweien derselben wieder das äufsere Produkt, so erhält man für H den Ausdruck:

$$\begin{aligned} (z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2) H &= z_2 z_3 A_1 + z_3 z_1 A_2 + z_1 z_2 A_3, \\ &= z_2 z_3 A_1 + z_1\{z_3 A_2 + z_3 A_3\}, \\ &= z_2 z_3 A_1 + z_1\{x H_1 - z_1 A_1\}, \\ &= (z_2 z_3 - z_1^2) A_1 + z_1 x H_1. \end{aligned} \tag{59}$$

Digitized by Google

Aus (58) ergiebt sich

$$(\mathfrak{A}_{11}) \qquad \begin{cases} z_2 z_3 - z_1^2 = 2(\omega_2 + \omega_3), \\ z_1 x = \delta - \omega + 2\omega_1; \end{cases}$$

daher folgt

$$(60) \qquad (\omega + \delta) H = 2(\omega_k + \omega_l) A_i + (\delta - \omega + 2\omega_i) H_i.$$

29. Die vorstehenden Formeln führen zu folgenden Theoremen:

XVIII. Der Punkt O ist der Schnittpunkt der Geraden RD_1, ZG, XW; ebenso ist er der Schnittpunkt der Geraden B_1X_1, B_2X_2, B_3X_3, wobei X_1, X_2, X_3 die zu X assoziierten Punkte sind.

XIX. Legt man durch die Ecken des Dreiecks $B_1B_2B_3$ Parallelen zu den Gegenseiten, so erhält man das Dreieck $H_1H_2H_3$, wobei der Punkt H_i dem Punkte B_i gegenüberliegt. Der Schwerpunkt des Dreiecks $H_1H_2H_3$ ist der Punkt G, der nach IV auch der Schwerpunkt sechs anderer Dreiecke ist.

Die drei Geraden A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3 schneiden sich im Punkte H, der auf der Geraden OG liegt und zwar derart, daſs $HG = 2GO$ ist.

30. Für die zu X assoziierten Punkte X_i folgt aus (54) wegen (2)

$$(61) \qquad (x_k + x_l - x_i) X_i + xB_i = (x_k + x_l)(A_k + A_l),$$

und wegen (10)

$$(62) \qquad (x_k + x_l) X^{(i)} - x_i A_i = (x_k + x_l - x_i) X_i,$$

während

$$(63) \qquad (x_k + x_l) X^{(i)} + x_i A_i = xX$$

ist.

Demnach hat man:

XX. Die Geraden B_iX_i gehen durch die Mittelpunkte der Segmente A_kA_l; und entsprechend:

XXI. Die Geraden A_iR_i gehen bez. durch die Mittelpunkte der Segmente B_kB_l.

XXII. Auf jeder der drei Geraden $A_iX^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ bilden die Punkte A_i, $X^{(i)}$ mit den Punkten X_i und dem gemeinsamen Schnittpunkt X vier harmonische Punkte, und zwar sind A_i, $X^{(i)}$ und X, X_i zugeordnet.

31. Schneidet man die Verbindungslinien $X^{(i)}X^{(k)}$ der Punkte

$$(10) \qquad \begin{cases} (x_2 + x_3) X^{(1)} = x_2 A_2 + x_3 A_3, \\ (x_3 + x_1) X^{(2)} = x_3 A_3 + x_1 A_1, \\ (x_1 + x_2) X^{(3)} = x_1 A_1 + x_2 A_2 \end{cases}$$

Digitized by Google

durch die Geraden $A_i A_k$, so erhält man, wenn man

$$\begin{cases} [X^{(2)} X^{(3)}\ \ A_2 A_3] = X', \\ [X^{(3)} X^{(1)}\ \ A_3 A_1] = X'', \\ [X^{(1)} X^{(2)}\ \ A_1 A_2] = X''' \end{cases}$$

setzt,

$$(64) \qquad \begin{cases} (x_3 - x_2)\, X' = -x_3 A_2 + x_2 A_3, \\ (x_1 - x_3)\, X'' = -x_3 A_3 + x_1 A_1, \\ (x_2 - x_1)\, X''' = -x_1 A_1 + x_2 A_2, \end{cases}$$

und da die Summe der rechten Seiten dieser Gleichungen verschwindet, liegen die drei Punkte X', X'', X''' auf einer Geraden $\boldsymbol{x}$, für die sich ergiebt:

$$(65) \qquad \boldsymbol{x} \equiv x_2 x_3 [A_2 A_3] + x_3 x_1 [A_3 A_1] + x_1 x_2 [A_1 A_2].$$

Die Gerade $\boldsymbol{x}$ heisst die *harmonische Polare* des Punktes

$$(1) \qquad X = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3$$

in Bezug auf das Dreieck $A_1 A_2 A_3$, und umgekehrt der Punkt X *der harmonische Pol* der Geraden $\boldsymbol{x}$.

Aus (64) folgt

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_1)(X'' - X''') = x_2 x_3 (A_2 - A_3) + x_3 x_1 (A_3 - A_1) + x_1 x_2 (A_1 - A_2)$$

oder nach (3)

$$(66) \qquad (x_1 - x_3)\,(x_2 - x_1)\,(X'' - X''') = \delta\,(D_2 - D_3).$$

Daher folgt:

XXIII. Die Schnittpunkte X', X'', X''' *der Geradenpaare* $X^{(2)} X^{(3)}$, $A_2 A_3$; $X^{(3)} X^{(1)}$, $A_3 A_1$; $X^{(1)} X^{(2)}$, $A_1 A_2$ *sind bez. die vierten harmonischen Punkte zu den Punkttripeln* $X^{(1)}$, A_2, A_3; $X^{(2)}$, A_3, A_1; $X^{(3)}$, A_1, A_2 *und liegen auf einer Geraden* $\boldsymbol{x}$, *die zu der Geraden* $D_2 D_3$ *parallel ist. Die Gerade* $\boldsymbol{x}$ *ist die harmonische Polare des Punktes* X *in Bezug auf das Dreieck* $A_1 A_2 A_3$.

32. Bestimmt man zu den drei Punkten D_2, D_3 und S gemäfs ihren Ausdrücken in (3) und (25) die harmonischen Polaren, so erhält man die Ausdrücke:

$$\begin{cases} \boldsymbol{d}_2 \equiv x_3 [A_2 A_3] + x_1 [A_3 A_1] + x_2 [A_1 A_2], \\ \boldsymbol{d}_3 \equiv x_2 [A_2 A_3] + x_3 [A_3 A_1] + x_1 [A_1 A_2], \\ \boldsymbol{s} \equiv (x_2 + x_3)[A_2 A_3] + (x_3 + x_1)[A_3 A_1] + (x_1 + x_2)[A_1 A_2] \end{cases}$$

und erkennt, dafs

$$\boldsymbol{d}_2 + \boldsymbol{d}_3 = \boldsymbol{s},$$

dafs diese drei Geraden sich also in *einem* Punkte schneiden. Man findet denselben, indem man $[\boldsymbol{d}_2 \boldsymbol{d}_3]$ bildet, nach (39*) als

$$\omega\, Y = \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3.$$

Digitized by Google

Demnach folgt;

XXIV. Die in Bezug auf das Dreieck $A_1A_2A_3$ gebildeten harmonischen Polaren der Punkte D_2, D_3, S schneiden sich in Y; und entsprechend:

XXV. Die in Bezug auf das Dreieck $B_1B_2B_3$ gebildeten harmonischen Polaren der Punkte D_2, D_3, O schneiden sich in T.

33. Für die Gerade XW erhält man wegen (1) und (27) den Ausdruck

$$x_2x_3(x_2-x_3)[A_2A_3]+x_3x_1(x_3-x_1)[A_3A_1]+x_1x_2(x_1-x_2)[A_1A_2],$$

und für ihren harmonischen Pol R_0 in Bezug auf das Dreieck $A_1A_2A_3$ folgt unmittelbar

$$r_0R_0=x_1(x_3-x_1)(x_1-x_2)A_1+x_2(x_1-x_2)(x_2-x_3)A_2 + x_3(x_2-x_3)(x_3-x_1)A_3$$

oder wegen (23)

$$r_0R_0=x_1p_1A_1+x_2p_2A_2+x_3p_3A_3, \tag{67}$$

wobei

$$r_0=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3$$

ist.

Die rechte Seite von (67) gestattet wegen $(\mathfrak{A}_1)$ und $(\mathfrak{A}_2)$ eine bemerkenswerte Umformung.

Nach $(\mathfrak{A}_1)$ und $(\mathfrak{A}_2)$ folgt

$$\begin{aligned} xx_1p_1 &= x_1(\omega_1x_1+\omega_2x_3+\omega_3x_2)\\ &= \omega_1(x_2x_3-\omega_1)+\omega_2x_3x_1+\omega_3x_1x_2\\ &= \omega_1x_2x_3+\omega_2x_3x_1+\omega_3x_1x_2-\omega_1^2. \end{aligned}$$

Setzt man daher zur Abkürzung

$$\Delta=\omega_1x_2x_3+\omega_2x_3x_1+\omega_3x_1x_2, \tag{68}$$

so folgt

$$xx_ip_i=\Delta-\omega_i^2. \tag{$\mathfrak{A}_{12}$}$$

Demnach ergiebt sich aus (67)

$$xr_0R_0=\Delta(A_1+A_2+A_3)-(\omega_1^2A_1+\omega_2^2A_2+\omega_3^2A_3),$$

oder wenn man

$$\omega_1^2A_1+\omega_2^2A_2+\omega_3^2A_3=w^*W^* \tag{69}$$

setzt:

$$xr_0R_0=3\Delta G-w^*W^*. \tag{70}$$

Nach (30) ist

$$w^*=\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2=-\omega z,$$

so dafs sich (70) auch in

$$xr_0R_0=3\Delta G+\omega zW^* \tag{71}$$

Digitized by Google

verwandelt, und für xr_0 sich ergiebt

$$xr_0 = 3\Delta + \omega z. \tag{72}$$

34. Ersetzt man die x_i durch die ω_i und läfst die A_i unverändert, so mögen die Punkte B_i in Punkte P_i übergehen. Dann sind nach (2) die P_i wie folgt bestimmt:

$$\begin{cases} \omega P_1 = \omega_1 A_1 + \omega_3 A_2 + \omega_2 A_3, \\ \omega P_2 = \omega_3 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_1 A_3, \\ \omega P_3 = \omega_2 A_1 + \omega_1 A_2 + \omega_3 A_3. \end{cases} \tag{73}$$

Bildet man nun $2P_{kl} = P_k + P_l$ und $[A_i P_{kl}]$, so erhält man ein Gleichungssystem, welches (24) vollständig entspricht und aus diesem hervorgeht, wenn man x_i durch ω_i ersetzt. Man erkennt daher, dafs die drei Geraden $A_i P_{kl}$ sich in *einem* Punkte schneiden. Bezeichnet man denselben mit N, so findet man für ihn aus dem Ausdruck für S in (25)

$$\omega(\omega + \delta)N = (\omega_1 + \omega_2)(\omega_3 + \omega_1)A_1 + (\omega_2 + \omega_3)(\omega_1 + \omega_2)A_2 + (\omega_3 + \omega_1)(\omega_2 + \omega_3)A_3. \tag{74}$$

Die Substitution, die S in N überführt, läfst R unverändert, führt aber X in Y und die Punkte D_i in M_i über, wobei

$$\begin{cases} \omega\delta M_1 = \omega_2\omega_3 A_1 + \omega_3\omega_1 A_2 + \omega_1\omega_2 A_3, \\ \omega\delta M_2 = \omega_1\omega_2 A_1 + \omega_2\omega_3 A_2 + \omega_3\omega_1 A_3, \\ \omega\delta M_3 = \omega_3\omega_1 A_1 + \omega_1\omega_2 A_2 + \omega_2\omega_3 A_3 \end{cases} \tag{75}$$

ist. Da dieselbe Substitution die in (27) definierten Punkte W und Z in W^* und Z^* überführt, wobei W^* durch (69) und Z^* durch

$$z^* Z^* = -\omega w Z^* = (\omega_3\omega_3 + \omega_1^2)A_1 + (\omega_3\omega_1 + \omega_2^2)A_2 + (\omega_1\omega_2 + \omega_3^2)A_3 \tag{76}$$

definiert ist, verwandelt sich das Gleichungssystem (26) in das folgende:

$$\begin{cases} (\omega + \delta)N = \omega Y + \delta M_1, \\ \qquad\quad = -z W^* + 3\delta G, \\ \qquad\quad = -w Z^* + \delta(M_2 + M_3), \\ \qquad\quad = -x^2 R + 2\delta(M_2 + M_3). \end{cases} \tag{77}$$

Aus (75) ergiebt sich durch Addition

$$M_1 + M_2 + M_3 = A_1 + A_2 + A_3 = 3G, \tag{78}$$

und daher folgt aus der zweiten und dritten Gleichung (77), entsprechend (29):

$$z W^* - w Z^* = \delta M_1. \tag{79}$$

Digitized by Google

Ebenso erhält man, entsprechend (38):

$$\begin{cases} z\,W^* + \omega\,Y &= 2\delta\,M_{23}, \\ x^2 R &- w\,Z^* = 2\delta\,M_{23}, \end{cases} \tag{80}$$

wobei $2\,M_{23} = M_2 + M_3$, und entsprechend (40):

$$\begin{cases} -\,w\,Z^* + x^2\,X = 2\delta\,M_1, \\ \quad w\,Z^* + x^2\,X = 2z\,W^*. \end{cases} \tag{81}$$

Aus der ersten Gleichung (42) ergiebt sich

$$x^2\,T = (x_1^2 + 2x_2x_3)A_1 + (x_2^2 + 2x_3x_1)A_2 + (x_3^2 + 2x_1x_2)A_3.$$

Ersetzt man hierin x_i durch ω_i, während A_i unverändert bleibt, so möge T in T^* übergehen. Dann folgt

$$\omega\,T^* = (\omega - 2\delta)\,W^* + 2\delta\cdot M_1$$

oder wegen (28) und (79)

$$\begin{cases} \omega\,T^* + z\,W^* = \quad 2\delta\,M_1, \\ \omega\,T^* - z\,W^* = -\,2w\,Z^*. \end{cases} \tag{82}$$

Hieraus ergiebt sich, in Verbindung mit der zweiten Gleichung (80)

$$\omega\,T^* + x^2 R = 3\delta\,G, \tag{83}$$

und wegen (44), entsprechend (46):

$$\omega(Y - T^*) = x^2(R - X). \tag{84}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man unmittelbar:

XXVI. Die durch Y zu RX gelegte Parallele schneidet RG in T.*

35. Wenn man in (74) die A_i durch die in (19) gegebenen Werte ersetzt, folgt

$$\begin{aligned} \omega^2(\omega + \delta)N = {} & (\omega\omega_1 + \omega_2\omega_3)(\omega_1 B_1 + \omega_3 B_2 + \omega_2 B_3) \\ & + (\omega\omega_2 + \omega_3\omega_1)(\omega_3 B_1 + \omega_2 B_2 + \omega_1 B_3) \\ & + (\omega\omega_3 + \omega_1\omega_2)(\omega_2 B_1 + \omega_1 B_2 + \omega_3 B_3). \end{aligned}$$

Der Faktor von B_1 auf der rechten Seite wird

$$\omega_1\{\omega\omega_1 + \omega_2\omega_3 + \omega_3^2 + \omega_2^2\} + 2\omega\cdot\omega_2\omega_3 = \omega_1(\omega^2 - \omega\delta) + 2\omega\cdot\omega_2\omega_3.$$

Demnach ergiebt sich

$$\begin{aligned} \omega^2(\omega + \delta)N = {} & (\omega^2 - \omega\delta)(\omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 + \omega_3 B_3) \\ & + 2\omega(\omega_2\omega_3 B_1 + \omega_3\omega_1 B_2 + \omega_1\omega_2 B_3), \end{aligned}$$

oder wegen (20) und (21)

$$(\omega + \delta)N = (\omega - \delta)R + 2\delta\cdot D_1. \tag{85}$$

Diese Relation zieht zwei merkwürdige Folgerungen nach sich. Multipliziert man die erste Gleichung (51) mit 2

$$2(\omega + \delta)O = 2\omega R + 2\delta\cdot D_1$$

Digitized by Google

und subtrahiert (85), so erhält man

$$2O = N + R, \tag{86}$$

oder:

XXVII. Der Punkt O ist der Mittelpunkt der Strecke NR.

Setzt man zweitens den Wert von $(\omega + \delta)N$ aus (85) in die vierte Gleichung (77) ein, so erhält man

$$(\omega - \delta)R + 2\delta D_1 = -x^2 R + 2\delta(M_2 + M_3)$$

oder

$$(\omega - \delta + x^2)R = 2\delta(M_2 + M_3 - D_1).$$

Da wegen (28) $x^2 = 3\delta - \omega$, also $\omega - \delta + x^2 = 2\delta$ ist, so ergiebt sich

$$R = M_2 + M_3 - D_1 \tag{87}$$

oder

$$R = 3G - (M_1 + D_1).$$

Setzt man daher

$$M_1 + D_1 = 2M_1,$$

bezeichnet man also mit M_1 den Mittelpunkt der Strecke $M_1 D_1$, so folgt

$$R + 2M_1 = 3G. \tag{88}$$

Führt man in (87) für R, M_2, M_3, D_1 ihre Werte aus (22), (75) und (3) ein, so erhält man das bemerkenswerte Identitätensystem:

$$(\mathfrak{A}_{13}) \qquad \begin{cases} \delta p_1 = \omega_1(\omega_2 + \omega_3) - \omega x_2 x_3, \\ \delta p_2 = \omega_2(\omega_3 + \omega_1) - \omega x_3 x_1, \\ \delta p_3 = \omega_3(\omega_1 + \omega_2) - \omega x_1 x_2, \end{cases}$$

welches sich leicht in

$$\delta p_i = -(\omega x_i^2 + \omega_i^2) \tag{$\mathfrak{A}_{14}$}$$

umformt und wegen $(\mathfrak{A}_{12})$ auch noch das Identitätensystem

$$-p_i \omega_i = \Delta + \omega x_i^2 \tag{$\mathfrak{A}_{15}$}$$

nach sich zieht. Dabei sind die Werte der p_i und Δ durch (23) und (68) bestimmt.

36. Um die in (73) und (75) definierten Punkte P_i und M_i zu konstruieren, greife ich auf Theorem *I*, Nr. **16** zurück. Ersetzt man dort den Punkt X durch den Schnittpunkt Y der Geraden WD_1 und XG und bezeichnet die Schnittpunkte der Transversalen $A_i Y$ mit den Dreiecksseiten $A_k A_l$ durch $Y^{(i)}$, so gelangt man, entsprechend den Punkten $B_k^{(i)}$, zu Punkten $P_k^{(i)}$. Dann schneiden sich die Geraden $A_1 P_i^{(1)}$, $A_2 P_i^{(2)}$, $A_3 P_i^{(3)}$ im Punkte P_i und die Geraden $A_1 P_i^{(1)}$, $A_2 P_k^{(2)}$, $A_3 P_l^{(3)}$ im Punkte M_i. Bezeichnet man also den Mittelpunkt der Strecke $M_1 D_1$ durch M_1, so folgt aus (88):

Digitized by Google

XXVIII. Der Mittelpunkt $\boldsymbol{M}_1$ der Strecke M_1D_1 liegt auf der Geraden RG und zwar derart, daß $RG = 2G\boldsymbol{M}_1$ ist.

37. Die in § 2 unter *III* bis *IX* gegebenen Theoreme verwandeln sich in entsprechende, wenn man $B_k^{(i)}$ durch $P_k^{(i)}$, B_i durch P_i, D_i durch M_i, $X^{(i)}$ durch $Y^{(i)}$ und X durch Y ersetzt. Diese Substitution ist die nämliche, wie die in No. **34** verwendete, bei der man x_i durch ω_i ersetzt und die A_i unverändert läßt, und welche die S in N, W_i in $W_i^* = [A_kP_i\ A_iP_k]$, W, T, Z in W^*, T^*, Z^* überführt, während R und G unverändert bleiben. Hieraus erhält man das

Erste Übertragungsprinzip. Vertauscht man x_i mit ω_i und läßt die A_i unverändert, so bleiben auch die Punkte G und R unverändert, während die Punkte

$$B_i,\ D_i,\ X,\ S,\ W_i,\ W,\ Z,\ T,\ O,\ H,\ R_0$$

sich in

$$P_i,\ M_i,\ Y,\ N,\ W_i^*,\ W^*,\ Z^*,\ T^*,\ O^*,\ H^*,\ R_0^*$$

verwandeln.

38. Die in Nr. **37** auftretenden Punkte O^*, H^*, R^* sind bisher nicht aufgestellt. Dies soll jetzt geschehen. Aus (50) folgt durch Ersetzung von x_i durch ω_i:

$$(89)\quad \begin{cases} \omega(4\delta-\omega)O^* = \omega_1(\omega_2+\omega_3-\omega_1)A_1 + \omega_2(\omega_3+\omega_1-\omega_2)A_2 \\ \qquad\qquad + \omega_3(\omega_1+\omega_2-\omega_3)A_3 \\ \qquad = \omega_1(\omega-2\omega_1)A_1 + \omega_2(\omega-2\omega_2)A_2 + \omega_3(\omega-2\omega_3)A_3 \end{cases}$$

und daraus

$$(90)\quad \begin{cases} (4\delta-\omega)O^* = \delta(M_2+M_3) + (2\delta-\omega)W^*, \\ \qquad = \omega Y + 2(2\delta-\omega)W^*, \\ \qquad = -\omega Y + 2\delta(M_2+M_3), \\ \qquad = (\delta-\omega)Z^* - 3\delta\cdot G, \\ \qquad = x^2R + \delta\cdot M_1. \end{cases}$$

Die dritte dieser Gleichungen ergiebt sich, wenn man die erste mit 2 multipliziert und die zweite abzieht; zu der vierten Gleichung gelangt man aus der ersten, wenn man mittels (79) $(2\delta-\omega)W^*$ ausdrückt und (78) berücksichtigt; die fünfte Gleichung endlich ist eine Folge der vierten, wenn man aus der zweiten Gleichung (80) den Wert von Z^* entnimmt.

39. Zur Aufstellung des Ausdruckes für H^* benutze ich (59). Da

$$x_2x_3 = 2(x_1^2 + x_2x_3) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

Digitized by Google

so folgt

$$(91)\quad \begin{cases} \omega(4\delta-\omega)H^* = 2\{(\omega_1^2+\omega_2\omega_3)A_1+(\omega_2^2+\omega_3\omega_1)A_2 \\ \qquad\qquad +(\omega_3^2+\omega_1\omega_2)A_3\}-(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)(A_1+A_2+A_3), \\ \qquad\qquad = 2w^*W^*+2\omega\delta\cdot M_1-3\omega(\omega-2\delta)G \end{cases}$$

oder

$$(92)\quad \begin{cases} (4\delta-\omega)H^* = -2(2\delta-\omega)W^*+2\delta\cdot M_1-3(\omega-2\delta)G \\ \qquad\qquad = -2(\delta-\omega)Z^*-3(\omega-2\delta)G. \end{cases}$$

Hieraus folgt, wegen der vierten Gleichung (90)

$$(93)\qquad H^*+2O^* = 3G,$$

d. h. diejenige Relation, welche sich aus (56) bei Anwendung des ersten Übertragungsprinzipes ergiebt. Ganz ebenso folgt mittels dieses Prinzipes aus (86) unmittelbar

$$(94)\qquad 2O^* = S+R.$$

Durch Rechnung ergiebt sich diese Relation, wenn man zur vierten Gleichung (26) sR addiert und den entstehenden Ausdruck mittels (7) und (88) umformt.

40. Ersetzt man in (67)

$$(67)\qquad r_0R_0 = x_1p_1A_1+x_2p_2A_2+x_3p_3A_3,$$

x_i durch ω_i und beachtet $(\mathfrak{A}_4)$, so erhält man

$$(95)\qquad r_0^*R_0^* = \omega_1p_1A_1+\omega_2p_2A_2+\omega_3p_3A_3,$$

wobei

$$(96)\qquad r_0^* = \omega_1p_1+\omega_2p_2+\omega_3p_3$$

ist. Multipliziert man die erste Gleichung $(\mathfrak{A}_2)$ mit ω_1, so folgt

$$\begin{aligned} x\omega_1p_1 &= \omega_1^2x_1+\omega_1\omega_2x_3+\omega_1\omega_3x_2, \\ &= (\omega_2\omega_3-\omega\cdot x\cdot x_1)x_1+\omega_1\omega_2x_3+\omega_1\omega_3x_2, \\ &= \Delta^*-\omega x x_1^2 \end{aligned}$$

oder allgemein

$$(97)\qquad x\omega_ip_i = \Delta^*-\omega x x_i^2,$$

wobei

$$(98)\qquad \Delta^* = \omega_2\omega_3x_1+\omega_3\omega_1x_2+\omega_1\omega_2x_3$$

ist. Demnach folgt

$$(99)\qquad xr_0^*R_0^* = 3\Delta^*G-\omega x w W.$$

Dem Ausdruck Δ^* läfst sich wegen der ersten Gleichung $(\mathfrak{A}_2)$ die Form geben

$$\begin{aligned} \Delta^* &= \omega_2\omega_3x_1+\omega_1(x\cdot p_1-\omega_1x_1), \\ &= (\omega_2\omega_3-\omega_1^2)x_1+x\cdot p_1\omega_1, \\ &= \omega x x_1^2+xp_1\omega_1, \\ &= x(\omega x_1^2+p_1\omega_1) \end{aligned}$$

Digitized by Google

oder wegen $(\mathfrak{A}_{15})$

$$\Delta^* = -x\Delta.$$

Demnach geht (99) über in:

$$-r^*_0 R_0^* = 3\Delta \cdot G + \omega w W. \tag{100}$$

Aus (70) und (100) folgt noch

$$\begin{aligned} x r_0 R_0 + r_0^* R_0^* &= \omega (z W^* - w W), \\ &= \delta \omega R. \end{aligned}$$

§ 5.

41. Führt man die Punkte C_i ein, definiert durch

$$C_i = [A_i X \; B_i G], \tag{101}$$

so folgt

$$c_i C_i = z_i A_i + x_k A_k + x_l A_l, \tag{102}$$

wobei $(i, k, l = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2)$

$$c_i = 2x_k - 2x_l + x_i, \tag{103}$$

und nach (58)

$$z_i = x_k + x_l - x_i \tag{58}$$

ist. Aus (101) ergiebt sich leicht:

$$\begin{cases} c_i C_i = xX + (x_k + x_l - 2x_i) A_i, \\ \quad = 3(x_k + x_l) G - xB_i, \\ \quad = -x_i B_i + (x_k + x_l)(B_k + B_l). \end{cases} \tag{104}$$

Aus (101) und (104) folgt:

XXIX. Der Schnittpunkt C_i der Geraden $A_i X$ und $B_i G$ liegt auf der Geraden, welche den Punkt B_i mit dem Mittelpunkt der Strecke $B_k B_l$ verbindet.

Setzt man

$$L_i = [B_k C_l \; B_l C_k], \tag{105}$$

so findet man

$$\begin{cases} \lambda_1 L_1 = \omega_1 A_1 & + x_2(x_2 - x_3) A_2 - x_3(x_2 - x_3) A_3, \\ \lambda_2 L_2 = -x_1(x_3 - x_1) A_1 + \omega_2 A_2 & + x_3(x_3 - x_1) A_3, \\ \lambda_3 L_3 = x_1(x_1 - x_2) A_1 & - x_2(x_1 - x_2) A_2 + \omega_3 A_3, \end{cases} \tag{106}$$

wobei

$$\lambda_i = \omega_i + (x_k - x_l)^2 \tag{107}$$

ist.

Aus (106) ergiebt sich

$$\begin{cases} [A_1 L_1] = x_2 [A_1 A_2] + x_3 [A_3 A_1], \\ [A_2 L_2] = x_3 [A_2 A_3] + x_1 [A_1 A_2], \\ [A_3 L_3] = x_1 [A_3 A_1] + x_2 [A_2 A_3]. \end{cases}$$

Digitized by Google

Hieraus findet man für den Durchschnittspunkt der Geraden $A_2 L_2$ und $A_3 L_3$ den Ausdruck

$$-x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3,$$

der nach (54) den Punkt X_1 kennzeichnet. Demnach hat man

$$[A_i L_k \; A_l L_l] = X_l, \tag{108}$$

oder:

XXX. Bezeichnet man mit L_i die Durchschnittspunkte der Geraden $B_k C_l$ und $B_l C_k$ und mit X_i die Durchschnittspunkte der Geraden $A_k L_k$ und $A_l L_l$, so sind die Punkte X_i die zum Punkte X assoziierten.

Multipliziert man die Gleichungen (106) der Reihe nach mit $x_1(x_2 + x_3)$, $x_2(x_3 + x_1)$, $x_3(x_1 + x_2)$ und addiert sie, so wird der Faktor von A_1 auf der rechten Seite gleich

$$x_1\{\omega_1(x_2 + x_3) - x_2(x_3^2 - x_1^2) + x_3(x_1^2 - x_2^2)\}$$

oder, da der in der Klammer stehende Ausdruck verschwindet, gleich Null. Demnach folgt:

$$x_1(x_2 + x_3)\lambda_1 L_1 + x_2(x_3 + x_1)\lambda_2 L_2 + x_3(x_1 + x_2)\lambda_3 L_3 = 0, \tag{109}$$

oder, wie Herr Ripert gefunden:

XXXI. Die drei Punkte L_1, L_2, L_3 liegen auf einer Geraden, die durch

$$(x_2 - x_3)^2 [A_2 A_3] + (x_3 - x_1)^2 [A_3 A_1] + (x_1 - x_2)^2 [A_1 A_2] \tag{110}$$

ausgedrückt ist.

Da

$$(x_2 - x_3)^2 p_1 + (x_3 - x_1)^2 p_2 + (x_1 - x_2)^2 p_3$$

und

$$(x_2 - x_3)^2 x_1 p_1 + (x_3 - x_1)^2 x_2 p_2 + (x_1 - x_2)\, x_3 p_3$$

identisch verschwinden, so liegen auf der Geraden (110) die Punkte R und R_0. Demnach lassen sich L_1, L_2, L_3 durch R und R_0 linear ausdrücken.

In der That findet man aus den beiden aus (106) hervorgehenden Gleichungen

$$\begin{cases} \lambda_1 L_1 + \quad \lambda_2 L_2 + \quad \lambda_3 L_3 = -\omega R, \\ x_1 \lambda_1 L_1 + x_2 \lambda_2 L_2 + x_3 \lambda_3 L_3 = +r_0 R_0, \end{cases} \tag{111}$$

in Verbindung mit (109) für die L_i die folgenden Werte

$$\begin{cases} p_1 \lambda_1 L_1 = x_2 x_3 \omega R - x_1 r_0 R_0, \\ p_2 \lambda_2 L_2 = x_3 x_1 \omega R - x_2 r_0 R_0, \\ p_3 \lambda_3 L_3 = x_1 x_2 \omega R - x_3 r_0 R_0. \end{cases} \tag{112}$$

42. Aus

$$F_i = [A_i C_i \; A_l C_l] \tag{113}$$

Digitized by Google

folgt

$$(114)\qquad \begin{cases} 3x_1F_1 = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3, \\ 3x_2F_2 = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3, \\ 3x_3F_3 = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 \end{cases}$$

und daraus, wegen (9):

$$(115)\qquad 3x_i(F_i - G) = (x_k - x_l)(A_i - A_k) = x(B_i - X),$$

$$(116)\qquad c_iC_i + 3x_iF_i = 2xQ,$$

$$(117)\qquad (z_i - x_i)A_i + 3x_iF_i = xF,$$

wobei

$$(118)\qquad 2xQ = (x_2 + x_3)A_1 + (x_3 + x_1)A_2 + (x_1 + x_2)A_3,$$

$$(119)\qquad xF = z_1A_1 + z_2A_2 + z_3A_3.$$

Aus (1) und den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich

$$(120)\qquad X + 2Q = 3G,$$

$$(121)\qquad F + 2X = 3G,$$

und daraus

$$(122)\qquad 2Q = F + X.$$

Da nach (2)

$$x(B_2 + B_3) = 2xB_{23} = (x_2 + x_3)A_1 + (x_1 + x_2)A_2 + (x_3 + x_1)A_3,$$

so folgt

$$\begin{aligned} 2x(B_{23} - Q) &= (x_1 + x_2)(A_2 - A_3) + (x_3 + x_1)(A_3 - A_2) \\ &= (x_2 - x_3)(A_2 - A_3) \end{aligned}$$

und allgemein

$$(123)\qquad 2x(Q - B_{kl}) = (x_k - x_l)(A_i - A_k).$$

Ganz ebenso ergiebt sich unter Benutzung von (57)

$$(124)\qquad \tfrac{1}{2}x(F - H_i) = (x_k - x_l)(A_i - A_k).$$

Aus den Formeln (112) bis (124) findet man:

XXXII. Die drei Punkte L_1, L_2, L_3 liegen auf der durch R und R_0 gehenden Geraden.

XXXIII. Bezeichnet man mit F_i die Durchschnittspunkte der Geraden A_kC_i und A_iC_k, so schneiden sich die Geraden A_iF_i in F und die Geraden C_iF_i in Q.

XXXIV. Die Geraden GF_i, XB_i, $B_{ki}Q$, H_iF sind unter einander und den Dreiecksseiten A_kA_l parallel.

XXXV. Die Punkte X, G, F, Q liegen auf einer und derselben Geraden und zwar so, daß der Punkt Q die Mitte der Strecke FX ist, und $XG = \frac{1}{2}GF = 2GQ$.

43. Um aus den Formeln und Sätzen dieses Paragraphen mittels des ersten Übertragungsprinzips neue herleiten zu können, bedarf es noch der

Digitized by Google

Kenntnis der Punkte C_i^*, L_i^*, F_i^*, F^*, Q^*, H_i^*, die aus den entsprechenden Punkten C_i, L_i, ..., H_i hervorgehen, wenn man x_i mit ω_i vertauscht, aber die A_i unverändert läfst. Man findet:

$$(125)\quad \begin{cases} C_i^* = [A_i Y \quad P_i G], \\ c_i^* C_i^* = (\omega_k + \omega_l - \omega_i) A_i + \omega_k A_k + \omega_l A_l, \\ \qquad = (\omega_k + \omega_l - 2\omega_i) A_i + \omega Y, \\ \qquad = -\omega P_i + 3(\omega_k + \omega_l) G, \\ c_i^* = 2\omega_k + 2\omega_l - \omega_i. \end{cases}$$

$$(126)\quad \begin{cases} L_i^* = [P_k C_i^* \quad P_l C_k^*], \\ \lambda_i^* L_i^* = x\{\omega x_i A_i - \omega_k (x_k - x_l) A_k + \omega_k (x_k - x_l) A_l\}, \\ \qquad = (\omega_i + \omega_k)\omega P_k - (\omega_i + \omega_l) c_l^* C_l^*, \\ \qquad = (\omega_i + \omega_l)\omega P_l - (\omega_i + \omega_k) c_k^* C_k^*. \end{cases}$$

$$(127)\quad \begin{cases} F_i^* = [A_k C^* \quad A_l C_k^*], \\ 3\omega_i F_i^* = \omega_i A_i + (\omega_i + \omega_l - \omega_k) A_k + (\omega_i + \omega_k - \omega_l) A_l, \\ \qquad = (\omega_i + \omega_l - 2\omega_k) A_k + c_l^* C_l^*, \\ \qquad = (\omega_i + \omega_k - 2\omega_l) A_l + c_k^* C_k^*; \end{cases}$$

$$(128)\quad \omega F^* = 2x^2 X - 3zG,$$

$$(129)\quad Q^* = 3G - Y,$$

$$(130)\quad \omega H_i^* = 2x^2 B_i - 3zG.$$

Unter Hinzufügung und Benutzung dieser Werte läfst sich das in Nr. **37** ausgesprochene erste Übertragungsprinzip schematisch in folgender übersichtlichen Form darstellen.

Erstes Übertragungsprinzip.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{A_i}{A_i}\Big|\dfrac{B_i}{P_i}\Big|\dfrac{X}{Y}\Big|\dfrac{D_i}{M_i}\Big|\dfrac{S}{N}\Big|\dfrac{W_i}{W_i^*}\Big|\dfrac{W}{W^*}\Big|\dfrac{Z}{Z^*}\Big|\dfrac{T}{T^*}\Big|\dfrac{O}{O^*}\Big|\dfrac{H_i}{H_i^*}\Big|\dfrac{H}{H^*}\Big|\dfrac{C_i}{C_i^*}\Big|\dfrac{L_i}{L_i^*}\Big|\dfrac{F_i}{F_i^*}\Big|\dfrac{F}{F^*}\Big|\dfrac{Q}{Q^*}\Big|\dfrac{R_0}{R_0^*}\Big|\dfrac{R}{R}\Big|\dfrac{G}{G} \\ \dfrac{x_i}{\omega_i}\Big|\dfrac{\omega_i}{\omega x x_i}\Big|\dfrac{\delta}{\omega\delta}\Big|\dfrac{s = 4\delta - \omega}{\omega(\omega + \delta)}\Big|\dfrac{w = \delta - \omega}{-\omega z = \omega(\omega - 2\delta)}\Big|\dfrac{z = 2\delta - \omega}{-\omega w = \omega(\omega - \delta)}. \end{array}\right.$$

44. In den Nr. **17**, **21** und **26** ist bereits ein anderes Übertragungsprinzip verwendet worden, bei welchem x_i mit ω_i und überdies A_i mit B_i vertauscht wird. Hierdurch vertauschen sich D_2 und D_3, X und R, W und Z, S und O, T und Y, während D_1, G, W_i unverändert bleiben. Die anderen bisher eingeführten Punkte, wie H_i, H, N, ... gehen in neue über, die bez. H_i', H', N', ... bezeichnet werden mögen. Unter Verwendung dieser Bezeichnungsweise kann man das neue Übertragungsprinzip schematisch, wie folgt, darstellen.

Digitized by Google

Zweites Übertragungsprinzip.

$$\begin{cases} A_i|D_3|X|W|S|T|H_i|H|N|F_i|F|C_i|L_i|Q|R_0\|D_1|G|W_i \\ B_i|D_3|R|Z|O|Y|H_i'|H'|N'|F_i'|F'|C_i'|L_i'|Q'|R_0'\|D_1|G|W_i \\ x_i| \quad \omega_i \quad | \ \delta \ |s = 4\delta - \omega| \quad w = \delta - \omega \quad | \quad z = 2\delta - \omega \\ \omega_i|\omega \cdot x \cdot x_i|\omega\delta| \ \omega(\omega + \delta) \ |- \omega z = \omega(\omega - 2\delta)|- \omega w = \omega(\omega - \delta) \end{cases}.$$

45. Die in dem zweiten Übertragungsprinzip vorkommenden, mit oberen Strichen versehenen Punkte H_i', $H', \ldots, R_0'$ sind bisher nicht bestimmt, ich beschränke mich im folgenden auf die Angabe ihrer Werte, wenn die Herleitung keine Schwierigkeit bereitet:

$$(131) \qquad \begin{cases} H_i' = -A_i + A_k + A_l, \\ H_i' + 2A_i = 3G, \end{cases}$$

$$132) \qquad (4\delta - \omega)H' = 3(2\delta - \omega)G - 2(\delta - \omega)W.$$

Um die Verwendung der Übertragungsprinzipien, etwa des zweiten, an einem sehr einfachen Beispiele zu zeigen, greife ich auf Gleichung (56)

$$(56) \qquad H + 2O = 3G$$

zurück. Nach dem zweiten Übertragungsprinzip entsprechen den Punkten H und G die unter ihnen stehenden Punkte H' und G, während dem Punkte O der über ihm stehende Punkt S entspricht. Daher ergiebt sich aus (56) die Relation

$$H' + 2S = 3G,$$

die aus der zweiten Gleichung (26) und (126) auch direkt leicht hergeleitet werden kann.

46. Für N' findet man aus (74)

$$(x^2 + \delta)N' = (x_1 + x_2)(x_3 + x_1)B_1 + (x_2 + x_3)(x_1 + x_2)B_2 + (x_3 + x_1)(x_2 + x_3)B_3$$

und mittels des zweiten Übertragungsprinzipes aus (85)

$$(133) \qquad (x^2 + \delta)N' = (x^2 - \delta)X + 2\delta D_1.$$

Die Gleichheit der beiden Ausdrücke für N' ergiebt sich aus der Identität

$$(\mathfrak{A}_{16}) \qquad \omega(x_i + x_k)(x_i + x_l) = (x^2 - \delta)p_i + 2\omega_k\omega_l.$$

Für C_i' ergiebt sich

$$(134) \qquad \begin{cases} C_i' = [B_iR \quad A_iG], \\ c_i'C_i' = (\omega_k + \omega_l - \omega_i)B_i + \omega_kB_k + \omega_lB_l, \\ \qquad = -\omega_iA_i + (\omega_k + \omega_l)(A_k + A_l), \\ \qquad = (\omega_k + \omega_l - 2\omega_i)B_i + \omega R, \\ \qquad = -\omega A_i + 3(\omega_k + \omega_l)G; \\ c_i' = 2\omega_k + 2\omega_l - \omega_i = c_i^*. \end{cases}$$

Digitized by Google

Ebenso findet man für die F_i':

$$(135)\quad \begin{cases} F_i' = [B_kC_i' \quad B_iC_k'], \\ 3\omega_i F_i' = \omega_i B_i + (\omega_i + \omega_i - \omega_k)B_k + (\omega_i + \omega_k - \omega_i)B_i, \\ \qquad = (\omega_i + \omega_i - 2\omega_k)B_k + c_i' C_i', \\ \qquad = (\omega_i + \omega_k - 2\omega_i)B_i + c_k' C_k'. \end{cases}$$

47. Für Q' und F' folgt

$$(136)\quad \begin{cases} 2\omega Q' = c_i' C_i' + 3\omega_i F_i', \\ \qquad = (\omega_2 + \omega_3)B_1 + (\omega_3 + \omega_1)B_2 + (\omega_1 + \omega_2)B_3, \\ 2Q' = 3G - R; \end{cases}$$

$$(137)\quad \begin{cases} \omega F' = (\omega_k + \omega_i - 2\omega_i)B_i + 3\omega_i F_i, \\ \qquad = (\omega_2 + \omega_3 - \omega_1)B_1 + (\omega_3 + \omega_1 - \omega_2)B_2 + (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)B_3, \\ \qquad = 2x^3 T - 3sG. \end{cases}$$

Für L_i' und R_0' erhält man endlich:

$$(138)\quad \begin{cases} L_i' = [A_kC_i' \quad A_iC_k'], \\ \lambda_i' L_i' = x\{\omega x_i B_i - \omega_k(x_k - x_i)B_k + \omega_k(x_k - x_i)B_i\}, \\ \qquad = (\omega_i + \omega_k)\omega A_k - (\omega_i + \omega_i)c_i' C_i', \\ \qquad = (\omega_i + \omega_i)\omega A_i - (\omega_i + \omega_k)c_k' C_k'; \end{cases}$$

$$(139)\quad \begin{cases} r_0' R_0' = \omega_1 p_1 B_1 + \omega_2 p_2 B_2 + \omega_3 p_3 B_3, \\ \qquad = 3(\Delta + \omega\delta)G - \omega(x^3 + \delta)N'. \end{cases}$$

48. Setzt man

$$U = u_1 A_1 + u_2 A_2 + u_3 A_3,$$

so lautet die Gleichung jedes Kegelschnittes, der durch A_1, A_2, A_3 hindurchgeht:

$$\mathfrak{A} = \alpha_1 u_2 u_3 + \alpha_2 u_3 u_1 + \alpha_3 u_1 u_2 = 0.$$

Soll dieser Kegelschnitt auch durch D_2 und D_3 hindurchgehen, so mufs $\mathfrak{A} = 0$ sein, für

$$u_1 = x_1 x_2, \quad u_2 = x_2 x_3, \quad u_3 = x_3 x_1;$$
$$u_1 = x_1 x_3, \quad u_2 = x_2 x_1, \quad u_3 = x_3 x_2;$$

d. h. es mufs

$$\begin{cases} \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 = 0, \\ \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_1 = 0 \end{cases}$$

sein. Daraus folgt

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \omega_1 : \omega_2 : \omega_3.$$

Somit ergiebt sich als Gleichung des durch A_1, A_2, A_3, D_2, D_3 hindurchgehenden Kegelschnitts

$$(140)\qquad \mathfrak{A} = \omega_1 u_2 u_3 + \omega_2 u_3 u_1 + \omega_3 u_1 u_2 = 0.$$

Digitized by Google

Auf diesem Kegelschnitt[1]) liegen die Punkte R und S, da ihre Koordinaten p_1, p_2, p_3 und $(x_1+x_2)(x_1+x_3), (x_2+x_3)(x_2+x_1), (x_3+x_1)(x_3+x_2)$ der Gleichung (140) wegen der beiden letzten Identitäten $(\mathfrak{A}_5)$ genügen. Ebenso wird Gleichung (140) und zwar identisch erfüllt für den Punkt R_0*, sowie für die Punkte

$$(141)\qquad \begin{cases} c_1'C_1' = -\omega_1 A_1 + (\omega_2+\omega_3)(A_2+A_3), \\ c_2'C_2' = -\omega_2 A_2 + (\omega_3+\omega_1)(A_3+A_1), \\ c_3'C_3' = -\omega_3 A_3 + (\omega_1+\omega_2)(A_1+A_2); \end{cases}$$

und

$$(142)\qquad \begin{cases} \omega_1 E_1' = \omega_1 A_1 - (\omega_2-\omega_3)(A_2-A_3), \\ \omega_2 E_2' = \omega_2 A_2 - (\omega_3-\omega_1)(A_3-A_1), \\ \omega_3 E_3' = \omega_3 A_3 - (\omega_1-\omega_2)(A_1-A_2). \end{cases}$$

Ersetzt man die A_i mittels (19) durch die B_i, so folgt aus der ersten Gleichung (142)

$$\omega\omega_1 E_1' = \{\omega_1^2 + (\omega_2-\omega_3)^2\} B_1 + \omega_2(\omega_3+\omega_1-\omega_2)B_2 + \omega_3(\omega_1+\omega_2-\omega_3)B_3$$

oder wegen (25_1)

$$\omega\omega_1 E_1' = \omega(x^2+\delta)S + \{\omega_1^2 + (\omega_2-\omega_3)^2 - \omega_1\omega_2 - \omega_1\omega_3 - \omega_1^2\} B_1.$$

Der Faktor von B_1 nimmt leicht die Gestalt an

$$(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2) - (\omega_2\omega_3+\omega_3\omega_1+\omega_1\omega_2) - (\omega_2\omega_3-\omega_1^2)$$

oder

$$(\omega^2 - 2\omega\delta) - \omega\delta - \omega x x_1 = \omega^2 - 3\omega\delta - \omega x x_1 = -\omega x^2 - \omega x x_1 = -\omega x(x+x_1).$$

Demnach folgt:

$$(143)\qquad \omega_i E_i' = (x^2+\delta)S - x(x+x_i)B_i.$$

Also erhält man:

XXXVI. Der durch die Punkte A_1, A_2, A_3, D_2, D_3 bestimmte Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ geht auch durch die Punkte R, S, R_0; C_1', C_2', C_3'; E_1', E_2', E_3' hindurch.*

XXXVII. Punkt E_i' ist der Schnittpunkt der Geraden B_iS mit der durch A_i zu A_kA_l gezogenen Parallele.

49. Wendet man auf die beiden letzten Sätze das zweite Übertragungsprinzip an, so erhält man:

XXXVIII. Der durch die Punkte B_1, B_2, B_3, D_2, D_3 bestimmte Kegelschnitt $\mathfrak{B}$ geht auch durch die Punkte X, O, R_0; C_1, C_2, C_3; E_1, E_2, E_3 hindurch.[2])

1) Vgl. E. Jahnke a. a. O. S. 25, Theorem XVIII, wo der Mittelpunkt dieses Kegelschnitts angegeben wird; es ist der Punkt Q*.

2) Vgl. E. Jahnke a. a. O. S. 24, Theorem XII, wo als Mittelpunkt des Kegelschnitts gemäfs dem ersten Übertragungsprinzip der Punkt Q gefunden ist.

Digitized by Google

XXXIX. Punkt E_i ist der Schnittpunkt der Geraden A_iO mit der durch B_i zu B_kB_l gezogenen Parallele.

Demnach findet man für E_i:

$$(144)\qquad \begin{cases} x_1E_1 = x_1B_1 - (x_2 - x_3)(B_2 - B_3), \\ x_2E_2 = x_2B_2 - (x_3 - x_1)(B_3 - B_1), \\ x_3E_3 = x_3B_3 - (x_1 - x_2)(B_1 - B_2); \end{cases}$$

$$(145)\qquad xx_iE_i = (\omega + \delta)O - (\omega + \omega_i)A_i.$$

Mit Benutzung von (55) erhält man aus (144)

$$(146)\qquad \begin{cases} 2x_1E_1 = z_2H_2 + z_3H_3, \\ 2x_2E_2 = z_1H_3 + z_3H_1, \\ 2x_3E_3 = z_2H_1 + z_1H_2, \end{cases}$$

und hieraus und (144)

$$(147)\qquad \begin{cases} xJ = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3, \\ \quad = x_1H_1 + x_2H_2 + x_3H_3, \\ \quad = z_1B_1 + z_2B_2 + z_3B_3, \\ \quad = (x - 2x_1)B_1 + (x - 2x_2)B_2 + (x - 2x_3)B_3. \end{cases}$$

Aus der letzten Gleichung folgt wegen (41)

$$x \cdot J = 3x \cdot G - 2x \cdot T,$$

oder

$$(148)\qquad J + 2T = 3G.$$

Ebenso ergiebt sich mit Hilfe des zweiten Übertragungsprinzips

$$(149)\qquad J' + 2Y = 3G,$$

wobei

$$(150)\qquad \omega J' = \omega_1E_1' + \omega_2E_2' + \omega_3E_3'$$

ist.

50. Zum Schlufs will ich noch ein drittes Übertragungsprinzip angeben, mittels dessen aus den bisher aufgestellten Formeln und Theoremen zahlreiche neue hervorgehen.

Vergleicht man die Formeln (1) und (119); (2) und (57); die erste Gleichung (3) und (59), so erkennt man, dafs die Punkte X und F, B_i und H_i, D_i und H in einander übergehen, wenn man x_i mit $z_i = x_k + x_l - x_i$ vertauscht, die A_i aber unverändert läfst. Da $z_k - z_l = 2(x_l - x_k)$ und $z_k + z_l = 2x_i$, bleibt bei der Vertauschung von x_i und z_i wegen (29) R unverändert, Q verwandelt sich wegen (118) in $2X$, S wegen (25) und (3) in D_1 und $D_{23} = \frac{1}{2}(D_2 + D_3)$ wegen (3) und (50) in O. Bezeichnet man noch mit $\overline{W}$, $\overline{Z}$, ... diejenigen Punkte, welche

Digitized by Google

aus $W, Z, \ldots$ durch die Vertauschung von x_i mit z_i hervorgehen, so kann man das dritte Übertragungsprinzip schematisch, wie folgt, darstellen:

Drittes Übertragungsprinzip.

$$\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
A_i & B_i & X & D_1 & D_{23} & Q & S & W & Z & O & Y & T & \ldots & R & G \\
\hline
A_i & H_i & F & H & O & 2X & D_1 & \bar{W} & Z & \bar{O} & \bar{Y} & T & \ldots & R & G \\
\hline
x_i & \delta & s & w & z & \omega_i & \omega & & & & & & & & \\
\hline
z_i & \omega+\delta & 4\delta & \delta-3\omega & 2\delta-2\omega & 2(\omega_k+\omega_l) & 4\omega & & & & & & & &
\end{array}\right.$$

Dabei haben die überstrichenen Punkte die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}
\bar{w}\,\bar{W} &= 4\delta D_1 - 3(\omega+\delta)G, \quad \bar{w} = \delta - 3\omega, \\
\bar{z}\,\bar{Z} &= 4\delta D_1 - 2(\omega+\delta)O, \quad \bar{z} = 2\delta - 2\omega, \\
(5\omega+\delta)\bar{O} &= 4\omega R + (\omega+\delta)H, \\
&= -x^2F + 4(\omega+\delta)O, \\
(5\omega+\delta)\bar{N} &= (3\omega-\delta)R + 2(\omega+\delta)H, \\
2\bar{Y} &= 3G - Y, \\
(3\delta-\omega)\bar{T} &= 3(\omega+\delta)G - 4\omega R.
\end{aligned}$$

Charlottenburg, den 15. Dezember 1900.

Digitized by Google

Über die Strahlung der Gase.[1])

Von E. Pringsheim in Berlin.

Einleitung. a) *Das Kirchhoffsche Gesetz.* Der innige Zusammenhang, welcher zwischen der Emission und der Absorption der Strahlung besteht, zeigt sich am deutlichsten bei den Linienspektren der Gase. Bei diesen ist zuerst der schöne Versuch der Umkehrung der Spektrallinien gelungen, welcher für die bis dahin rätselhafte Erscheinung der Fraunhoferschen Linien eine so einfache und fruchtbare Erklärung gab, und welcher mit einem Schlage das Gebiet der Spektralanalyse über die engen Mauern des Laboratoriums hinaus auf die unermeßlichen Räume der Sternenwelt ausdehnte.

Das Bestreben, dieser wichtigen Entdeckung eine theoretische Grundlage zu geben, führte Kirchhoff zu seinem berühmten Gesetze über den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme. Dieses Gesetz ist die Grundlage der gesamten theoretischen Strahlungslehre geworden. Die Strahlung der festen und flüssigen Körper gehorcht dem Kirchhoffschen Gesetze vollkommen — bis auf bestimmte, leicht erkennbare Ausnahmen — und seine Bedeutung auf diesem Gebiete ist immer mehr und mehr hervorgetreten, besonders in der jüngsten Zeit, seitdem es gelungen ist, die Strahlung des „schwarzen Körpers" praktisch herzustellen und so der experimentellen Untersuchung der Strahlungsgesetze eine feste wissenschaftliche Basis zu geben.

Anders auf dem eigentlichen Heimatsgebiete des Kirchhoffschen Satzes, der Spektralanalyse der Gase! Hier ist die Bedeutung dieses Gesetzes immer mehr abgeschwächt worden, und es hat sich ergeben, daß für sehr viele Strahlungsvorgänge die Bedingungen nicht erfüllt sind, unter denen das Kirchhoffsche Gesetz Gültigkeit beansprucht.

Kirchhoff hat seinen Satz auf thermodynamischem Wege abgeleitet, indem er den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie

1) Dieser Aufsatz ist eine kürzere Bearbeitung des Rapports: „Sur l'émission des gaz", welchen ich für den Internationalen Physiker-Kongreß zu Paris 1900 verfaßt habe.

Digitized by Google

auch auf den Wärmeübergang durch Strahlung anwendete. Die Grundbedingung, welche die Strahlung eines Körpers erfüllen mufs, damit der zweite Hauptsatz auf sie anwendbar ist, läfst sich folgendermafsen aussprechen:

Grundbedingung. Die von dem Körper ausgestrahlte Energie mufs vollständig und unmittelbar der ihm innewohnenden Wärme entnommen sein, und die Energie der von dem Körper absorbierten Strahlung mufs sich vollständig und unmittelbar in Wärme umsetzen.

Eine Strahlung welche diesen Bedingungen genügt, wollen wir mit R. von Helmholtz[1]) als reine Temperaturstrahlung bezeichnen. Nur für diese gilt der Kirchhoffsche Satz, durch welchen die Strahlung eines beliebigen Körpers K in eine einfache Beziehung gesetzt wird zur Strahlung eines bestimmten Körpers, des *vollkommen schwarzen* Körpers. Dieser ist ein idealer Körper, dadurch definiert, dafs er „alle Strahlen, die auf ihn fallen, absorbiert, also Strahlung weder reflektiert noch hindurchläfst." Das Kirchhoffsche Gesetz lautet:

$$\frac{E}{A} = e. \tag{1}$$

Hier bedeutet A das Absorptionsvermögen des beliebigen Körpers K, e das Emissionsvermögen des *schwarzen* Körpers für die Wellenlänge λ und die Temperatur T. Demnach ist $Ed\lambda$ resp. $ed\lambda$ die von K, resp. dem schwarzen Körper für die Einheit der Oberfläche in der Zeit 1 ausgesandte Energie derjenigen Strahlung von beliebiger Richtung und Polarisationsebene, deren Wellenlänge zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegt; die Zahl A giebt an, welchen Bruchteil der auf ihn einfallenden Strahlung dieser Art und Richtung der Körper K absorbiert. Das Kirchhoffsche Gesetz sagt also aus, *dafs für alle Körper das Verhältnis zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen für dieselbe Temperatur und Wellenlänge dasselbe ist, und zwar gleich dem Emissionsvermögen des schwarzen Körpers von gleicher Temperatur für dieselbe Wellenlänge.*

b) *Theoretisch mögliche Fälle.* Wenn ein Körper die Grundbedingung der reinen Temperaturstrahlung *nicht* erfüllt, so hat zwar sein Absorptionsvermögen A in jedem Strahlungszustande einen ganz bestimmten, experimentell feststellbaren Wert, aber das Emissionsvermögen E braucht keineswegs gleich Ae zu sein, sondern es kann gröfser oder kleiner sein als dieses Produkt. Auch hier ist es nicht

1) R. v. Helmholtz: Die Licht- und Wärmestrahlung verbrennender Gase. Gekrönte Preisarbeit des Vereins zur Förderung des Gewerbefleifses in Deutschland. S. 29. Berlin. 1890.

Digitized by Google

unmöglich, dafs für eine oder die andere bestimmte Temperatur und Wellenlänge $E = Ae$ wird. Aber dafs diese Gleichung bei einem solchen Körper für ein grofses Temperaturgebiet und für alle von ihm ausgesandten Wellenlängen gelten sollte, ist so unwahrscheinlich, dafs man praktisch mit voller Sicherheit sagen kann:

„Wenn ein Körper dem Kirchhoffschen Gesetz genügt, so ist seine Strahlung eine reine Temperaturstrahlung; wenn ein Körper dem Kirchhoffschen Gesetz nicht genügt, so ist seine Strahlung keine reine Temperaturstrahlung."

Die Frage, ob eine Strahlung reine Temperaturstrahlung ist oder nicht, wäre daher vollständig durch den Versuch zu lösen, wenn es gelänge, die Temperatur des strahlenden Körpers, sowie die Gröfsen E und A genau genug zu messen, um konstatieren zu können, ob für alle in Betracht kommenden Wellenlängen die Gleichung (1) befriedigt ist. Aber dieser Messung stehen sehr grofse Schwierigkeiten entgegen. Nur in wenigen Fällen, wo eine sehr starke Abweichung vom Kirchhoffschen Satze vorhanden ist, ist die experimentelle Aufgabe leichter, und es giebt Leuchtvorgänge, bei denen man nicht nur nachweisen kann, dafs $E > Ae$ ist, sondern sogar, dafs $E > e$ für die betreffende Temperatur ist.

Die Emission e des schwarzen Körpers ist lediglich eine Funktion der Wellenlänge λ und der Temperatur T, ihr Verlauf ist durch die Arbeiten von Lummer und Pringsheim innerhalb weiter Grenzen der Variablen bekannt. Dagegen können die Gröfsen A und E noch von vielen anderen Variablen abhängen. Sie sind im allgemeinen abhängig von dem gesamten physikalischen und chemischen Zustande des strahlenden Körpers, bei Gasen insbesondere vom Druck und der Dichte. Sie können auch von sehr komplizierten Vorgängen abhängen, bei Gasen besonders häufig von chemischen Umsetzungen und elektrischen Entladungen. Aber auch hier kann der Kirchhoffsche Satz erfüllt sein; wenn auch E und A noch so komplizierte Funktionen vieler Variablen sind, kann doch der Quotient $E/A = e$ sein, also eine reine Funktion der Wellenlänge und der Temperatur.

Im allgemeinen sind bei denjenigen Vorgängen, bei denen ein Körper nicht durch blofse Erwärmung, sondern durch andere Erregungen, z. B. chemische oder elektrische, zur Emission veranlafst wird, drei Fälle möglich:

1. Die Vorgänge, welche die Emission veranlassen, dienen nur dazu, die zur Emission nötige hohe Temperatur hervorzubringen, die Bedingungen des Kirchhoffschen Satzes sind erfüllt, E und A sind nur mittelbar von jenen anderen Gröfsen abhängig, indem diese die

Digitized by Google

Temperatur bestimmen, wovon A und E Funktionen sind. Wenn es gelänge, den strahlenden Körper durch bloſse Wärmezufuhr auf die gleiche Temperatur zu bringen, würde er auch die gleiche Emission und Absorption zeigen müssen. Früher hat man wohl ziemlich allgemein angenommen, daſs die Emission der Gase bei chemischer oder elektrischer Erregung auf diese Weise zu Stande kommt.

2. Durch die chemischen oder elektrischen Prozesse wird der Körper in einen anderen Zustand versetzt, in welchem A und E andere Werte annehmen. In diesem Zustande aber emittiert er durch seine Temperatur, wobei diese Temperatur dann auch noch von den chemischen oder elektrischen Einwirkungen beeinfluſst sein kann. E und A würden also Funktionen derjenigen Parameter sein, von welchen der Vorgang der elektrischen Entladung oder der chemischen Umsetzung abhängig ist; aber diese Gröſsen müſsten in E und in A als identische Faktoren vorkommen, so daſs E/A davon unabhängig und eine reine Funktion von λ und T wäre. Durch bloſse Erwärmung könnte in diesem Falle der strahlende Körper nicht bei der gleichen Temperatur in denselben Zustand versetzt werden. Durch einfache Wärmezufuhr erhitzt würde er zwar auch dem Kirchhoffschen Satze gemäſs strahlen, aber sein Emissions- und Absorptionsvermögen würde ein ganz anderes sein, als bei der Erregung durch jene anderen Vorgänge. Bei Gasen mit geringem Absorptionsvermögen könnte der Fall eintreten, daſs die Emission durch bloſse Erwärmung gar nicht nachweisbar wäre.[1])

3. Die chemischen oder elektrischen Vorgänge geben ganz oder teilweise die zur Emission nötige Energie her und werden durch die Absorption beeinfluſst. Hier sind die Bedingungen des Kirchhoffschen Gesetzes nicht erfüllt, und man kann aus dem zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie überhaupt keine Folgerungen ziehen. Hier kann $E > Ae$ sein, wie es z. B. bei den fluoreszierenden Substanzen der Fall ist, welche Kirchhoff deshalb bei der Herleitung seines Satzes ausgeschlossen hat. Aber es könnte auch $E < Ae$ sein, und es wäre ohne Widerspruch mit thermodynamischen Sätzen möglich, daſs solche Körper bei hohen Temperaturen ein starkes Absorptionsvermögen A besitzen, ohne überhaupt Strahlen der betreffenden Wellenlänge zu emittieren.

I. Die verschiedenen Spektra. Die Emission der Gase beschränkt sich, ebenso wie die der festen und flüssigen Körper, nicht auf die sichtbaren Strahlen, sondern sie erstreckt sich auch auf das ultrarote

1) Vgl. Drude: Lehrbuch der Optik. S. 486. Leipzig. 1900.

Digitized by Google

und ultraviolette Gebiet. Während das letztere infolge der bequemen Anwendbarkeit der photographischen Methoden ziemlich genau untersucht ist, besitzen wir nur wenige Arbeiten[1]), welche sich mit den ultraroten Gasspektren beschäftigen. Da die für unsere Frage wichtigsten Untersuchungen sich mit wenigen Ausnahmen auf das sichtbare Spektrum beziehen, so werden wir uns im folgenden größtenteils mit dem von Gasen ausgesandten *Licht* zu beschäftigen haben.

Wir unterscheiden drei Arten von Gasspektren: *kontinuierliche, Banden-* und *Linienspektra.*

Einige Gase und Dämpfe geben beim Erhitzen und beim Verbrennen kontinuierliche Spektra, bei anderen Gasen verbreitern sich die unter Einwirkung elektrischer Entladungen emittierten Spektrallinien mit zunehmendem Druck so stark, daſs sie bei sehr hohen Drucken den Eindruck kontinuierlicher Spektra machen. Endlich ist fast in allen Fällen, in denen Gase intensive Banden- oder Linienspektra liefern, der Zwischenraum zwischen den einzelnen hellen Linien und Banden nicht vollkommen dunkel, sondern diese scheinen einem schwach kontinuierlich leuchtenden Grunde aufgelegt zu sein. Woher diese kontinuierlichen Spektra stammen, ist sehr zweifelhaft; ihre Natur ist noch so wenig aufgeklärt, daſs ein begründetes Urteil über die Art ihrer Entstehung wohl kaum abgegeben werden kann. Eine systematische Untersuchung der kontinuierlichen Gasspektra thäte Not.

Obwohl die Banden- und Linienspektra in ihren Grenzfällen manchmal schwer von einander zu unterscheiden sind, und obwohl es unter Umständen möglich ist, beide Arten von Spektren stetig in einander überzuführen, so muſs man doch annehmen, daſs es sich dabei nicht um bloſs quantitative, sondern um qualitative Unterschiede handelt. Das wird besonders dadurch sehr wahrscheinlich gemacht, daſs die sehr bemerkenswerten Gesetzmäſsigkeiten, welche sich für die Verteilung der Linien in den Spektren der Elemente haben aufstellen lassen, eine ganz andere Form für Linienspektra zeigen als für Bandenspektra.[2])

1) Abney: Phil. Mag. (5) **7,** 316, 1879; Proc. Roy. Soc. **32,** 443, 1881; H. Becquerel: C. R. **97,** 71, 1883; Ann. de Chim. **30,** 45, 1883; C. R. **99,** 374, 1884; B. W. Snow: Wied. Ann. **47,** 208, 1892.

2) Vgl. Mitscherlich: Pogg. Ann. **121,** 459, 1863; Lecoq de Boisbaudran: C. R. **69,** 445, 606 u. 657, 1869; Balmer: Wied. Ann. **25,** 80, 1885; Deslandres: C. R. **103,** 375, 1886; **104,** 972, 1887; Ann. de Chim. (6) **15,** 5, 1888; Rydberg: Zschrf. f. Phys. Chem. **5,** 227, 1890; Kongl. Svenska Vetensk. Akad. Handl. **23,** 1891; Kayser und Runge: Abhdl. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1890, 1891, 1892.

Digitized by Google

Linienspektra kommen nur bei Elementen vor, Bandenspektra sowohl bei diesen als bei chemischen Verbindungen. Man hat vielfach angenommen, dafs bei Elementen, welche sowohl Banden- wie Linienspektra geben, die Bandenspektra bei niedrigerer Temperatur auftreten, die Linienspektra bei bedeutend höherer. Dies wird durch einen schönen Versuch von Monkhöven[1]) widerlegt, welcher in der Kapillare eines Geifslerschen Rohres das Banden- und das Linienspektrum des Stickstoffs *gleichzeitig* hervorrief, indem er mit Hilfe von vier Elektroden zwei Ströme gleichzeitig durch das Gas schickte, einen gewöhnlichen Induktionsstrom und einen zweiten mit eingeschalteter Leydner Flasche. Monkhöven sieht als Ursache des verschiedenen Leuchtens die verschiedene Art der elektrischen Erregung an.

Von vielen Beobachtern wird der Unterschied zwischen Linien- und Bandenspektren darauf zurückgeführt, dafs die letzteren von zusammengesetzten Molekülen, die ersteren von Atomen herrühren. Diese Ansicht scheint durch den von Eder und Valenta[2]) erbrachten Nachweis unhaltbar geworden zu sein, dafs das einatomige Quecksilbergas ebenfalls ein Bandenspektrum besitzt. Jedoch ist es wohl nicht ganz ausgeschlossen, dafs das nur an frisch destilliertem *Hg* beobachtete Bandenspektrum von komplizierteren Molekülen herrührt.

II. Die verschiedenen Arten der Erregung. Jetzt wollen wir die verschiedenen Methoden, durch welche wir Gase zur Emission veranlassen können, im einzelnen untersuchen, die Beziehung der Strahlung zum Kirchhoffschen Gesetze prüfen und uns ein Urteil zu bilden suchen, welcher von den als theoretisch möglich erkannten Fällen der Emission vorliegt.

a) *Fluoreszenz der Gase.* Dafs Gase infolge von Bestrahlung fluoreszieren können, hat Lommel[3]) zuerst für Joddampf nachgewiesen. Sehr bemerkenswert ist die von Wiedemann und Schmidt[4]) gemachte Beobachtung, dafs die für das *Na*-Spektrum in Emission und Absorption so charakteristische *D*-Linie auch bei der Fluoreszenz des *Na* auftritt. Auch die Banden des Fluoreszenzlichtes scheinen für *Na* und *K* nahe mit den Absorptionsbanden zusammenzufallen, wie sie von Roscoe und Schuster[5]) in heifsem *Na*- und *K*-Dampf beobachtet worden sind.

1) J. van Monkhöven: C. R. **95,** 520, 1882.

2) Eder u. Valenta: Wied. Ann. **55,** 479, 1895.

3) E. Lommel: Wied. Ann. **19,** 356, 1883.

4) E. Wiedemann u. G. C. Schmidt: Wied. Ann. **56,** 18, 1895; **57,** 447, 1896.

5) Roscoe u. Schuster: Proc. Roy. Soc. **22,** 362, 1874.

Digitized by Google

In allen diesen Fällen fluoreszierender Gase ist es, wie bei der Fluoreszenz überhaupt, unzweifelhaft, dafs die Bedingungen der Gültigkeit des Kirchhoffschen Satzes nicht erfüllt sind. Denn die Fluoreszenzerscheinungen treten bei Temperaturen auf, bei denen der schwarze Körper überhaupt noch keine sichtbaren Strahlen aussendet, für welche also e praktisch gleich Null gesetzt werden kann. Hier ist also die emittierte Energie sicher nicht der Wärme, sondern einer anderen Energieform entnommen. Die erregende Energie wird in Form von Strahlung zugeführt; aber die absorbierte Strahlung setzt sich wahrscheinlich nicht direkt in emittierte Strahlung um, sondern sie ruft zunächst eine innere Veränderung der fluoreszierenden Substanz hervor, welche vielleicht als chemische Veränderung aufgefafst werden kann und ihrerseits die zur Ausstrahlung des Fluoreszenzlichts nötige Energie hergiebt.

b) Elektrische Erregung. Die am allgemeinsten anwendbare Methode, die Emission der Gase hervorzurufen, besteht in der Anwendung elektrischer Entladungen. Hier sind drei verschiedene Arten der Erregung zu unterscheiden: 1. durch Entladungen in verdünnten Gasen, 2. durch Funken zwischen Metallelektroden oder Salzlösungen, 3. durch den elektrischen Lichtbogen.

1. *Verdünnte Gase.* Stark verdünnte Gase werden im Inneren von Glasröhren zur Emission von Strahlen gebracht, indem man sie zu Trägern elektrischer Entladungen macht. Zu diesem Zwecke werden entweder Metallelektroden in die Röhren eingeschmolzen, welche den Strom zuführen, oder man benutzt als Elektroden auf der Aufsenseite der Röhren angebrachte metallische Umhüllungen. Als Stromquellen können dienen die Influenzmaschine, das Induktorium, eventuell mit eingeschalteten Leydner Flaschen, Hochspannungsbatterien, Hertzsche Wellen oder Teslaströme. Die erzeugten Spektra sind für ein und dasselbe Element oft sehr verschieden und hängen von der Art und Stärke der Erregung ab. Im allgemeinen läfst sich sagen, dafs bei schwächerer Erregung die Bandenspektra, bei stärkerer die Linienspektra entstehen. Bei der vielfach benutzten Form der Geifslerschen Röhre, bei welcher zwei weitere, die Elektroden tragende Rohre durch ein kapillares Zwischenstück verbunden sind, kann man häufig in den weiteren Teilen das Bandenspektrum, im kapillaren Rohr das Linienspektrum beobachten.

Dafs das so erzeugte Bandenspektrum nicht einer reinen Temperaturstrahlung entspricht, sondern von der durch das Gas hindurchgehenden elektrischen Entladung direkt hervorgebracht wird, hat E. Wiedemann[1])

1) E. Wiedemann: Wied. Ann. **6**, 298. 1879.

Digitized by Google

nachgewiesen. Durch kalorimetrische Messungen der im Geifslerschen Rohr erzeugten Wärmemenge konnte er die Temperatur bestimmen, welche das Gas in den einzelnen Teilen des Rohrs haben würde, wenn die der produzierten Wärme entsprechende Energie auch in dem Gase in Form von Wärme enthalten wäre. Dabei fand er, dafs in dem 30 mm weiten Teile des von ihm untersuchten Rohres das Gas schon bei einer Temperatur von weniger als 100° C. leuchtete. Dieses Resultat ist auf andere Weise von Hasselberg[1]) und von Warburg[2]) bestätigt worden. Für den kapillaren Teil des Rohres berechnete Wiedemann aufserordentlich hohe Temperaturen bis zu 87000°. Diese hohen Zahlen entsprechen aber wohl kaum der wirklichen Temperatur des Gases, sondern es ist wahrscheinlich, dafs die bei der kalorimetrischen Messung als Wärme zu Tage tretende Energie in dem Gase grofsen Teils nicht als Wärme, sondern in Form von elektrischer Energie vorhanden ist.

Dafür sprechen auch Versuche von Michelson.[3]) Dieser untersuchte mit Hülfe hoher Interferenzen die Breite der Wasserstofflinien, welche von der Kapillare eines Geifslerschen Rohrs ausgesendet wurden. Wenn das Rohr von aufsen auf 300° erhitzt wurde, so wurde die Interferenzerscheinung wesentlich undeutlicher; es war somit eine erhebliche Verbreiterung der Linien eingetreten. Diese Verbreiterung der Linien mit steigender Temperatur erklärt sich vollständig aus dem Dopplerschen Prinzip, wenn die Steigerung der Molekulargeschwindigkeit durch die Temperaturerhöhung beträchtlich ist. Dies ist der Fall, wenn die Temperatur des strahlenden Gases bei ungeheiztem Rohr etwa 50°, bei geheiztem 300° beträgt, denn hier ist das Verhältnis der Molekulargeschwindigkeiten 0,75. Wären die entsprechenden Temperaturen dagegen etwa 7000° und 7300°, so wäre das Verhältnis der Geschwindigkeiten 0,98 und ein merkbarer Einflufs auf die Breite der Linien wäre ausgeschlossen. Wir müssen daher schliefsen, dafs in Geifslerschen Röhren nicht nur Banden- sondern auch Linienspektra bei Temperaturen auftreten können, welche unterhalb der Glühtemperatur liegen, und *dafs ihr Licht daher nicht durch reine Temperaturstrahlung, sondern durch die elektrischen Entladungen selbst hervorgebracht wird.*

Für die Bandenspektra der Geifslerschen Röhre hat auch Hittorf[4]) die Ansicht ausgesprochen, dafs sie nicht durch die hohe Temperatur

1) B. Hasselberg: Mém. de l'Acad. imp. d. St. Pétersbourg **27**. 1879.
2) E. Warburg: Wied. Ann. **54**, 265. 1895.
3) A. A. Michelson: Astrophys. Journ. **2**, 251, 1896.
4) W. Hittorf: Wied. Ann. **7**, 553, 1879; **19**, 73, 1883.

Digitized by Google

bedingt, sondern als eine von der elektrischen Entladung herrührende „Phosphoreszenz"-Erscheinung zu betrachten sind. Er zeigte, dafs das Gas die Fähigkeit verliert, unter Einwirkung des elektrischen Stromes zu „phosphoreszieren", wenn es auf sehr hohe Temperaturen erhitzt wird. Zu dem gleichen Resultate gelangte neuerdings J. Stark.[1])

Mannigfache Versuche[2]) haben gezeigt, dafs die Spektralerscheinungen für das gleiche verdünnte Gas ganz verschiedene sind, je nach der Art und Stärke der elektrischen Erregung (kontinuierliche oder oscillatorische Entladung, Hertzsche Wellen verschiedener Stärke und Schwingungszahl, Teslaschwingungen verschiedener Periode). Auch hier erscheint es ganz ausgeschlossen, dafs sich alle diese verschiedenen Erscheinungen als Funktion einer einzigen Variable, nämlich der Temperatur, darstellen lassen.

Aufser den elektrischen Kräften können in Geifslerschen Röhren auch noch chemische Umsetzungen bei der Emission mitwirken. Solche chemischen Zersetzungen nehmen Schuster[3]) und Warburg[4]), letzterer selbst in chemisch reinen einatomigen Gasen an.

2. *Funkenentladung.* Schlägt ein elektrischer Funke in einem Gas von gewöhnlichem Druck zwischen Metallelektroden über, so wird nicht blofs das zwischen den Elektroden befindliche Gas zum Leuchten gebracht, sondern es werden auch von den Elektroden Teilchen losgerissen, welche charakteristische Spektra geben. Dabei treten im wesentlichen die Linienspektra der Metalle auf, gleichgültig ob die Elektroden aus Metall bestehen oder aus Metallverbindungen in Lösung. Hier ist der Vorgang ein ziemlich komplizierter, und es liegen keine speziellen Versuche vor, aus denen sichere Schlüsse auf die Natur der Emission zu ziehen wären. Was die nicht den Elektroden entnommenen leuchtenden Gase betrifft, so kann man wohl mit Sicherheit annehmen, dafs der Vorgang des Leuchtens bei ihnen der gleiche ist, wie in den Geifslerschen Röhren. Denn hier wie dort sind sie Träger der Elektrizität, welche sich durch den Raum zwischen den Elektroden ausbreitet.

Die von den Elektroden losgerissenen Teilchen befinden sich, so lange sie leuchten, jedenfalls auch im Gaszustande, da sie Linienspektra

1) J. Stark: Ann. der Physik **1**, 442, 1900.

2) J. Trowbridge u. Th. W. Richards: Phil. Mag. (5) **43**, 77, 135 u. 349, 1897; H. Ebert u. E. Wiedemann: Wied. Ann. **48**, 550, 1893; **49**, 1 u. 32, 1893; **50**, 1 u. 221, 1893; E. Wiedemann u. G. C. Schmidt: Sitzgsbr. phys. med. Soc. Erlangen 1895. 125; Beibl. **20**, 693, 1896; H. Ebert: Wied. Ann **53**, 144, 1894.

3) A. Schuster: Proc. Roy. Soc. **37**, 329, 1884.

4) E. Warburg: Wied. Ann. **31**, 545, 1887; **40**, 1, 1890.

Digitized by Google

zeigen. Bei Metallelektroden handelt es sich also um Teilchen, welche von den Elektroden losgerissen und dabei entweder von der elektrischen Erregung direkt oder durch die von ihr hervorgebrachte grofse Temperaturerhöhung verdampft werden. Bestehen die Elektroden aus Lösungen, so müssen diese entweder direkt durch die Entladung oder indirekt durch die Temperaturerhöhung dissoziiert werden. Man könnte nun annehmen, dafs diese metallischen Gase beim Losreifsen von der Elektrode so heifs werden, dafs sie in Folge ihrer Temperatur leuchten. Aber wenn sie sich einmal in gasförmigem Zustande in dem Raume zwischen den Elektroden befinden, so ist kein Grund einzusehen, warum sie sich anders verhalten sollten als die anderen dort befindlichen Gase. Denn das Losreifsen der Elektrodenteilchen scheint nicht der primäre, sondern ein sekundärer Vorgang des Elektrizitätsüberganges zu sein. Wenigstens kennen wir Funkenentladungen, bei denen das Spektrum der Elektroden nicht auftritt, dagegen keine, bei welchem *blofs das Spektrum der Elektroden*, nicht auch das der zwischen ihnen befindlichen Gase zu beobachten wäre. Wenn das Losreifsen der Teilchen von der Elektrode der primäre Vorgang der Entladung wäre, so müfste man annehmen, dafs diese bei unveränderten Elektroden stets bei annähernd der gleichen Spannung eintreten müfste. In Wirklichkeit aber hängt das Entladungspotential sehr wesentlich von der Natur und der Dichte des zwischen den Elektroden befindlichen Gases ab, so dafs bei nahezu vollkommenem Vakuum die Funkenentladung nur bei überaus hohen Spannungen und auch dann nur unter Anwendung besonderer Vorkehrungen einzuleiten ist.

Bei den schwächeren Formen der Entladung, der sogenannten Glimm- und Büschelentladung dürfte der Vorgang ein ganz analoger sein, wie bei der Funkenentladung.

Aufser der elektrischen Erregung sind bei der Funkenentladung auch noch mechanische und chemische Wirkungen möglich, welche den Emissionsvorgang beeinflussen können. Ångström und Thalén[1]) sprechen sich hierüber folgendermafsen aus:

„Die disruptive Entladung, welche stets dann stattfindet, wenn die elektrische Spannung von hinreichender Gröfse ist, zerstäubt den Körper im Allgemeinen in seine kleinsten Partikelchen, sowie sie ihn auch chemisch zersetzt, wenn er eine Verbindung ist. Die Erscheinung des Glühens, welche beide Vorgänge begleitet, darf nicht als eine Folge der Temperaturerhöhung betrachtet werden; man kann im Gegenteil

1) A. J. Ångström und T. R. Thalén: Acta Soc. Upsal. (3) **9**; Beibl. **1**, 39, 1877.

Digitized by Google

sagen, dafs die hohe Temperatur selbst von dem Einflusse der chemischen oder mechanischen Kraft, welche den Körper zerteilt, herrührt. Aufser der unmittelbar von der disruptiven Entladung hervorgebrachten Zerlegung können auch noch sekundäre chemische Wirkungen eintreten."

3. *Lichtbogen.* Der elektrische Lichtbogen unterscheidet sich von der Funkenentladung nur dadurch, dafs bei ihm die Zufuhr von Elektrizität zu den Elektroden sehr viel reichlicher stattfindet. Daher werden die zwischen den Elektroden befindlichen Gase sehr heifs und in Folge der hohen Temperatur — wahrscheinlich auch in Folge von Veränderungen, die sie durch den Stromdurchgang erfahren — besser leitend, und die Entladung nimmt eine stetige Form an. Hier tritt aufser der primär vorhandenen elektrischen Energie sekundär nicht blofs Wärme auf, sondern es spielen sich auch sehr lebhafte chemische Prozesse ab, welche ebenfalls von grofser Bedeutung für die ausgesandte Strahlung sind. Nur durch solche chemischen Prozesse scheint die Thatsache erklärlich, dafs die Spektrallinien mancher Metalle im Lichtbogen nur dann auftreten, wenn man Spuren anderer Metalle zusetzt.[1])

Dafs bei so komplizierten Vorgängen mit so verschiedenartigen Energieumsetzungen die Strahlung lediglich direkt durch die Wärme erzeugt werden sollte, ist an sich sehr unwahrscheinlich. Jedenfalls sind die im Lichtbogen leuchtenden Gase zum grofsen Teil als Träger der elektrischen Entladung zu betrachten und werden ebenso wie in Geifslerschen Röhren durch die Entladung selbst zum Leuchten gebracht. Daneben mögen noch Emissionen auf Kosten von chemischer Energie vorhanden sein. Auf keinen Fall aber kann man behaupten, dafs die im elektrischen Lichtbogen leuchtenden Gase die Grundbedingung des Kirchhoffschen Satzes erfüllen.

c) *Flammen und erhitzte Gase.* Schon Melloni[2]) hat die Ansicht ausgesprochen, dafs das blaue Licht, welches die Flammen im allgemeinen aussenden, nicht ein Glühen im eigentlichen Sinne ist, also nicht unmittelbar und lediglich aus reiner Temperaturerhöhung entspringt, sondern dafs es eine Folge des chemischen Vorganges ist. Zu derselben Anschauung gelangte Hittorf[3]) bei seinen oben erwähnten Versuchen über die Elektrizitätsleitung der Gase. Nachdem er gefunden hatte, dafs die beobachteten Gase (*N, H, CO*) bis zur Temperatur der Iridiumschmelze keine Lichtentwicklung geben, wenn sie blofs erhitzt

1) Liveing u. Dewar: Proc. Roy. Soc. **30**, 97, 1880; **33**, 428, 1882.
2) Melloni: Pogg. Ann. **75**, 62, 1848.
3) Hittorf: Wied. Ann. **7**, 553. 1879; **19**, 73, 1883.

Digitized by Google

und nicht gleichzeitig in der Verbrennung begriffen sind, zeigte Hittorf auch, dafs das Licht unserer gewöhnlichen Flammen, welche keine festen Teilchen enthalten, nicht durch die Temperatur, sondern durch die chemischen Prozesse bedingt ist. Dieselben Gase senden keine Spur von Licht aus, wenn sie sich in einem von der Flamme umspülten dünnen Platincylinder oder in einer durch Kohlenfeuer weifsglühend gemachten Röhre befinden. Dafs Luft bei hohen Temperaturen, bei denen die festen Körper schon hell glühen, kein Licht aussendet, hatte schon Wedgwood[1]) gezeigt. Von der William Siemensschen Sonnentheorie ausgehend, ist Werner Siemens[2]) zu ähnlichen Versuchen geführt worden wie Hittorf. In einem zur Hartglasfabrikation dienenden grofsen Regenerativofen wurden heifse, nicht im Verbrennungsprozefs begriffene Gase bei der Stahlschmelztemperatur — zwischen 1500 und 2000° C. — beobachtet, und es konnte keine Lichtemission wahrgenommen werden, obgleich die heifse Gasschicht eine Tiefe von 1,5 m besafs. Das Gas bestand aus einem Gemisch O, N, CO_2 und H_2O-Dampf.

Durch diese Versuche ist bewiesen, dafs das blaue Licht, welches die „nichtleuchtende" Leuchtgasflamme aussendet, nicht von der Temperatur der verbrennenden Gase oder der Verbrennungsprodukte herrührt, sondern nur während der chemischen Umsetzung auftritt. Das geht auch aus dem Spektrum dieser Flammen hervor. Swan[3]) hat nachgewiesen, dafs alle Kohlenwasserstoffflammen im wesentlichen das gleiche Spektrum zeigen, welches nach den Untersuchungen von Attfield[4]) und vieler anderer[5]) wohl mit Sicherheit dem Kohlenstoff zuzuschreiben ist. Der freie Kohlenstoff aber kann nur als Zwischenprodukt der chemischen Umsetzung entstehen, und sein Spektrum kann daher bei der blofsen Erwärmung der Gase ohne chemische Umsetzung nicht auftreten.

Dafs der chemische Vorgang in Flammen allein, ohne Rücksicht auf die Temperatur, imstande ist Lichtemission hervorzubringen, habe ich an einer CS_2-Flamme zeigen können.[6]) Durch Verbrennen einer geeigneten Mischung von Luft und CS_2-Dampf kann man eine Flamme herstellen, welche an ihrer heifsesten Stelle, mit einer feinen Thermonadel gemessen, eine Temperatur von weniger als 150° C. zeigt und dabei ein schwaches bläuliches Licht aussendet. Dieses Licht läfst sich

1) Ph. Wedgwood: Phil. Trans. London p. 270, 1792.
2) W. Siemens: Wied. Ann. **18**, 311, 1883.
3) Swan: Trans. Roy. Soc. Edinburgh. **21**, 411, 1857.
4) Attfield: Phil. Trans. London **152**, 221, 1862.
5) Vgl. Kayser: Lehrbuch der Spektralanalyse S. 244 ff., Berlin 1883
6) E. Pringsheim: Wied. Ann. **45**, 437 ff., 1892.

Digitized by Google

gut photographieren, es zeigt ein kontinuierliches Spektrum, dessen Intensität im Blau und Violett sehr viel gröfser ist, als im Rot und Gelb.

W. Siemens hat seine Untersuchungen auch auf die ultrarote Emission erhitzter Gase ausgedehnt. Der über dem kurzen Gascylinder einer gewöhnlichen Gaslampe aufsteigende Strom heifser Verbrennungsgase gab eine so lebhafte Wirkung auf eine Thermosäule, dafs Siemens die Wärmestrahlung erhitzter Gase für erwiesen ansah. Diese war allerdings schon früher in einwandsfreierer Weise nachgewiesen worden. Durch die Versuche von Magnus und Tyndall ist festgestellt worden, dafs eine Anzahl Gase, darunter CO_2, ein beträchtliches Absorptionsvermögen für dunkle Wärmestrahlen besitzen. Der lange Streit zwischen Tyndall und Magnus über die Absorption des Wasserdampfes ist durch die Versuche von Garibaldi[1]), Hoorweg[2]), Haga[3]) und Röntgen[4]) zu Gunsten der von Tyndall verfochtenen Ansicht entschieden worden, dafs auch der Wasserdampf ultrarote Strahlen absorbiert. Tyndall hat ferner für eine Reihe von Dämpfen nachgewiesen, dafs sie im erhitzten Zustande Wärmestrahlen aussenden, und dafs dabei die Emission der Absorption quantitativ entspricht. Somit war bewiesen, dafs es Gase giebt, welche durch blofse Temperaturerhöhung ultrarote Strahlen aussenden, und dafs diese Gase eine der Emission quantitativ entsprechende Absorption besitzen.

Für die von den nichtleuchtenden Kohlenwasserstoffflammen ausgehende ultrarote Strahlung hat Tyndall die Ansicht ausgesprochen und durch Versuche gestützt, dafs sie wesentlich von dem Wasserdampf und der CO_2 herrührt, welche in diesen Flammen gebildet werden. Ebenso schrieb er die dunkle Strahlung der H-Flamme dem darin entstehenden H_2O-Dampf zu. Diese Ansicht wurde durch die Versuche von Julius[5]) bestätigt. Er fand durch spektralbolometrische Untersuchung der Emission verschiedener Flammen, dafs die ausgestrahlte Wärme wesentlich von den Verbrennungsprodukten herrührt, und dafs jedes gasförmige Verbrennungsprodukt sich durch ein charakteristisches Maximum im Emissionsspektrum kenntlich macht. So zeigen alle Kohlenwasserstoffflammen die dem H_2O-Dampf und der CO_2 zugehörigen

1) Garibaldi: Nuovo Cimento. (2), **3**, 231, 1870.

2) Hoorweg: Pogg. Ann. **155**, 385, 1875.

3) Haga: Pogg. Ann. **160**, 31, 1877.

4) Röntgen: Wied. Ann. **23**, 1 u. 259, 1884.

5) H. W. Julius: Arch. Néerl. d. sciences exactes **22**, 310, 1888. Die Licht- und Wärmestrahlung verbrannter Gase. Gekrönte Preisarbeit des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleifses in Deutschland. Berlin 1890.

Digitized by Google

Maxima. Schon Tyndall hatte gefunden, dafs H_2O-Dampf die Strahlung einer H-Flamme, CO_2 die einer CO-Flamme besonders gut absorbiert; und Ångström[1]) hat im Absorptionsspektrum der CO_2 ein dem von Julius entdeckten Emissionsmaximum entsprechendes Absorptionsmaximum nachgewiesen. Nach allen diesen Versuchen konnte kein Zweifel darüber bestehen, dafs das ultrarote Spektrum der Kohlenwasserstoffflammen sich aus den Spektren des H_2O-Dampfes und der CO_2 zusammensetzt, welche in ihnen gebildet werden, und dafs diese Spektren mit denjenigen übereinstimmen, welche diese Gase im erhitzten Zustande aussenden. Dieses Resultat hat Paschen[2]) durch eine genaue Untersuchung über die ultraroten Spektra von H_2O-Dampf, CO_2 und der Bunsenflamme bestätigt, und er hat die Übereinstimmung der analogen Spektra bis in alle der Beobachtung zugänglichen Einzelheiten nachgewiesen. Rubens und Aschkinafs[3]) haben diese Übereinstimmung bis zu sehr viel gröfseren Wellenlängen hin, etwa bis 20 μ, verfolgt. Paschen zieht aus seinen Versuchen den Schluls, dafs in der Bunsenflamme und ebenso wohl in anderen Gasflammen die Emission der Verbrennungsprodukte eine reine Temperaturstrahlung ist. Diese Folgerung steht im Widerspruch zu der Ansicht, zu welcher Julius durch seine Versuche geführt wurde, und zu den Resultaten von R. v. Helmholtz.[4])

Die Bunsenflamme ist ein sehr bequemes Mittel zur Erzeugung von monochromatischen Lichtquellen. Wenn man gewisse Metalldämpfe in ihr zum Verdampfen bringt, so nimmt sie eine charakteristische Färbung an und zeigt im Spektrum die längsten Linien derjenigen Metalle, welche in den eingeführten Salzen enthalten sind. Den Vorgang stellte man sich früher wohl ziemlich allgemein[5]) so vor, dafs die Salzdämpfe in Folge der hohen Temperatur dissoziiert werden, und dafs der frei gewordene Metalldampf die der Flammentemperatur entsprechende Emission zeigt. Diese Vorstellung ist jedoch nicht richtig. Denn bringt man ein solches Metallsalz z. B. Na_2CO_3 in ein beiderseitig mit Glasplatten geschlossenes, mit einem neutralen Gase gefülltes Porzellanrohr und erhitzt dieses in einem Ofen auf sehr hohe Temperaturen, so ist keine Spur der Metalllinie, weder in Emission noch in Absorption zu entdecken. Die Licht-Emission und -Absorption tritt aber

1) K. Ångström: Deutsche Revue **1**, 597, 1892.

2) F. Paschen: Wied. Ann. **50**, 409, 1893; **52**, 209, 1894.

3) H. Rubens u. E. Aschkinafs: Wied. Ann. **64**, 584, 1898.

4) R. v. Helmholtz, l. c.; vgl. a. E. Pringsheim: Wied. Ann. **51**, 441, 1894; F. Paschen: Wied. Ann. **52**, 228 ff., 1894.

5) Vgl. z. B. Kayser: Spektralanalyse S. 19; Mousson: Physik **2**, 558, 1881.

Digitized by Google

sofort ein, wenn man das Porzellanrohr mit einem reduzierenden Gase (*H* oder Leuchtgas) füllt.[1]) Dadurch ist bewiesen, dafs in den Flammen die Lichtemission der in den eingeführten Salzen enthaltenen Metalle nicht durch Verflüchtigung und Dissoziation, sondern durch chemische Reduktion hervorgerufen wird.

Durch diese Erkenntnis ist aber die Frage nach der Natur der Emission selbst noch keineswegs entschieden. Es bleibt noch zweifelhaft, ob der durch Reduktion hervorgebrachte Metalldampf dann, wenn er reduziert ist, in Folge der hohen Temperatur der Flamme durch Temperaturstrahlung emittiert, oder ob sein Leuchten eine Folge des Reduktionsvorganges selbst ist. Wenn es sich um Temperaturstrahlung handelt, so mufs die Lichterscheinung im Porzellanrohr unverändert fortbestehen, wenn man den Reduktionsvorgang plötzlich unterbricht. Denn der vorhandene Metalldampf wird in Folge der hohen Temperatur so lange weiter leuchten, als er sich in der Glühhitze befindet, also so lange, bis er vollständig an die kälteren, aus dem Ofen herausragenden Enden des Rohrs hinüber destilliert ist, ein Vorgang, der nur sehr allmählich von statten geht. Wenn dagegen die Leuchterscheinung durch den chemischen Vorgang selbst bedingt ist, so mufs sie ganz plötzlich verschwinden, wenn der Reduktionsvorgang plötzlich unterbrochen wird. Die plötzliche Unterbrechung der Reduktion wurde bei meinen Versuchen dadurch hervorgebracht, dafs das zu reduzierende Salz sich in einem Nickellöffel befand, welcher mit Hülfe eines Magneten innerhalb des geschlossenen Porzellanrohrs verschiebbar war und nach Belieben in die Glut hinein- oder an das kalte Ende des Rohres herausgezogen werden konnte. Diese Versuche zeigten bei *Na*- und *Li*-Salzen in einer *H*-Atmosphäre, dafs beim Herausziehen der Salze aus der Glut die Erscheinung der Emission und Absorption plötzlich aufhörte. Meine sehr zahlreichen und verschiedenartigen Experimente führten zu dem Resultat, dafs bis zu den der Untersuchung zugänglichen Temperaturen (Nickelschmelze) diese Metalle nur in Folge der chemischen Reaktion, nicht in Folge der Temperatur leuchten und absorbieren. Analoges würde für alle Elemente zu schliefsen sein, welche in Flammen ein Linienspektrum aussenden. Im einzelnen mögen die chemischen Prozesse, welche hier auftreten, noch der Aufklärung bedürfen, aber dafs es sich um chemische Wirkungen handelt, das geht unzweideutig aus dem verschiedenen Verhalten hervor, welches einerseits dieselben Metalle in verschiedenen Gasen, andrerseits verschiedene Metalle in den gleichen Gasen zeigen.[2]) Dafs das im Bunsenbrenner erzeugte *Na*-Licht

1) E. Pringsheim: Wied. Ann. **45**, 428, 1892; **49**, 347, 1893.

2) S. die Zusammenstellung bei Pringsheim: Wied. Ann. **49**, 360, 1893.

Digitized by Google

keine reine Temperaturstrahlung ist, sondern intensiver leuchtet, als es nach dem Kirchhoffschen Gesetze zu erwarten wäre, haben auch E. Wiedemann[1]) und Paschen[2]) ausgesprochen.

Wenn man metallisches *Na*, *Li*, *K* oder *Tl* in einem neutralen Gase erhitzt, so zeigen diese Metalle unter Umständen ein kontinuierliches Emissionsspektrum, manche von ihnen in der Absorption ein kannelliertes Bandenspektrum. Ähnliche Erscheinungen lassen sich bei vielen anderen Elementen, z. B. dem Jod, beobachten. Dabei senden diese Dämpfe ein kontinuierliches Spektrum aus, auch wenn sie in der Absorption ein Bandenspektrum zeigen; nur Konen[3]) scheint auch in der Emission von erhitztem *J* ein Bandenspektrum beobachtet zu haben. Trotzdem ist wohl kaum zu bezweifeln, dafs es sich bei diesen Spektren um reine Temperaturstrahlung handelt. Nicht ganz verständlich ist der Standpunkt von Evershed[4]), welcher die Emission und Absorption von *J*, *Br*, *Cl*, *S*, *Se* und *As* bei Erhitzung untersucht hat. Da alle diese Elemente dabei ein kontinuierliches Spektrum aussenden, auch wenn ihre Absorption selektiv ist, so schliefst Evershed, dafs die Emission eine reine Temperaturstrahlung sei, dafs aber keine so nahe Beziehung zwischen Emission und Absorption vorhanden ist, wie das Kirchhoffsche Gesetz fordert. Dieser Schlufs ist wohl unhaltbar. Wenn es sich um reine Temperaturstrahlung handelt, so mufs das Kirchhoffsche Gesetz erfüllt sein. Aber man darf nicht den durch dieses Gesetz gegebenen Zusammenhang zwischen dem Emissions- und dem Absorptions*vermögen* eines strahlenden Körpers von bestimmter Temperatur mit dem Zusammenhang zwischen dem Emissions- und Absorptions*spektrum* einer Gasmenge verwechseln, die man beobachtet.

Hier hat man es, besonders bei Versuchen in erhitzten Röhren, mit verschieden temperierten Schichten zu thun, welche hinter einander liegen. Im Absorptionsspektrum summieren sich dabei die Absorptionen der verschiedenen Schichten, im Emissionsspektrum werden die Emissionen der entfernteren Schichten durch die Absorption der vorderen, meistens kälteren, geschwächt. Aufserdem ist noch zu beachten, dafs eine etwaige selektive Reflexion der Gase Diskontinuitäten im Absorptionsspektrum hervorbringen könnte, welche sich nach dem Kirchhoffschen Satze im Emissionsspektrum nicht bemerkbar machen würden. Über diesen Punkt sind jedoch keine experimentellen Untersuchungen bekannt, und es mufs dahin gestellt bleiben, ob dieser

1) E. Wiedemann: Wied. Ann. **37**, 215, 1889.
2) F. Paschen: Wied. Ann. **51**, 42, 1894.
3) Konen: Wied. Ann. **65**, 257, 1898.
4) J. Evershed: Phil. Mag. (5) **39**, 460, 1895.

Digitized by Google

theoretisch mögliche Grund der Nichtübereinstimmung zwischen Emissions- und Absorptionsspektrum thatsächlich in Wirksamkeit tritt.

d) Zusammenfassung. Überblicken wir das ganze vorstehend behandelte Material, so kommen wir zu folgendem Resultate:

1. Um *reine Temperaturstrahlung,* wobei also die Bedingungen des Kirchhoffschen Gesetzes voll erfüllt sind, handelt es sich höchst wahrscheinlich bei den *kontinuierlichen und Banden-Spektren* der Gase und Dämpfe, welche solche Spektren *bei Erhitzung* aussenden: H_2O, CO_2 *J, Br, Cl, S, Se, As, Na, K, Li, Tl.*

2. Wenn die *kontinuierlichen und Bandenspektren* dieser und anderer Elemente *in Flammen* erzeugt werden, tritt *Emission infolge chemischer Umsetzung,* daher Abweichung vom Kirchhoffschen Gesetze ein.

3. Bei den *Banden- und Linienspektren,* welche die *fluoreszierenden* Gase und Dämpfe aussenden, sind die Bedingungen des Kirchhoffschen Satzes nicht erfüllt.

4. Dasselbe gilt von denjenigen *Banden- und Linienspektren,* welche durch *elektrische Entladungen* erzeugt werden. Sie verdanken ihren Ursprung nicht der hohen Temperatur, sondern den elektrischen Vorgängen, wobei noch Komplikationen durch chemische Umsetzungen eintreten können.

5. Bei den bisher der Untersuchung zugänglichen Temperaturen sendet kein Gas von selbst ein *Linien*spektrum aus. Dies tritt nur unter der Einwirkung besonderer Erregungen (chemischer, elektrischer etc.) auf.

6. Kontinuierliche und Bandenspektra können die Gase demnach durch bloſse Temperaturerhöhung emittieren. Ob sie auch fähig sind Linienspektra auszusenden, wenn sie zu höheren Temperaturen als den bisher untersuchten erhitzt werden, ist eine Frage, auf welche die experimentelle Antwort fehlt. Wer diese Frage bejaht, muſs sich bewuſst sein, daſs er eine experimentell nicht bewiesene Hypothese einführt.

7. Bei allen Lichtquellen, in denen chemische oder elektrische Vorgänge die Emission begleiten, scheinen Abweichungen vom Kirchhoffschen Gesetze vorhanden zu sein.

Da elektrische, chemische und Fluoreszenz-Erscheinungen auch auf den leuchtenden Weltkörpern höchst wahrscheinlich vorhanden sind, so ist die allgemeine Anwendung des Kirchhoffschen Gesetzes auf astrophysikalische Probleme nicht gestattet.

III. Theoretische Anschauungen. Von einer wirklichen Theorie der spektralen Emission sind wir noch sehr weit entfernt, vielmehr

Digitized by Google

müssen wir uns mit sehr allgemeinen Andeutungen begnügen. Da wir die emittierten Strahlen nach der Undulations- und nach der elektromagnetischen Lichttheorie als Schwingungsbewegungen betrachten, so ist die nächstliegende und wohl auch allgemein gemachte Annahme die, dafs diese Schwingungen durch analoge Schwingungen im strahlenden Körper verursacht werden. Die Perioden der emittierten Schwingungen werden zu denen der emittierenden Teilchen eine gewisse Beziehung haben; die einfachste Annahme wäre die, dafs die Perioden beider identisch sind. Wird diese Anschauung angenommen, so folgt aus dem Prinzip der Resonanz, dafs ein Körper diejenigen Schwingungen, welche er selbst besonders stark auszusenden fähig ist, auch besonders stark absorbiert, es mufs also für jeden Körper in einem gegebenen Zustande einem Maximum der Emission ein solches der Absorption entsprechen.

Obwohl schon Euler[1]) das Prinzip der Resonanz sehr klar und sehr allgemein ausgesprochen hat, so hat er es doch unrichtig angewandt, nämlich auf die Farben der Körper. Erst Ångström[2]) hat die Bedeutung dieses Prinzipes für das Problem der Emission und Absorption richtig erkannt.

Durch das einfache Prinzip der Resonanz erklärt sich also ganz allgemein jene wichtige qualitative Beziehung, welche sich auch als Folge des Kirchhoffschen Gesetzes für die diesem Gesetze gehorchenden Körper herleiten läfst, und es wird erklärlich, dafs sich diese Beziehung auch dort erfüllt zeigt, wo der Kirchhoffsche Satz nicht gilt. So ergab sich ein vollkommener Parallelismus zwischen Absorption und Emission bei meinen Versuchen über die Strahlung von *Na*, *K*, *Li* und *Tl*; ferner haben Liveing und Dewar[3]) nachgewiesen, dafs auch bei der Emission der Gase in Geifslerschen Röhren eine Umkehrung der Spektrallinien stattfindet, und sogar für die Fluoreszenz hat Burke[4]) gezeigt, dafs Uranglas, so lange es sich im fluoreszierenden Zustande befindet, eine starke Absorption derselben Strahlen zeigt, welche es aussendet.

Was ist aber bei den Gasen das schwingende Prinzip, welches das Licht aussendet? Nach den Anschauungen der kinetischen Gastheorie bewegen sich die Molekeln in einer ganz wirren und unregel-

1) L. Euleri nova theoria lucis et colorum. Opuscula varii argumenti, p. 235. Berolini 1746.

2) A. J. Ångström: Pogg. Ann. **94,** 141, 1855; vgl. Stokes: Pogg. Ann. Ergbd. **4,** 325, 1854.

3) Liveing und Dewar: Chem. News. **47,** 122, 1883.

4) J. Burke: Phil. Trans. London. **191,** 87, 1898.

Digitized by Google

mäfsigen Weise, während die Atome wahrscheinlich Schwingungsbewegungen ausführen.[1]) Dies führte dazu, die Emission des Lichts auf Grund der Undulationstheorie den intramolekularen Schwingungen der Atome zuzuschreiben. Dabei tritt aber eine grofse Schwierigkeit auf. Bei den einatomigen Gasen können keine intramolekularen Schwingungen vorkommen, und trotzdem senden auch diese Gase, z. B. *Hg*, ein sehr linienreiches Spektrum aus. Wenn wir daher die Atome als Träger der Lichtemission betrachten wollen, so dürfen wir sie nicht als homogene, starre, nahezu punktförmige Gebilde voraussetzen, wie es die kinetische Gastheorie thut; sondern wir müssen ihnen eine sehr viel kompliziertere Beschaffenheit zuschreiben. Im allgemeinsten Falle kann man annehmen, dafs ein Atom aus einem Aggregat von beliebig vielen hypothetischen Elementaratomen und mit ihnen verbundenen Ätheratomen besteht.[2]) Wir verlassen dann allerdings die einfachen Annahmen der kinetischen Gastheorie, deren Stärke gerade in der Einfachheit ihrer Annahmen besteht, um dafür sehr komplizierte und sehr hypothetische Anschauungen zu substituieren. Wenn wir das aber thun, so haben wir in den verschiedenen hypothetischen Bestandteilen der Atome eine solche Mannigfaltigkeit schwingender Systeme zur Verfügung, dafs ihre Grund- und Oberschwingungen sowie deren Kombinationsschwingungen mehr als ausreichen, um die Möglichkeit der Emission noch so komplizierter Spektra begreiflich zu machen. Über die Verteilung der verschiedenen Arten der Spektra unter die theoretisch denkbaren Atomschwingungen sind nur ganz willkürliche Annahmen möglich.

Wie wir in der kinetischen Gastheorie annehmen, dafs im stationären Zustande das Verhältnis zwischen der Energie der fortschreitenden und der der intramolekularen Bewegung für jedes Gas bei jeder Temperatur ein ganz bestimmtes ist, so können wir auch hier die Energieverteilung unter die verschiedenen Arten der Leuchtbewegung eines jeden Gases im stationären Zustand als durch die Temperatur gegeben ansehen. Daher würde im stationären Zustande reine Temperaturstrahlung herrschen. Sobald aber Fluoreszenz oder elektrische

1) Vgl. Maxwell: Theory of heat, London 1877, p. 326.

2) Vgl. Boltzmann: Wiener Ber. (2) **74**, p. 553, 1876; E. Wiedemann: Wied. Ann. **5**, 500, 1878 und **37**, 177, 1889; A. Wüllner: Wied. Ann. **34**, 658, 1888; Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. **2**, 419 f. Leipzig. 1899; H. Kayser in Winkelmanns Handbuch der Physik, **2**, 1, p. 419 ff. Breslau 1894 spricht von einer variablen Anzahl von Atomen, welche je nach Druck und Temperatur im Molekül enthalten sein sollen. Wenn unter „Atomen" die chemischen Atome gemeint sind, so kann eine solche Anschauung die Spektra einatomiger Gase wohl kaum erklären.

Digitized by Google

oder chemische Erregungen eintreten, ist der stationäre Zustand gestört. Die eine oder die andere mögliche Schwingungsform der intramolekularen Bestandteile kann durch die elektrische oder chemische Energie direkt stark vermehrt werden und so zu Emissionen Veranlassung geben, welche der Mitteltemperatur des Gases nicht entsprechen. Das würde derjenige Vorgang sein, welchen E. Wiedemann als *Lumineszenz*, R. v. Helmholtz als *irreguläre Strahlung* bezeichnet. Wüllner scheint anzunehmen, dafs auch chemische und elektrische Kräfte nur auf die Moleküle als Ganzes wirken können, dafs sie aber nicht auf alle Moleküle gleichmäfsig wirken, sondern nur einzelnen von ihnen eine stark vermehrte Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung erteilen. Diese sollen bei den Zusammenstöfsen in anderen Molekülen die lichtaussendenden Schwingungen erregen und so Lichtemission verursachen, welche der mittleren Temperatur des Gases nicht entspricht. Im Erfolg käme diese Anschauung auf dasselbe hinaus wie die oben angedeutete, welche mir plausibler erscheint. Wenn aber Wüllner sagt[1]): „Den lichtaussendenden Molekülen mufs man aber nach der jetzigen Auffassung der Temperatur die Glühtemperatur zuschreiben. Die Temperatur der Gasmasse ist eine niedrige, weil es nur eine kleine Anzahl von Molekülen ist, welche die Glühtemperatur besitzen", so scheint mir in diesen Worten eine andere Definition der Temperatur zu liegen, als sie allgemein angenommen wird. Die augenblickliche Temperatur einzelner Moleküle ist weder experimentell bestimmbar, noch nach der kinetischen Gastheorie definiert.

Aus der oben angedeuteten Anschauung über die Entstehung der Gasspektra ist es verständlich, dafs die gleiche Emission, wie sie unter Einwirkung chemischer oder elektrischer Erregungen auftritt, bei bedeutend gesteigerter Temperatur auch als reine Temperaturstrahlung entstehen kann. Aber es folgt daraus nicht, dafs alle unter Einwirkung jener Kräfte auftretenden Leuchtbewegungen, in gleicher Weise auch als reine Temperaturstrahlung zu Stande kommen müssen. Denn möglicherweise können die chemischen und elektrischen Kräfte Veränderungen in der Anordnung der Atom-Bestandteile hervorbringen, welche durch keine noch so grofse Temperaturerhöhung verursacht werden können. Aber selbst bei unveränderter Atombeschaffenheit ist es sehr wohl denkbar, dafs z. B. die besondere Art der Bewegung, welche zur Emission der Linienspektra führt, durch die blofsen Zusammenstöfse infolge der Wärmebewegung gar nicht ausgelöst werden kann.

Dies wird noch deutlicher, wenn man sich auf den Standpunkt der elektromagnetischen Lichttheorie stellt. Hier müssen wir die licht-

1) Wüllner: Experimentalphysik p. 404, 1899.

Digitized by Google

erregenden Schwingungen der Moleküle und Atome auf elektrische Ursachen zurückführen, indem wir annehmen, dafs elektrische Ladungen entweder selbständige oder an materielle Teilchen gebundene Schwingungsbewegungen ausführen. Hier wäre es sehr möglich, anzunehmen, dafs diejenigen als besonders frei zu betrachtenden Schwingungen, welche den Linienspektren entsprechen, nicht durch mechanische Stöfse, sondern nur durch elektrische Kräfte hervorgebracht werden können.

Die Zurückführung der Lichtemission auf elektrische Bewegungen in den Atomen ist von mehreren Seiten versucht worden.[1]) Diese Theorien können ebenso wie die rein mechanischen nur allgemeine Andeutungen über den Vorgang der Emission geben, zu einer Erklärung der Erscheinungen im einzelnen oder gar zu quantitativen Resultaten sind sie noch nicht vorgedrungen.

Leichter ist es für die Theorie, bestimmte Resultate zu erhalten, wenn sie die Lichtemission als gegeben annimmt und nur die Veränderungen betrachtet, welche die Emission durch bestimmte äufsere Einwirkungen erleidet. Die Versuche, die Verbreiterung der Spektrallinien theoretisch zu erklären, sind allerdings noch nicht zu einem allgemein anerkannten Resultate geführt worden, was schon deshalb nicht wunderbar ist, weil die Bedingungen dieser Erscheinung experimentell noch nicht vollständig bekannt sind. Dagegen hat die Theorie das Zeemansche Phänomen wenigstens in einigen Fällen bis ins einzelne verfolgen können.

Betrachten wir unsere gesamte Kenntnis von der Natur der Gasemission, so müssen wir eingestehen, dafs wir trotz der ungeheuer grofsen Anzahl von experimentellen und theoretischen Arbeiten die sich mit diesem Gegenstande beschäftigen, in das Wesen der Erscheinungen noch sehr wenig eingedrungen sind. Vielleicht werden die Grundlagen, von denen die Theorie der Lichtemission auszugehen hat, durch die neueren Fortschritte in der Erkenntnis der elektrischen Entladungen in verdünnten Gasen wesentlich gefestigt werden. Das Studium der Kathoden- und der Kanalstrahlen hat neuerdings zu der Annahme geführt, dafs elektrisch geladene Teilchen existieren, deren Masse sehr klein ist gegen die der chemischen Atome. Sollten diese kleinsten Teilchen und ihre Ladungen vielleicht mit jenen hypothetischen Trägern der Leuchtbewegung in den Atomen identisch sein?

1) Vgl. Kolàček: Wied. Ann. **32**, 224, 1887; F. Richarz: Sitzgsbr. d. Niederrhein. Ges. Bonn **48**, 18, 1891; Sitzgsbr. d. K. Akad. d. Wiss. München **24**, 1894; H. Ebert: Wied. Ann. **48**, 1, 1893; **49**, 651, 1893.

Digitized by Google

Sur quelques nouveaux théorèmes relatifs au triangle;

(suite à un article de M. F. Caspary).

Par M. L. RIPERT à Paris.

1. — M. F. Caspary a publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (fév. 1900, p. 79) un article *sur quelques nouveaux théorèmes relatifs au triangle*, dont l'objet est de montrer que les principales propriétés récentes du triangle qui, comme l'on sait, dérivent du point de Lemoine K, existent encore lorsque l'on substitue à K un point X arbitrairement choisi dans le plan.[1])

Cet article offre un intérêt considérable; il présente sous une forme concise un grand nombre de résultats relatifs à la Géométrie du triangle; ainsi que M. Caspary l'a indiqué, il peut être notablement développé, de manière à embrasser les éléments les plus importants de cette Géométrie nouvelle, et épargner ainsi de laborieuses recherches.

Ce qui suit est un complément et un commentaire de l'étude de M. Caspary qui résultent de la correspondance échangée avec ce géomètre à la suite d'études communes.

Pour plus de clarté, je reproduirai *en italiques* et sous les mêmes numéros l'article des *Nouvelles Annales;* celles des propriétés ajoutées qui pourront paraître nouvelles appartiennent, d'après ce qui vient d'être dit, au moins autant à M. Caspary qu'à l'auteur du présent article.

2. — Soit $A_1A_2A_3$ un triangle, X un point absolument quelconque de son plan et X^1, X^2, X^3 les points où les droites A_1X, A_2X, A_3X coupent les côtés. Soient, de plus, B_3^1 et B_3^1 les points où les paral-

1) Voir dans le même ordre d'idées: — E. Lemoine: Propriétés relatives à deux points ω et ω' du plan d'un triangle ABC qui se déduisent d'un point K quelconque du plan comme les points de Brocard se déduisent du point de Lemoine (*AFAS*, Grenoble, 1885). — L. Ripert: La dualité et l'homographie dans le triangle et le tétraèdre (Gauthier-Villars, 1898) et divers articles des N. A. (1898 et 1899). — E. Jahnke: Über dreifach perspektivische Dreiecke in der Dreiecksgeometrie (Berlin, 1900). — Consulter enfin le travail en cours de publication de M. Caspary: Zur neueren Dreiecksgeometrie.

Digitized by Google

lèles menées par X^3 et X^2 respectivement aux côtés A_3A_1 et A_1A_2 coupent A_2A_3; et de même, les points B_3^2 et B_1^3; B_1^2 et B_2^3 obtenus par permutation cyclique. Soient enfin B_1', B_2', B_3' les points situés respectivement sur A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 et construits de façon que les segments A_3B_1', A_1B_2', A_2B_3' soient égaux respectivement aux segments X^1A_2, X^2A_3, X^3A_1 (en d'autres termes, B_1', B_2', B_3' sont les *isotomiques* des points X^1, X^2, X^3).

Alors on a les théorèmes suivants:

I. *Les droites* A_1B_1', A_2B_2', A_3B_3' *concourent au point* B_i $(i = 1, 2, 3)$.

II. *Les droites* B_iX *sont parallèles aux côtés* A_kA_l $(i, k, l = 1, 2, 3;$ $2, 3, 1;$ $3, 1, 2)$.

En d'autres termes, les parallèles menées par les points B_i aux côtés A_kA_l concourent au point X, propriété que nous rapprochons immédiatement de la suivante (Caspary, n° **17**): *Les parallèles menées par les points* A_i *aux côtés* B_kB_l *concourent au point* R.[1])

III. *Les deux triangles* $A_1A_2A_3$ *et* $B_1B_2B_3$ *ont le même centre de gravité* G.

IV. *Les droites* A_iG *passent par les milieux des segments* B_iX. — Et comparativement (Caspary, n° **18**): *Les droites* B_iG *passent par les milieux des segments* A_iR.

Remarque. — Par suite des propriétés II. et IV., pour construire le triangle $B_1B_2B_3$[2]), on détermine le centre de gravité G de $A_1A_2A_3$, on prend les points B_i' d'intersection des médianes A_iG avec les parallèles menées par X aux côtés A_kA_l, et l'on porte enfin, sur ces parallèles, une longueur $B_i'B_i = XB_i'$. En termes plus simples encore, on construit les trois *semi-réciproques* du point X.

IV^a. *Si l'on désigne par* A_{kl} et B_{kl} *les milieux respectifs des côtés* A_kA_l et B_kB_l, *les droites* $A_{kl}B_{kl}$ *concourent au point* D_{23}.[3])

IV^b. *Les droites* B_iA_{kl} *concourent au point* O. — Et comparativement: *Les droites* A_iB_{kl} *concourent au point* S.

IV^c. *Si l'on désigne par* H_i *les points anticomplémentaires des points* B_i, *les droites* A_iH_i *concourent au point* H *anticomplémentaire de* O.[4]) — Et comparativement: *Si l'on désigne par* H_i' *les points anticomplémen-*

1) X étant (ou faisant fonctions de) *point de* Lemoine, R est (ou fait fonctions de) *point de* Steiner de $A_1A_2A_3$; c'est le second point fondamental de cette étude. [Nota: Les mots entre parenthèses seront dorénavant sous-entendus dans les dénominations rappelées].

2) $B_1B_2B_3$ est le *premier triangle de* Brocard (second triangle fondamental)

3) D_{23} est le *milieu de la droite* D_2D_3 *de* Brocard.

4) Les droites A_iH_i sont les *hauteurs* et H l'*orthocentre* de $A_1A_2A_3$.

Digitized by Google

taires des points A_i, les droites B_iH_i' concourent au point H' anticomplémentaire de S.

IV^d. *Les parallèles menées par les milieux B_{kl} des côtés B_kB_l aux côtés A_kA_l concourent au point Q, complémentaire de X* (Caspary, n° **16**). — Et comparativement: *Les parallèles menées par les milieux A_{kl} des côtés A_kA_l aux côtés B_kB_l concourent au point Q', complémentaire de R.*

IVe. *La conique circonscite au triangle $A_1A_2A_3$ et inscrite à son triangle anticomplémentaire $H_1'H_2'H_3'$ est une ellipse ayant son centre en G et qui passe par le point R, ses deux isobariques et ses trois semi-réciproques*[1]. — Et comparativement: *La conique circonscrite au triangle $B_1B_2B_3$ et inscrite à son triangle anticomplémentaire $H_1H_2H_3$ est une ellipse ayant son centre en G et qui passe par le point X, ses deux isobariques et ses trois semi-réciproques (ces derniers étant les points B_i).*[2]

Remarque. — On peut apercevoir, dans ce qui précède, les premiers éléments d'une correspondance importante (Zweites Übertragungsprinzip de M. Caspary), dont la base est l'*échange* de A_i avec B_i, de X avec R, de O avec S, de H avec H', etc., et qui sera développée plus loin. — Définissons maintenant la généralisation de quelques-uns des cercles remarquables du plan du triangle $A_1A_2A_3$.

Conique O (cercle circonscrit). — La conique circonscrite à $A_1A_2A_3$ et dont le centre est O (IV^b), passe par R et est telle que le triangle $A_1A_2A_3$ et le triangle circonscrit (dont les sommets sont les pôles des côtés A_kA_l) ont pour centre d'homologie le point X (de Lemoine) et pour axe d'homologie la polaire x de X (*droite de* Lemoine).

*Conique O_E (cercle d'*Euler *ou des neuf points).* — La conique circonscrite au triangle $A_{23}A_{31}A_{12}$ et ayant pour centre le milieu O_E du segment OH est homothétique à la conique O; les deux centres d'homothétie sont H et G; le rapport d'homothétie est $\frac{1}{2}$. Cette conique passe par les points de rencontre des droites A_iH et A_kA_l, par les milieux des segments A_iH, par le point Q' (IV^d), etc.

Conique O_C (cercle conjugué). — La conique homothétique à O, ayant H pour centre et passant par les points communs aux coniques O et O_E est conjuguée au triangle $A_1A_2A_3$.

---

1) *Ellipse de* Steiner de $A_1A_2A_3$.

2) *Ellipse de* Steiner de $B_1B_2B_3$. On sait qu'au point X dont les coordonnées *barycentriques* sont α_1, α_2, α_3 correspondent les deux *isobariques* (α_2, α_1, α_3 et α_3, α_2, α_1) et les trois semi-réciproques (α_1, α_3, α_2; α_2, α_3, α_1; α_3, α_1, α_2); je suppose d'ailleurs le lecteur au courant de la terminologie habituelle du triangle et des constructions élémentaires.

Digitized by Google

Conique O_{GH} (cercle orthocentroïdal). — La conique homothétique à O décrite sur GH comme diamètre passe par les points communs aux coniques O, O_F, O_ι. En d'autres termes, les quatre coniques O O_F, O_C, O_{GH} ont même axe radical.

*Coniques A_i (cercles d'*Apollonius). — Les trois coniques homothétiques à O, ayant pour centres les points x_i d'intersection de la droite x (de Lemoine) et des côtés A_kA_l, et passant respectivement par les sommets A_i, ont deux à deux même axe radical qui est la droite XO (*diamètre de* Brocard).

Coniques I et I_i (cercles inscrit et ex-inscrits). — Si l'on désigne par a_i et a_i' les points (réels ou imaginaires) d'intersection de la conique A_i et du côté A_kA_l, les droites A_ia_i et A_ia_i' sont conjuguées par rapport à la conique O. Les six droites A_ia_i et A_ia_i' se coupent trois à trois en quatre points I et I_i (réels ou imaginaires). Les coniques ayant ces points pour centres et touchant les trois côtés A_kA_l sont homothétiques à la conique O et tangentes à la conique O_E (aux *points de* Feuerbach).

Remarque. — On peut généraliser de même la notion d'autres cercles remarquables (cercles de Lemoine, de Longchamps, de Neuberg, de Mackay, de Taylor, etc.). On trouve, dans les *Notes de Bibliographie des Courbes géométriques* de M. Brocard des propriétés se prêtant à cette généralisation.

Je vais maintenant définir les deux coniques les plus importantes au point de vue de cette étude, savoir: la conique O_B (faisant fonctions de *cercle de* Brocard; Caspary, n° **19**) et la conique Ω_A (Caspary, n° **20**).[1]) Ces deux coniques, par la possibilité d'échange des divers éléments qui s'y rattachent, donnent la clef de la correspondance ci-dessus indiquée, pour laquelle j'emploierai dorénavant l'abréviation (Γ); je désignerai en outre les triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, ... par la notation abrégée A, B, ...

Conique O_B (cercle de Brocard).

La conique O_B est celle qui est circonscrite au triangle B et a pour centre le milieu O_B du segment XO; elle passe par les points X et O; le diamètre XO (*diamètre de* Brocard) passe par D_{23}. La

(Γ): *Conique Ω_A.*

La conique Ω_A est celle qui est circonscrite au triangle A et a pour centre le milieu Ω_A du segment RS'; elle passe par les points R et S; le diamètre RS (diamètre de Ω_A) passe par D_{23}. La corde

1) J'avais signalé cette conique Ω_A dans ma brochure de 1898 (La dualité, etc.; p. 14); elle a été rencontrée également par M. Jahnke (Über dreifach etc., p. 25).

Digitized by Google

corde conjuguée de XO menée par D_{23} coupe la conique aux points D_2 et D_3 [brocardiens (*points de* Brocard) de X]. La corde D_2D_3 a pour pôle un point W (voir n° 8).

La conique O_B est homothétique à la conique O, circonscrite à A et ayant pour centre O.

conjuguée de RS' menée par S coupe la conique aux mêmes points D_3 et D_2.[1]) — La corde D_3D_2 a pour pôle un point Z (voir n° 8).

J'appellerai *conique* S la conique homothétique à Ω_A, circonscrite à B; elle a pour centre S.

V. *Le point d'intersection C_i des droites A_iX et B_iG est situé sur la droite qui passe par B_i et le milieu du segment B_kB_l*[2]) *et sur la conique O_B.*

En d'autres termes, le triangle C (second triangle de Brocard) est homologique à A avec centre X et à B avec centre G — (Γ): Le point d'intersection C_i' des droites B_iR et A_iG est situé sur la conique Ω_A; le triangle C' (*second triangle de* Ω_A) est donc homologique à B avec centre R et à A avec centre G.

V[a]. La polaire de G par rapport à la conique O_B coupe la conique O au point R et en un second point R_0 situé sur la droite GO_B[3]); le second point d'intersection de GO_B et de la conique O est le point N diamétralement opposé à R (*point de Tarry*). — (Γ): La polaire de G par rapport à la conique Ω_A coupe la conique S au point X et en un second point X_0 situé sur la droite $G\Omega_A$; le second point d'intersection de $G\Omega_A$ et de la conique S est le point N', diamétralement opposé (dans cette conique) au point X.

VI. *Les triangles A et B sont triplement homologiques, de façon que les droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 concourent au point D_1 (réciproque de X par rapport au triangle A); les droites A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 au point D_2 et les droites A_1B_3, A_2B_1, A_3B_2 au point D_3. — (Γ):* Les triangles B et A sont triplement homologiques, de façon que les droites B_1A_1, B_2A_2, B_3A_3 concourent au point D_1 (réciproque de R par rapport au triangle B); les droites B_1A_2, B_2A_3, B_3A_1 au point D_3 et les droites B_1A_3, B_2A_1, B_3A_2 au point D_2.

VI[a]. Les triangles A et D sont triplement homologiques, de façon que les droites A_1D_1, A_2D_3, A_3D_2, concourent au point B_1; les droites

1) On verra plus loin pourquoi D_2 s'échange avec D_3, et D_3 avec D_2.

2) Cette partie de la propriété pourrait être supprimée comme évidente, les droites B_iG étant les médianes de $B_1B_2B_3$ (n° 3).

3) La droite importante RR_0 est l'axe d'homologie des triangles B et C, comme la droite XX_0 est celui des triangles A et C'; mais, pour abréger, je supprime systématiquement la considération des axes d'homologie, bien qu'elle conduise à un grand nombre de propriétés.

Digitized by Google

A_1D_2, A_2D_1, A_3D_3 au point B_3 et les droites A_1D_3, A_2D_2, A_3D_1 au point B_3. — (Γ): Les triangles B et D sont triplement homologiques, de façon que les droites B_1D_1, B_2D_2, B_3D_3 concourent au point A_i; les droites B_1D_3, B_2D_1, B_3D_2 au point A_2 et les droites B_1D_2, B_2D_3, B_3D_1 au point A_3.

Remarques. — Des correspondances (Γ) dans les propriétés VI et VI[a] résulte nettement l'échange de D_1 avec D_1, D_2 avec D_3, D_3 avec D_2.

Les triangles A, B, D sont tels que deux quelconques sont trihomologiques, les trois centres étant les sommets du troisième triangle. De tels triangles sont dits *complémentaires du type brocardien* (E. Jahnke, loc. cit.).

VI[b]. Le point D_1 est l'intersection des droites GD_{23} et RON. — (Γ): Il est l'intersection des droites GD_{23} et XSN' (V[a]).

VI[c]. Si l'on désigne par E_i les points d'intersection des droites A_iO avec les parallèles menées par les sommets B_i aux côtés B_kB_l, les droites B_iC_i, B_kE_k, B_lE_l concourent aux points H_i (IV[e]). — (Γ): Si l'on désigne par E_i' les points d'intersection des droites BS avec les parallèles menées par les sommets A_i aux côtés A_kA_l, les droites A_iC_i', A_kE_k', A_lE_l' concourent aux points H_i' (IV[c]).

VI[d]. Les points E_i sont situés sur la conique O_B. Les triangles C et E, inscrits à O_B, sont homologiques, le centre étant sur la droite GO_BN. — (Γ): Les points E_i' sont situés sur la conique Ω_A. Les triangles C' et E', inscrits à Ω_A, sont homologiques, le centre étant sur la droite $G\Omega_AN'$.

VII. *Le centre de gravité du triangle D est le point G, centre de gravité des triangles A et B.*

VIII. *Si l'on désigne par W_i les points d'intersection des droites A_kD_2 et A_lD_3, les droites A_iW_i concourent au point W, pôle de D_2D_3 par rapport à O_B. — (Γ): Les droites B_kD_3 et B_lD_2 concourent aux mêmes points W_i, et les droites B_iW_i concourent au point Z, pôle de D_3D_2 par rapport à Ω_A.*

VIII[a]. Le point Z est sur les droites GOH, $D_{23}SR$ et D_1W. — (Γ): Le point W est sur les droites GSH', $D_{23}OX$ et D_1Z.

IX. *La droite WX passe par le milieu D_{23} du segment D_2D_3;* par suite, les points W, X, D_{23}, O_B, O sont en ligne droite (diamètre de O_B). — (Γ): Les points Z, R, D_{23}, Ω_A, S sont en ligne droite (diamètre de Ω_A).

IX[a]. Si l'on désigne par U_i les points d'intersection des droites C_iW_i avec les côtés A_kA_l, les trois points U_i sont sur une droite u

Digitized by Google

passant par W.[1]) — (Γ): Si l'on désigne par U_i les points d'intersection des droites $C_i'W_i$ avec les côtés B_iB_i, les trois points U_i sont sur une droite u' passant par u.

IX^b. Si l'on désigne par X_B et X_C les centres d'homologie respectifs des triangles B et C et de leurs triangles circonscrits (par rapport à la conique O_B), ces points sont sur la droite GR. Le point X_B (*point de* Lemoine *du triangle* B) est en outre sur la droite D_1WZ et le point X_C (*point de* Lemoine *du triangle* C) sur le diamètre XO (de Brocard). Le point X_C est le pôle (par rapport à O_B) de la droite x. Il en résulte que les triangles A et C ont même *droite de* Lemoine. — (Γ): Si l'on désigne par R_A et $R_{C'}$ les centres d'homologie respectifs des triangles A et C' et de leurs triangles circonscrits (par rapport à Ω_A), ces points sont sur la droite GX, le point R_A étant en outre sur la droite D_1ZW et le point $R_{C'}$ sur le diamètre RS (de Ω_A).

X. *Si l'on désigne par L_i les points d'intersection des droites B_kC_l et B_lC_k et par X_i les points d'intersection des droites A_kL_k et A_lL_l, ces points X_i sont les trois points associés de X* (par rapport au triangle A). — (Γ): Si l'on désigne par L_i' les points d'intersection des droites A_iC_i' et A_lC_k' et par R_i les points d'intersection des droites B_iL_i' et B_lL_l', ces points R_i sont les trois points associés de R (par rapport au triangle B).

X^a. Les trois points L_i sont sur la droite RR_0 (V^a). — (Γ): Les trois points L_i' sont sur la droite XX_0 (V^a).

XI. *Les droites B_iX_i passent par les points A_{kl};* par suite (IV^b), les points B_i, A_{kl}, O, X_i sont collinéaires. — (Γ): Les points A, B_{kl}, S, R_i sont collinéaires.

XII. *Si l'on désigne par F_i les points d'intersection des droites A_kC_l et A_lC_k, les droites F_iG sont parallèles aux droites B_iX et aux côtés A_kA_l.* — (Γ): Si l'on désigne par F_i' les points d'intersection des droites B_kC_l' et B_lC_k', les droites $F_i'G$ sont parallèles aux droites A_iR et aux côtés B_kB_l.

XIII. *Les droites A_iF_i concourent au point F* (anticomplémentaire de X). — (Γ): Les droites B_iF_i' concourent au point F' (anticomplémentaire de R).

XIV. *Les droites C_iF_i concourent au point Q* (complémentaire de X). — (Γ): Les droites $C_i'F_i'$ concourent au point Q' (complémentaire de R).

1) Les coordonnées barycentriques de X étant $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, W est son deuxième potentiel $(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2)$. La droite u passe aussi par le troisième potentiel $(\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3)$. Pour énoncer la propriété correspondante (Γ) de la droite u', il faudrait donner quelques définitions préliminaires que le lecteur trouvera aisément.

Digitized by Google

XV. *Les points X, G, F, Q sont situés sur la même droite et de telle façon que le point Q est le milieu du segment FX et le segment* $XG = \frac{1}{2}GF = 2GQ$. — Il en est de même (Γ) pour les points *R, G, F', Q'*, et l'on peut observer que ces relations sont celles qui, par définition, existent entre tout point du plan, son complémentaire et son anticomplémentaire.

XVI.—XX. — *Pour mémoire: les propriétés énoncées par* M. Caspary *sous ces numéros ont été reproduites ci-dessus* (n°s II, IV, IV^{d}, *coniques* O_B *et* Ω_A).

XX^{a}. La conique circonscrite au triangle *A* et passant par *G* et *H* est une hyperbole ayant son centre au point *Q'*; elle est conjuguée au triangle $A_{23}A_{31}A_{12}$, complémentaire de *A*, et ses asymptotes sont conjuguées par rapport à la conique *O*; elle passe en outre par les points D_1, *N*, *S*, etc. (*hyperbole de* Kiepert de $A_1A_2A_3$). — (Γ): La conique circonscrite au triangle *B* et passant par *G* et *H'* (n° IVe) est une hyperbole ayant son centre au point *Q*; elle est conjuguée au triangle $B_{23}B_{31}B_{12}$, complémentaire de *B*, et ses asymptotes sont conjuguées par rapport à la conique *S*; elle passe en outre par les points D_1, *N'*, *O*, etc. (hyperbole *Q*).

Remarque. — L'ellipse de Steiner du triangle *B* coupant la conique O_B en *X* (IVe), le point *X* est le point de Steiner du triangle *B* et, par suite, *O* est son *point de* Tarry. L'hyperbole *Q*, ainsi déterminée par les points B_1, B_2, B_3 *G*, *O*, est donc l'*hyperbole de* Kiepert du triangle *B*; elle passe notamment par le point H_B, anticomplémentaire de O_B et orthocentre de *B*. Ses asymptotes sont conjuguées par rapport à la conique O_B, et elles le sont déjà par rapport à la conique Ω_A; il en est de même, en vertu de (Γ), pour les asymptotes de l'hyperbole *Q'* de *A*. Donc, *les hyperboles de* Kiepert *des triangles A et B sont homothétiques*, les directions communes des asymptotes étant celles des droites conjuguées à la fois par rapport aux coniques O_B et Ω_A.

Supposons maintenant que *X* soit *K*, on sait (Neuberg et Gob, AFAS, Paris, 1889) que, dans tout triangle, les axes de Steiner sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole de Kiepert. Il en résulte que *les ellipses de* Steiner *des triangles A et B et la conique* Ω_A *ont leurs axes parallèles.*[1])

Des théorèmes précédents — conclut M. Caspary — *se déduisent d'autres si l'on échange* A_i *avec* B_i, *et conséquemment* D_2 *avec* D_3, *X avec R*, etc. C'est bien le principe de la correspondance Γ, que je

1) Si ces derniers résultats sont nouveaux, ils suffisent à justifier l'intérêt de la correspondance Γ.

Digitized by Google

viens de développer longuement et dont le lecteur peut poursuivre l'étude à volonté.

On peut allonger indéfiniment la double liste des propriétés qui précèdent, et je terminerai par l'indication de quelques directions faciles à explorer. J'ai déjà fait observer que j'ai laissé de côté le groupe des propriétés provenant de la considération des axes d'homologie.

Un autre groupe important résulte de l'extension de la notion des *points inverses:* Les coordonnées barycentriques de X étant α_1, α_2, α_3, deux points $(x_1, x_2, x_3$ et $x_1', x_2', x_3')$ sont dits *inverses par rapport à* X, s'ils sont liés par les relations $\frac{x_1 x_1'}{\alpha_1} = \frac{x_2 x_2'}{\alpha_2} = \frac{x_3 x_3'}{\alpha_3}$. A cette définition analytique correspondent des constructions géométriques (Voir, par ex., El Progreso Matematico, 1900, p. 378). Dans l'étude actuelle, les points G et X, D_2 et D_3, D_1 et W, D_{23} et S, H et O, B_i et W_i, etc., sont des points inverses par rapport à X.

Le centre d'homologie du triangle A et de son triangle circonscrit par rapport à la conique Ω_A est un point très important Y; ce point, son inverse, ses associés, les droites qui en dépendent, etc., donnent lieu à de nombreuses propriétés. Il permet d'établir une correspondance très intéressante entre les coniques O et Ω_A.[1])

On peut aussi, et même de plusieurs manières, établir la correspondance entre les coniques O et O_B; j'ai indiqué la base de deux systèmes de correspondance en déterminant (IX^b) les points (de Lemoine) X_B et X_C des triangles B et C.

Tous les théorèmes énoncés, étant projectifs, ont des corrélatifs. J'observerai enfin que tous ces théorèmes peuvent subir une seconde généralisation, si l'on substitue à la droite de l'infini, qui est la droite fondamentale dans les questions où interviennent des droites parallèles, des coniques homothétiques, des centres, des milieux des segments, etc. une droite fondamentale arbitrairement choisie Δ. On peut alors généraliser et dualiser même les propriétés métriques, en s'appuyant sur le principe de l'invariance du rapport anharmonique (Voir N. A, 1899, p. 101 et 306).

Paris, 19 décembre 1900.

---

1) Le point Y est celui dont les coordonnées barycentriques sont $\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^2$, etc. Les coniques O_B et Ω_A ont pour équations respectives $\sum \frac{\alpha_1}{x_1} = 0$ et $\sum \frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2}{x_1} = 0$. Sur le point Y, voir notamment E. Lemoine (AFAS, Carthage, 1896; point W').

Digitized by Google

Über einige Verallgemeinerungen des Fermatschen und des Wilsonschen Satzes.

Von K. Hensel in Berlin.

Der sogenannte Wilsonsche Satz, oder die Congruenz:

$$1 \cdot 2 \cdots (p-1) \equiv -1 \pmod{p}$$

lehrt, dafs eine gewisse symmetrische Function der $(p-1)^{\text{ten}}$ Dimension von den $(p-1)$ modulo p inkongruenten und p nicht enthaltenden Zahlen kongruent (-1) ist. Dieser Satz wird, wie ich zunächst erwähnen möchte, durch ein allgemeineres Theorem über symmetrische Funktionen jener Zahlen ergänzt, dessen Beweis ebenfalls auf der Thatsache beruht, dafs jene $p-1$ Zahlen

$$1, 2, \cdots, p-1, \tag{1}$$

modulo p betrachtet, eine Gruppe bilden, dafs nämlich, wenn h irgend eine Zahl jener Reihe ist, die $p-1$ Produkte

$$h, 2h, \cdots, (p-1)h \tag{1a}$$

modulo p den Zahlen (1), abgesehen von der Reihenfolge, kongruent sind. Es besteht nämlich der Satz:

> Jede ganze symmetrische Funktion einer beliebigen ν^{ten} Dimension der Zahlen (1) ist stets durch p teilbar, sobald ν kein Multiplum von $p-1$ ist.

Ist nämlich $S_\nu(1, 2, \cdots, p-1)$ jene Funktion und h eine der $p-1$ Zahlen (1), so folgt aus der Grundeigenschaft der symmetrischen Funktionen und aus der soeben erwähnten Gruppeneigenschaft der Zahlen (1), dass:

$$S_\nu(h, 2h, \cdots, (p-1)h) \equiv S_\nu(1, 2, \cdots, p-1) \equiv h^\nu S_\nu(1, 2, \cdots, p-1),$$

ist, d. h. für jede der $p-1$ Zahlen h besteht die Congruenz:

$$(h^\nu - 1) S_\nu \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ist aber ν kein Multiplum von $p-1$, so ist die Differenz $h^\nu - 1$ nicht für jedes h durch p teilbar; also mufs in diesem Falle wirklich S_ν durch p teilbar sein, w. z. b. w.

Digitized by Google

So folgt z. B., dafs alle elementaren symmetrischen Funktionen der Zahlen (1), mit Ausnahme der letzten, und auch dafs alle Potenzsummen s_ν derselben p enthalten, mit Ausnahme der Summen $s_{\lambda(p-1)}$, welche gleich $p-1$ sind, u. s. w.

Ich möchte aber, und das ist der Hauptgegenstand dieser Zeilen, auf eine andere Klasse von Sätzen hinweisen, welche darauf beruhen, dafs man die $(p-1)$ Zahlen (1) irgendwie in zwei Abteilungen

$$a_1, a_2, \cdots, a_\mu \quad \text{und} \quad b_1, b_2, \cdots, b_\nu \tag{2}$$

teilt und nun die symmetrischen Funktionen der Elemente von einer dieser beiden Klassen mit denen der anderen Klasse vergleicht.

Es sei jetzt nämlich:

$$\varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\mu) \tag{3}$$

das Produkt der zu $a_1, \cdots, a_\mu$ gehörigen Linearfaktoren, so besteht für grofse Werthe von x die konvergente Entwicklung

$$\frac{x^\mu}{\varphi(x)} = \prod_{h=1}^{\mu} \frac{x}{x-a_h} = \left(1 + \frac{a_h}{x} + \frac{a_h^2}{x^2} + \cdots\right) = 1 + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots, \tag{4}$$

wo allgemein:

$$C_i(a_1, a_2, \cdots, a_\mu)$$

die Summe aller Kombinationen mit Wiederholung zu je i unter den Elementen $a_1, a_2, \cdots, a_\mu$ der ersten Abteilung bedeutet.

Es sei ferner

$$\psi(x) = (x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_\nu) = x^\nu - B_1 x^{\nu-1} + B_2 x^{\nu-2} - \cdots \pm B_\nu \tag{5}$$

das Produkt der zu $b_1, b_2, \cdots, b_\nu$ gehörigen Linearfaktoren, so dafs also allgemein

$$B_k(b_1, b_2, \cdots, b_\nu)$$

die Summe aller Kombinationen ohne Wiederholung zu je k von den Elementen der zweiten Abteilung bedeutet. Multipliziert man dann die Gleichung (4) mit $x^{p-1}-1$ und beachtet, dafs für die beiden komplementären Funktionen (3) und (5)

$$\varphi(x)\,\psi(x) \equiv x^{p-1} - 1 \pmod{p} \tag{6}$$

ist, so ergiebt sich, wenn man auf beiden Seiten von Vielfachen der Primzahl p absieht, die Kongruenz

$$x^\mu \psi(x) = x^\mu (x^\nu - B_1 x^{\nu-1} + B_2 x^{\nu-2} - \cdots \pm B_\nu) \equiv x^{p-1} + C_1 x^{p-2} + \cdots + C_{p-2} x + (C_{p-1} - 1) + \frac{C_p - C_1}{x} + \cdots \pmod{p}. \tag{7}$$

Da aber hier bekanntlich die Koefficienten links und rechts modulo p

Digitized by Google

kongruent sein müssen, so ergeben sich durch Koefficientenvergleichung die folgenden Kongruenzen:

$$(8)\qquad \left.\begin{array}{lll} C_1 \equiv -B_1, & C_{\nu+1} \equiv 0, & C_{p-1} \equiv 1, \\ C_2 \equiv +B_2, & C_{\nu+2} \equiv 0, & C_p \equiv C_1 \equiv -B_1 \\ \vdots & \vdots & C_{p+1} \equiv C_2 \equiv +B_2 \\ C_\nu \equiv \pm B_\nu, & C_{p-2} \equiv 0, & \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \pmod{p}.$$

Alle diese Relationen können wir aber jetzt in die eine sehr allgemeine Kongruenz zusammenfassen:

$$(9)\qquad C_l(a_1, a_2, \cdots, a_\mu) \equiv (-1)^{l_0} B_{l_0}(b_1, b_2, \cdots, b_\nu) \pmod{p},$$

wenn l_0 den kleinsten Rest von l modulo $p-1$ bedeutet. In der That ergeben sich die Kongruenzen der ersten Kolonne in (8) unmittelbar, wenn man in (9) $l = l_0 = 1, 2, \cdots, \nu$ setzt, aber auch die der zweiten Kolonne folgen aus (9) für $l = l_0 = \nu+1, \nu+2, \cdots, p-2$; in der That ist ja für $l > \nu$ die Summe $B_l(b_1, \cdots, b_\nu)$ aller Kombinationen ohne Wiederholung zu je l gleich Null; weil keine einzige solche Kombination existiert. Setzen wir endlich $B_0(b_1, b_2, \cdots, b_\nu) = 1$, so ergeben sich auch die Kongruenzen der dritten Kolonne für $l = p-1, p, \cdots$

Es gilt also der allgemeine Satz: Teilt man die $p-1$ Zahlen $1, 2, \cdots, p-1$ irgendwie in zwei Abteilungen

$$a_1, \cdots, a_\mu \quad \text{und} \quad b_1, \cdots, b_\nu,$$

so ist modulo p die Summe C_l aller Kombinationen der Elemente $(a_1, \cdots, a_\mu)$ mit Wiederholung zu je l kongruent der Summe $(-1)^{l_0} B_{l_0}$ aller Kombinationen der Elemente $(b_1, \cdots, b_\nu)$ ohne Wiederholung zu je l_0 mit abwechselnden Zeichen, wenn l_0 den kleinsten Rest von l modulo $p-1$ bedeutet; hierbei ist speziell $B_0 = 1$ anzunehmen.

Dafs die Summen $C_{\nu+1}, C_{\nu+2}, \cdots, C_{p-2}$ und diejenigen, deren Indices um Multipla von $p-1$ gröfser sind, durch p teilbar sind, hat zuerst Steiner beobachtet und in einer Abhandlung „Ein neuer Satz über die Primzahlen“, Crelles Journal **13**, 356 bewiesen. Im nächsten Bande hat Jacobi denselben speziellen Fall unseres Satzes einfacher bewiesen. Der allgemeine Satz scheint jedoch noch nicht bekannt zu sein.

Für $\mu = 1$ und $l = p-1$ ergiebt sich speziell aus (9)

$$a_1^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

also der Fermatsche Satz. Für $\mu = 1$, $l = p-2$, $a_1 = 1$ folgt:
$1 = C_{p-2}(1) \equiv (-1)^{p-2} B_{p-2}(2, 3, \cdots, p-1) \equiv -(p-1)! \pmod{p}$,
also der Wilsonsche Satz.

Endlich möchte ich noch eine andere Reihe von Relationen angeben, welche zwischen den symmetrischen Funktionen der beiden Sy-

Digitized by Google

steme $(a_1, \cdots, a_\mu)$ und $(b_1, \cdots, b_\nu)$ bestehen. Entwickelt man nämlich auch den Quotienten $\frac{x^\nu}{\psi(x)}$ nach fallenden Potenzen von x, so ergiebt sich genau wie in (4) die Gleichung:

$$\frac{x^\nu}{\psi(x)} = 1 + \frac{D_1}{x} + \frac{D_2}{x^2} + \cdots, \tag{10}$$

wo allgemein D_k die Summe aller Kombinationen zu je k mit Wiederholung der Elemente $(b_1, \cdots, b_\nu)$ bedeutet, und durch Multiplikation jener beiden Gleichungen folgt weiter:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_i D_k}{x^{i+k}} = \frac{x^{\mu+\nu}}{\varphi(x)\psi(x)} \equiv \frac{x^{p-1}}{x^{p-1}-1} \equiv 1 + \frac{1}{x^{p-1}} + \frac{1}{x^{2(p-1)}} + \cdots;$$

und durch Koeffizientenvergleichung erhält man somit den Satz:

Teilt man die Zahlen $(1, 2, \cdots, p-1)$ irgendwie in die beiden Gruppen $(a_1, \cdots, a_\mu)$ und $(b_1, \cdots, b_\nu)$, und sind $C_i(a_1, \cdots a_\mu)$, bzw. $D_i(b_1, \cdots, b_\nu)$ die Summen aller Combinationen mit Wiederholung zu je i der Elemente $(a_1, \cdots, a_\mu)$ bez. $(b_1, \cdots, b_\nu)$, so läfst jede Summe:

$$C_l + C_{l-1}D_1 + C_{l-2}D_2 + \cdots + D_l$$

durch p geteilt den Rest Eins oder Null, je nachdem l durch $p-1$ teilbar ist, oder nicht.

Aus diesen Kongruenzen kann man in bekannter Art die Funktionen D_i durch die Summen $C_1, C_2, \cdots$ ausdrücken. — Ganz analoge Relationen gelten für die elementaren symmetrischen Funktionen:

$$A_1, A_2, \cdots, A_\mu \quad \text{und} \quad B_1, B_2, \cdots, B_\nu$$

jener Elemente nur mit dem Unterschiede, dafs die entsprechend gebildeten Summen:

$$A_l + A_{l-1}B_1 + \cdots + A_1 B_{l-1} + B_l$$

zwar auch für $l \equiv 1, 2, \cdots, p-2$ durch p teilbar sind, aber für $l \equiv 0$ (modulo $(p-1)$) durch p geteilt den Rest (-1) lassen. Diese Relationen ergeben sich unmittelbar aus der Kongruenz

$$\varphi(x)\psi(x) \equiv x^{p-1} - 1 \pmod{p}$$

durch Koeffizientenvergleichung.

Berlin, den 24. Februar 1901.

Digitized by Google

Principes de Géométrografie ou Art des constructions géométriques;

Par M. E. Lemoine à Paris.

(Suite.)

Quelques exemples.

Je veus seulement doner cinq constructions géométrografiques come exemples très simples de tracés, en montrant à leur propos la façon de chercher à réduire le simbole. Il est d'ailleurs évident que tout tracé géométrografique doit être précédé d'un croquis somaire sur lequel on étudie les constructions pour chercher les simplifications, s'il y en a, et l'ordre dans lequel doivent s'exécuter les constructions — qui n'est pas toujours celui où èles se présentent dans la solution — pour remplacer souvent les constructions géométrografiques auxiliaires par d'autres non géométrografiques mais qui, en se servant des lignes déjà tracées sur l'épure, seraient plus simples, etc.

XXII. Placer les deus somets inconus d'une élipse dont on conait un axe AA' et un point M. Suposons que ce soit le grand axe $AA' = 2a$ qui soit doné; il faut placer les extrémités B et B' du petit axe $BB' = 2b$. Cète construction est excessivement simple, et l'on n'a que l'embaras du chois des procédés pour l'exécuter. Si l'on remarque le téorème suivant: Lorsqu'une droite $\beta\beta'$ de longueur constante $a - b$ a ses deus extrémités β et β' sur deus droites rectangulaires ox, oy et que l'on prend sur èle un point M tel que $\beta' M = a$ $(\overline{\beta' M} - \overline{\beta M} = \overline{\beta' \beta} = a - b)$, le lieu de M est une élipse qui a son grand axe $AA' = 2a$ sur ox, son petit axe $BB' = 2b$ sur oy et son centre en o, on voit que ce téorème relie immédiatement les axes et la position d'un point, il y a donc grande chance pour que l'on en déduise la construction géométrografique.

(Construction géométrografique.) Je trace la perpendiculaire oy au milieu o de AA' $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_2)$, je trace $M(Ao)$ $(3C_1 + C_2)$ qui coupe oy en β' de l'autre coté de AA' que M, je trace $M\beta'$ $(2R_1 + R_2)$ qui coupe oA en β, $M\beta$ est la longueur du $\frac{1}{2}$

Digitized by Google

petit axe, je trace $o(M\beta)(3C_1+C_3)$ les points B et B' sont placés sur oy op.: $(4R_1+2R_2+8C_1+4C_3)$ S.: 18; E.: 12; 2 droites; 4 cercles. On aurait une construction identique en utilisant le théorème: si $\beta'\beta = a+b$, et que $\overline{\beta' M} = a$, on a $\overline{M\beta} = b$ etc. On peut comparer ce simbole avec celui de constructions déduites d'autres solutions géométriques évidentes. Par exemple: en décrivant la circonférence sur AA' come diamètre, en joignant le point B_1 où la perpendiculaire au milieu de AA' coupe cète circonférence au point M_1 où la perpendiculaire abaissée de M sur AA' coupe cète circonférence du même coté de AA' que B_1; puis le point γ où B_1M_1 coupe AA' au point M; $M\gamma$ coupe oB_1 en B, pour placer B' il faudrait encore décrire $o(oB)$. On trouverait un coéficient de simplicité 28. Ou encore: en apelant l, m les coordonées de M par raport à ox, oy on déduit de l'équation de l'élipse $b = \frac{am}{\sqrt{a^2-l^2}}$, on construirait la moyène proportionèle λ entre a et m, puis $\sqrt{a^2-l^2} = \mu$, puis la troisième proportionèle $\frac{\lambda^2}{\mu}$ et enfin $o\left(\frac{\lambda^2}{\mu}\right)$ placerait B et B'; c'est évidemment encore beaucoup moins simple à tracer.

Remarque. Les énoncés géométriques doivent toujours être précis, mais les énoncés qui ont à être traduits géométrografiquement par une construction, doivent être précis encore d'une autre manière, en spécifiant tout ce qui doit être construit et rien que cela, afin que l'on puisse comparer entre eus, sans les modifier, les simboles corespondant à une même question. Ainsi: Trouver la longueur du coté d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle doné et tracer le triangle équilatéral inscrit dans un cercle doné sont, pour le géomètre, deus questions tout à fait équivalentes; en géométrografie la première a pour coéficient de simplicité 6 et la seconde 15. De même la question que nous venons de traiter n'est pas la même pour le résultat géométrografique que cèle-ci: Trouver la longueur d'un axe d'une élipse conaissant l'autre axe et un point. Il faudrait ariver à tracer $M\beta'$ come précédemment $(4R_1+2R_2+4C_1+3C_3)$, puis tracer $M(M\beta)(2C_1+C_3)$ qui placerait M' sur $M\beta$ de l'autre coté de M que β, et $\beta M'$ serait la réponse avec 16 de simplicité; si c'était le $\frac{1}{2}$ axe qu'on avait à construire, l'énoncé devrait spécifier $\frac{1}{2}$ axe et la réponse $M\beta$, obtenue par le tracé de $M\beta'$, n'aurait plus que 13 come coéficient de simplicité.

XXIII. Tracer la bissectrice de l'angle de deus droites AB, CD que l'on ne peut prolonger jusqu'à leur rencontre.

Cète question qui se présente fréquemment dans les aplications, se trouve traitée dans presque tous les livres classiques; le procédé que l'on done ordinairement pour le tracé, est le suivant. On mène une

Digitized by Google

perpendiculaire quelconque EP sur AB et une perpendiculaire quelconque FQ sur CD, E étant sur AB, F sur CD. Sur ces perpendiculaires, dans le sens convenable, on prend deus longueurs égales FH et EG; puis, par H, on mène une parallèle à CD, et, par G, une parallèle à AB; le point de rencontre M de ces deus lignes est un point de la bissectrice cherchée; on répète la même construction pour obtenir un autre point M' de cète bissectrice, il n'y a plus qu'à tracer MM'; quelquefois, come dans le traité de MM. Rouché et de Comberousse par exemple, au lieu de dire: on répète la même construction etc. on termine ainsi: En prenant deus autres longueurs égales sur EP et FQ, on obtiendrait un second point M' de la bissectrice et il ne reste qu'à tracer MM'. C'est évidemment préférable, mais là se bornent les simplifications essayées et on va voir ce qu'il resterait à faire.

Il faut remarquer qu'il ne s'agit pas, dans cet exemple, de l'exposé d'une solution, mais d'un procédé de tracé; on y saisit donc sur le vif la façon dont les géomètres ont traité jusqu'ici la question des tracés qui est pour les modernes (èle ne l'était pas chez les Grecs) le but final de la géométrie.

Exécutons rigoureusement cète construction, en ne nous servant pas quand il y aurait lieu, des tracés géométrografiques. Tracé de EP et de FQ $(4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 2C_2 + 6C_3)$; plaçons H et G $(2C_1 + 2C_3)$; traçons par G et H les paralèles qui placent M $(4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 6C_3)$; faisons les mêmes constructions pour avoir M' $(8R_1 + 4R_2 + 16C_1 + 2C_2 + 14C_3)$; traçons MM' $(2R_1 + R_2)$ op.: $(18R_1 + 9R_2 + 32C_1 + 4C_2 + 28C_3)$ (S.: 91; E.: 54; 9 droites, 28 cercles).

En prenant la seconde indication qui évite le tracé inutile de deus nouvèles perpendiculaires à AB et à CD, le simbole serait de 73 seulement.

La géométrografie pousse plus loin la recherche et se propose come nouveau but de trouver la construction la plus simple en ne changeant pas, d'abord, le principe de la solution; ici ce principe est de tracer 2 couples de droites équidistantes de AB et de CD, les couples déterminant l'un M, l'autre M'; on peut y ariver de diverses façons plus simples que le procédé que nous venons d'analiser; celui qui done lieu au simbole le plus réduit me parait être le suivant: tracer les deus cercles $E(\rho)$, $F(\rho)$, E et F étant respectivement sur AB et sur CD $(2C_2 + 2C_3)$, $E(\rho)$ coupant AB en A et B, $F(\rho)$ coupant CD en C et D; tracer $A(\rho')$, $B(\rho')$ $(2C_1 + 2C_3)$ qui coupent $E(\rho)$ en ε, ε' du même coté de AB dans l'intérieur de l'angle; tracer $C(\rho')$, $D(\rho')$ $(2C_1 + 2C_3)$ qui coupent $F(\rho)$ en φ et φ' du même coté de CD dans l'intérieur de l'angle; pendant que la pointe est

Digitized by Google

en D, tracer $D(\varrho'')$ (C_3) qui détermine φ_1' sur $F(\varrho)$, puis $C(\varrho'')$ (C_1+C_3) qui détermine φ_1 sur $F(\varrho)$, tracer $A(\varrho'')$, $B(\varrho'')$ $(2C_1+2C_3)$ qui placent ε_1, ε_1' sur $E(\varrho)$. Tracer $\varepsilon\varepsilon'$, $\varphi\varphi'$ $(4R_1+2R_2)$ qui placent M, $\varepsilon_1\varepsilon_1'$, $\varphi_1\varphi_1'$ $(4R_1+2R_2)$ qui placent M'; enfin tracer MM' $(2R_1+R_2)$ op.: $(10R_1+5R_2+7C_1+2C_2+10C_3)$; S.: 34; E.: 19; 5 droites, 10 cercles.

Enfin come but final, la géométrografie se propose de changer s'il y a lieu le principe de la solution et d'ariver à celui qui done le tracé le plus simple. Après divers essais voici la solution que nous croyons la meilleure. Tracer une paralèle AE à CD par le point A; une perpendiculaire à la bissectrice de BAE coupera CD en D, BA en B et la perpendiculaire au milieu de BD sera la droite cherchée. On réalise cela, au mieus, come il suit:

(Construction géométrografique.) — C étant un point arbitraire de CD, je trace $C(\varrho)$ $(C_2''+C_3)$ qui coupe CD en D, AB en A. Je trace $A(\varrho)$ (C_1+C_3) qui coupe AB en B. Les sens de CD et de AB étant ceus de points qui s'éloigneraient du somet de l'angle doné. Je trace $D(\varrho)$ (C_1+C_3) qui coupe $A(\varrho)$ en E. Je trace $BE(2R_1+R_2)$ qui coupe CD en D'. Come la figure $AECD$ serait un losange, AE serait paralèle à CD, EAB serait isocèle, ainsi que BOD' (O étant le somet, hors de l'épure, de BOD). Je trace donc la perpendiculaire au milieu de BD' $(2R_1+R_2+2C_1+2C_3)$; c'est la droite cherchée; op.: $(4R_1+2R_2+4C_1+C_2+5C_3)$; S.: 16; E.: 9; 2 droites, 5 cercles.

Si AB, CD sont paralèles, la solution est illusoire, il faut tracer la droite également distante de deus droites paralèles AB, CD. En voici le tracé géométrografique. Je trace $A(\varrho)$ (C_2+C_3) qui coupe CD en C et en D; au moyen des 2 cercles $C(\varrho)$, $D(\varrho)$ $(2C_1+2C_3)$ je trace la perpendiculaire au milieu A' de CD $(2R_1+R_2)$. Je trace $A'(\varrho)$ (C_1+C_3) qui coupe $A(\varrho)$ en 2 points qui donent la droite cherchée $(2R_1+R_2)$; op.: $(4R_1+2R_2+3C_1+C_2+4C_3)$; S.: 14; E.: 8; 2 droites, 4 cercles.

XXIV. Trouver deus longueurs conaissant leur some BC et leur moyène proportionèle l^2.

(Construction habituèle.) — Sur BC come diamètre je décris une circonférence $(2R_1+R_2+4C_1+3C_3)$, je trace la tangente en B (Construction classique XV, p. 105) $(6R_1+3R_2+C_1+C_3)$ sur laquèle je prends $BD=l$ $(3C_1+C_3)$, par D je trace une paralèle à BC (construction classique française XII, p. 104) $(2R_1+R_2+5C_1+3C_3)$ qui coupe le cercle en E et E'; j'abaisse de E la perpendiculaire EF sur BC $(2R_1+R_2+3C_1+3C_3)$, BF et FC sont les longueurs cherchées; op.: $(12R_1+6R_2+16C_1+11C_3)$; S.: 55; E.: 28; 6 droites, 11 cercles.

Si nous examinons la construction, nous voyons que le tracé de

Digitized by Google

la tangente en B est inutile, car, pour tracer le cercle décrit sur BC come diamètre nous avons élevé une perpendiculaire au milieu O de BC, nous pouvons porter en OD' la longueur l sur cète perpendiculaire, ou bien si nous traçons cète tangente il est inutile d'abaisser de E une perpendiculaire sur BC puisque les 2 longueurs cherchées sont DE et DE'; mais il vaut mieus ne pas tracer cète tangente et conduire géométrografiquement ainsi la construction: Sur BC come diamètre je décris un cercle $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_2)$ de centre O; sur la perpendiculaire à BC menée par O je prends $OD' = l$ $(3C_1 + C_3)$; par D' je trace une paralèle à BC (Construction XII, 2ième géométrografique) $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$ qui coupe le cercle en E; je reporte $D'E$ en OF sur $BC\,(3C_1 + C_3)$; op.: $(4R_1 + 2R_2 + 14C_1 + 7C_3)$ S.: 27; E.: 18; 2 droites, 7 cercles.

Nous pouvons aler plus loin dans la simplification en montrant un autre procédé de la géométrografie qui est de voir directement sur le tracé lui-mème des relations qui le simplifient; ainsi le résultat final consiste à placer F, or si nous examinons la figure $OD'EF$ c'est un rectangle dans lequel $D'F = OD' = OB$, donc le tracé du cercle décrit sur BC come diamètre, celui de la paralèle $D'E$ à BC, tout cela est inutile, il sufit de placer D' et de décrire $D'\,(OB)$ qui coupe BC en F. On a alors la construction suivante.

(Construction géométrografique.) Je trace la perpendiculaire au milieu O de $BC\,(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$; je prends sur èle $OD' = l$ $(3C_1 + C_3)$; je trace $D'\,(OB)\,(2C_1 + C_3)$ en ayant eu soin pour gagner un C_1 de prendre OB dans le compas pendant que sa pointe était en O pour placer D': op.: $(2R_1 + R_2 + 7C_1 + 4C_3)$; S.: 14; E.: 9; 1 droite, 4 cercles.

Si l'on pose $BC = a$, le problème que nous venons de résoudre traduit l'équation $x^2 - ax + l^2 = 0$ d'où $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - l^2}$ et la construction géométrografique que nous venons d'exposer se déduirait immédiatement aussi de cète valeur de x, puisque $OB = \frac{a}{2}$ et qu'il faut y ajouter et en retrancher $\sqrt{\frac{a^2}{4} - l^2}$, c'est à dire OF, pour avoir les 2 longueurs qui donent la réponse.

Il est assez rare d'ailleurs que, dans une question, ce soit la solution algébrique qui done immédiatement la construction géométrografique.

XXV. Trouver deus longueurs conaissant leur diférence BC et leur moyène proportionèle l^2.

(Construction habituèle.) Sur BC come diamètre on décrit un cercle, en B on élève une perpendiculaire $AD = l$ à BC, on joint

Digitized by Google

D au centre O du cercle, lequel est coupé par OD en E et F. Les deus longueurs cherchées sont DE, DF. Cète construction, menée géométrografiquement, a pour simbole op.: $(6R_1 + 3R_2 + 9C_1 + 6C_3)$; S.: 24; E.: 15; 3 droites, 6 cercles.

(Construction géométrografique.) — Je trace une perpendiculaire sur le milieu O de BC $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$ et je prends sur èle $OG = l(3C_1 + C_3)$; je trace $C(CG)(2C_1 + C_3)$ qui coupe BC en H et en H', OH et OH' sont les deus longueurs cherchées. op.: $(2R_1 + R_2 + 7C_1 + 4C_3)$; S.: 14; E.: 9; 1 droite, 4 cercles.

XXVI. Construire la moyène géométrique entre deus droites placées OA, OB (Construction géométrografique). — Ce problème qui consiste à porter sur la bissectrice de l'angle BOA une longueur égale à la moyène proportionèle entre OA et OB se présente souvent dans les aplications et on en a doné de nombreuses solutions, nous mentionons ici seulement cèle qui nous a amené à la construction géométrografique.

(Construction géométrografique). — OA étant la plus petite des longueurs OA, OB traçons $O(OB)(2C_1 + C_3)$ qui coupe OA en C dans le sens OA, puis sans déranger l'écartement des branches du compas, en nous servant de ce cercle, traçons la bissectrice de l'angle $AOB(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$; traçons $A(OB)(C_1 + C_3)$ qui coupe OA en D au delà de O dans le sens AO; traçons $D(OB)(C_1 + C_3)$ qui coupe en E le cercle $C(OB)$ déjà tracé. En se reportant à la construction géométrografique XX on voit que OE est la moyène proportionèle entre OA et DA ou OB. Traçons $O(OE)(2C_1 + C_3)$ qui coupe la bissectrice de AOB en γ dans l'angle AOB, et en γ'; γ est le point cherché, γ' corespond à la moyène géométrique entre OA et $-OB$. Op.: $(2R_1 + R_2 + 8C_1 + 6C_3)$; S.: 17; R.: 10; 1 droite, 6 cercles.

Simboles de divers instruments soit pratiques, soit idéaus.

La Géométrografie canonique est édifiée à l'aide des seuls simboles que nous avons considérés, mais son essence spéculative a permis cependant à la pratique du tracé de profiter de ses enseignements, de sorte qu'il est tout naturel d'étendre la métode qu'èle indique, à tous les cas de cète pratique. D'ailleurs, même dans les principes que nous avons exposés, nous n'avons pas perdu de vue son utilité concrète; par exemple, dans le cas suivant: En ne considérant que son coté spéculatif nous avons pris les deus simboles diférents C_1 et C_2 parce qu'il est spéculativement tout à fait diférent de mètre une pointe en un point placé ou de la mètre en un point indéterminé d'une ligne tracée

Digitized by Google

et que si, au point de vue pratique, ces simboles eussent pu être réunis en C_1 la distinction n'ofre cependant aucun inconvénient. C'est encore sur le coté spéculatif que nous nous somes apuyé pour admètre qu'il n'y avait à employer qu'un seul simbole C_1 pour mètre une pointe en un point placé, que l'autre pointe soit libre ou qu'èle soit déjà placée en un autre point; de sorte que tracer successivement les deus cercles $O(OA)$, $O(OB)$ est compté $(2C_1+C_3)$ pour $O(OA)$ plus (C_1+C_3) pour $O(OB)$, ce qui, du reste, est fait en pratique si l'on ne soulève pas de O, la pointe quand on a tracé le premier cercle. Spéculativement, nous devrions de même compter $(3R_1+2R_2)$ pour tracer successivement les deus droites OA, OB; mais come, en pratique, il est absolument impossible de maintenir le bord de la règle en O quand, après avoir tracé OA, on la déplace pour tracer OB, nous serions conduits à une convention absurde et, c'est en nous apuyant sur le coté pratique cète fois, que nous comptons $(4R_1+2R_2)$ pour tracer OA, OB exactement come pour tracer OA, $O'B$.

Les tracés pratiques dérivant de la géométrie canonique s'éfectuent souvent en employant l'équère pour mener des paralèles ou des perpendiculaires à des droites donées, dissimulant ainsi l'intervention nécessaire, spéculativement, du cercle dans ces opérations. Tout ce qui est nécessaire à l'aplication de la métode géométrografique à l'équère sera dit quand nous aurons doné les simboles relatifs à l'équère et que nous les aurons apliqués à établir le simbole des deus seules constructions spéciales qu'èle permet d'exécuter.

Les opérations (R_1) et (R_2) de la règle conservent le même nom quand èles sont faites avec l'équère; cependant, mais uniquement pour montrer à vue du simbole final d'une construction, quel y a été à peu près le rôle de l'équère, nous accentuons (R_1) et écrivons (R_1'); nous accentuons alors aussi le (R_1) de la règle quand il va servir immédiatement à une opération faite avec l'équère; ces spécifications sont d'ailleurs d'importance très secondaire. L'équère étant apuyée sur la règle, nous apelons (E) l'opération qui consiste à faire glisser l'équère sur la règle jusqu'à ce que le bord de l'équère le long duquel on doit tracer la droite, passe par un point placé. C'est, en définitive, le seul simbole spécial à l'équère.

Il y a une opération que l'on fait souvent avec la règle ou avec l'équère dans les tracés qui admètent ce dernier instrument, c'est: mètre le bord de la règle ou de l'équère en coincidence avec une droite tracée, nous l'assimilons à faire passer un bord de ces instruments par deus points placés et nous comptons $(2R_1)$. Cète opération n'est jamais faite dans la Géométrografie canonique.

Digitized by Google

Par un point A tracer une paralèle à une droite BC. Soit σ le somet de l'angle droit de l'équère, τ et τ' les extrémités de l'ipoténuse. Je place $\sigma\tau$ en coincidence avec $BC(2R_1')$. Je plaque la règle sur $\tau\tau'$ (cète manœuvre n'a pas de simbole, ce n'est pas une opération proprement dite, il n'y a pas plus de raisons pour lui en doner un que d'en doner un à la manœuvre qui écarte ou raproche arbitrairement les branches du compas, ou qui pose sa pointe n'importe où sur l'épure); je fais glisser l'équère sur la règle jusqu'à ce que $\sigma\tau$ passe en $A(E)$, je trace la droite cherchée le long de $\sigma\tau(R_2)$. Op.: $(2R_1' + E + R_2)$; Simplicité: 4; Exactitude: 3; 1 droite.

Par un point A tracer une perpendiculaire à BC.

On arive à un simbole identique op.: $(2R_1 + E + R_2)$.

Tracer un angle droit.

On ne peut pratiquement tracer une droite le long de $\sigma\tau$ et une droite le long de $\sigma\tau'$ parce que le somet de l'angle droit serait fort mal déterminé ainsi; on évite la dificulté en plaquant la règle contre $\tau\tau_1'$ en traçant $\sigma\tau$ (R_2'), puis faisant arbitrairement glisser l'équère le long de la règle dans le sens où $\sigma\tau'$ coupera la droite $\sigma\tau$ tracée, enfin traçant $\sigma\tau'$ dans sa nouvèle position (R_2), en tout op.: $(2R_2)$. Ce tracé de simplicité 2 n'a pas de coéficient d'exactitude, èle ne dépend que de cèle de l'équère. Nous renvoyons pour plus de détails sur la Géométrografie des constructions avec l'équère, à nos mémoires de l'Association française pour l'Avancement des Sciences, Congrès de Caen 1894 (celui-ci particulièrement pour l'aplication à la Géométrie descriptive), à notre travail des Recueils „Scientia", au mémoire du Congrès de Bologne 1899, Comparaison géométrografique etc.

Si l'on se sert du compas de proportion, on admètra les simboles ordinaires du compas avec, en plus, le simbole (G) par exemple qui indiquera la mise au point du compas de proportion pour doner la réduction voulue.

Monsieur Hilbert dans un admirable mémoire publié à propos de l'inauguration du monument de Gauss et Weber à Göttingen a imaginé de distinguer des autres, ceus des problèmes de la Géométrie canonique de la règle et du compas qui peuvent être construits au moyen de la règle et d'un instrument idéal qu'il apèle „Streckenübertrager" et ne conserverait du compas que la propriété de prendre la longueur d'un segment de droite et de la transporter sur une autre. Pour analiser les constructions faites avec cet instrument on n'a qu'à adopter pour désigner l'opération qu'il permet le simbole (σ) représentant $(3C_1 + C_2')$ ou $(2C_1 + C_2' + C_3')$. Le simbole général d'une construction faite avec le Streckenübertrager sera donc Op.: $(l_1R_1 + l_2R_2 + s\sigma)$,

Digitized by Google

et pour revenir au simbole de la géométrografie canonique ordinaire on n'a qu'à y remplacer (σ) par ($3C_1 + C_3$) ou ($2C_1 + C_2 + C_3$).

La Géométrografie est, on le voit, une métode générale fort large qui n'est pas forcément bornée au simbolisme que nous avons adopté. Chacun peut même modifier à son gré les conventions proposées généralement une fois pour toutes, afin que les géonètres puissent se comprendre dans ce domaine; il sufit de prévenir de la modification qu'on adopte dans l'exemple que l'on traite. Ainsi il est convenu que le traceur en Géométrografie n'a qu'un seul compas, mais il y a des cas où la construction peut se simplifier notablement si l'on en a plusieurs, (par exemple lorsque des cercles de rayon diférent doivent être alternativement tracés plusieurs fois, puisque l'emploi d'autant de compas qu'il y a de rayons éviterait de reprendre la longueur du rayon entre les branches). Dans ce cas on peut doner le simbole réduit en prévenant qu'il exige l'emploi simultané de tant de compas.

Il résulte des études précédentes qu'il y a deus simplicités très distinctes à considérer dans chaque question de Géométrie: 1° la simplicité déductive, c'est à dire la simplicité de la démonstration, la seule qui ait été vraiment considérée jusqu'ici; 2° la simplicité du tracé éfectué. Pour la première les géomètres n'ont rien à modifier à leurs errements, mais pour la seconde tout était à faire. Quand un géomètre disait: voici une construction simple, cela voulait dire: simple à énoncer, rien de plus; une construction plus simple qu'une autre était une construction plus simple à faire comprendre et à expliquer. L'idée géométrografique était si peu dans le courant de la conaissance que nul ne s'était arêté à étudier un tracé en lui même et que les afirmations les plus fa usses au sujet des constructions étaient faites même dans les Eléments de géométrie où les constructions sont simples; nous en avons cité quelques exemples, par exemple la construction X, et l'apréciation relative des simplicités des 3 constructions classiques de la moyène proporti onèle entre deus droites donées etc. S'il en était ainsi dans les Eléments, à plus forte raison, entre les géomètres, le mot de construction simple n'avait aucun sens, et l'on n'avait, d'ailleurs, point de critère pour lui en doner un. La construction de Bobillier et Gergonne, pour n'en citer qu'un exemple, du célèbre problème d'Apollonius (cercle tangent à 3 cercles donés) était universèlement citée come la plus simple; c'est de beaucoup la plus compliquée de cèles que j'ai examinées. Le sujet que je traite est donc absolument vierge et aucune recherche y tenant de près ou de loin, ne l'a encore éfleuré à ma conaissance; c'est d'autant plus singulier, come je le constatais en començant cet article, que le problème a été posé pour ainsi dire nètement par l'illustre Steiner,

Digitized by Google

qui a exploré tous les domaines de la géométrie, dans un passage que je vais citer, mais la tradition de pure logique des Grecs, ipnotisait jusqu'aus modernes héritiers de leur métode et persone n'avait remarqué ce passage pour ce qu'il valait; c'est M. L. Gérard, professeur au Lycée Charlemagne à Paris qui me l'a signalé, il y a trois ans environ.

„Es scheint, dafs man im allgemeinen bis jetzt noch zu wenig Sorgfalt auf die geometrischen Construktionen verwendet habe. Die hergebrachte von den Alten uns überlieferte Weise, wonach man nämlich Aufgaben als gelöst betrachtet, sobald nachgewiesen worden, durch welche Mittel sie sich auf andere vorher betrachtete zurückführen lassen, ist der richtigen Beurteilung dessen, was ihre vollständige Lösung erheischt, sehr hinderlich. So geschieht es denn auch, dafs auf diese Weise häufig Construktionen angegeben werden, die, wenn man in die Notwendigkeit versetzt wäre, alles, was sie einschliefsen, wirklich und genau auszuführen, bald aufgegeben würden, indem man dadurch sich gewifs bald überzeugen müfste, dafs es eine ganz andere Sache sei, die Construktionen in der That, d. h. mit den Instrumenten in der Hand, oder, um mich des Ausdruckes zu bedienen, blofs mittelst der Zunge auszuführen. Es läfst sich gar leicht sagen: ich thue das, und dann das, und dann jenes; allein die Schwierigkeit, und man kann in gewissen Fällen sagen, die Unmöglichkeit, Construktionen, welche in einem hohen Grade zusammengesetzt sind, wirklich zu vollenden, verlangt, dafs man bei einer vorgelegten Aufgabe genau erwäge, welches von den verschiedenen Verfahren bei der gänzlichen Ausführung das einfachste, oder welches unter besonderen Umständen das zweckmäfsigste sei, und wieviel von dem, was die Zunge etwas leichtfertig ausführt, zu umgehen sei, wenn es darauf ankommt, alle überflüssige Mühe zu sparen, oder die gröfste Genauigkeit zu erreichen, oder den Plan (das Papier), worauf gezeichnet wird, möglichst zu schonen, u. s. w. Es käme also mit einem Worte darauf an: „zu untersuchen, auf welche Weise jede geometrische Aufgabe theoretisch oder praktisch am einfachsten, genauesten oder sichersten construirt werden könne, und zwar 1) welches im allgemeinen, 2) welches bei beschränkten Hülfsmitteln und 3) welches bei obwaltenden Hindernissen das zweckmäfsigste Verfahren sei". (Steiner, Ges. W. I, 509, 510).

C'est le programe complet de la Géométrografie et je suis charmé que le profond géomètre me l'ait laissé à remplir.

Il y a des questions qui n'ont pas de solutions géométrografiques générales, ce sont cèles dans lesquèles s'introduit l'idée de nombre, de façon à faire dépendre la solution, d'un problème d'aritmologie

Digitized by Google

non encore résolu. Par exemple. Construire (avec le compas et la règle) une longueur nl, l étant une longueur donée et n un nombre entier. On peut chercher une construction géométrografique pour chaque valeur particulière de n, mais non une métode s'apliquant quel que soit n. La solution dépendrait de cète question posée par M. le Professeur Dellac et qui ne parait pas résoluble dans l'état actuel de la science des nombres: Quel est le nombre minimum de multiplications nécessaires pour élever un nombre A à la puissance n? Cète question générale de géométrografie a eu pour moi une importance capitale car, à cause d'èle, j'ai été bien près, au moment où l'idée de la Géométrografie m'était venue, de n'en point poursuivre l'étude; le problème de la multiplication d'une longueur s'était naturèlement posé dès le début et, ne pouvant le résoudre, j'avais été tenté de conclure que mon idée ne pouvait avoir de portée et de m'en tenir là, avant d'avoir réfléchi à l'ordre exceptionel des dificultés qu'il présentait.

Je veus encore dire quelques mots au sujet de la facilité d'introduire la Géométrografie dans l'enseignement même très élémentaire. Je ne suis point professeur et je ne puis parler que d'après l'expérience des autres, mais il parait qu'en l'introduisant par la définition des simboles en même temps que l'on dessine les droites et les cercles du premier tracé que le professeur explique, èle entre immédiatement dans l'esprit des élèves, qu'ils s'amusent à la recherche de simboles plus simples que ceus trouvés par leurs camarades, etc. Un professeur a ajouté, en m'écrivant, qu'un de ses élèves qui paraissait tout à fait rebèle à la Géométrie, s'était intéressé à son étude par cète voie et qu'il était devenu l'un des meilleurs de sa classe; il estimait aussi, qu'aucun exercice n'est préférable pour développer sans fatigue l'esprit de remarque, le goût de recherche des començants, pour leur aprendre à goûter le plaisir de trouver quelque chose, que les problèmes de Géométrografie qui se posent avec chaque construction.

Quelques constructions géométrografiques soit canoniques, soit avec l'équère, à rechercher come exercice.

Le nombre qui est à la fin de l'énoncé désigne le coéficient de simplicité de la construction canonique de ce problème que je regarde come la construction géométrografique, jusqu'à ce que l'on en ait trouvé une plus simple, s'il y en a, ce qui est très possible, au moins pour quelques unes.

1. Étant doné un triangle ABC et un point M de son plan, mener les deus transversales réciproques passant par ce point.[1]) — 43.

1) Je rapèle que deus transversales réciproques coupent les cotés d'un triangle en des points simétriques par raport aus milieus de ces cotés.

Digitized by Google

2. Étant doné un triangle ABC trouver une longueur égale à $\delta = 4R + r$ ou à $\delta_a = 4R - r_a$. R, r, r_a sont les rayons des cercles circonscrit, inscrit et exinscrit tangents à BC. — 31.
3. Étant doné un triangle ABC trouver une longueur dont le carré soit $\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2$. — 16.
4. Étant données 3 lignes l, m, n, trouver une ligne dont le carré soit $l^2 + m^2 + n^2$. — 24.
5. Placer dans un triangle ABC le point dont les coordonées normales sont $b^2 - c^2$, $c^2 - a^2$, $a^2 - b^2$. — 38.
6. Les longueurs a, a', b, b', c, c' étant données, trouver des longueurs x et y tèles que l'on ait: $ax + by = c^2$, $a'x + b'y = c'^2$. — 64.
7. Étant donée une parabole par deus tangentes TA, TB et par les points de contact A et B placer le foyer. — 18.
8. Placer sur une droite tracée et dont les points A et B sont placés, le point M de façon que l'on ait: $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = l^2$, l étant une longueur donée. — 18.
9. Placer le centre de gravité du périmètre d'un triangle ABC. — 23.
10. On done deus couples de droites: 1° AB, $A'B'$, soit M leur point de concours, 2° AC, $A'C'$, soit N leur point de concours, tracer MN en suposant que les points M et N sont hors de la feuille de dessin. — 23.
11. On done deus droites AB, $A'B'$ qui se rencontrent en un point M hors de l'épure, tracer par M la paralèle à une direction AC. — 29.
12. On demande de tracer par raport aus deus axes coordonés ox, oy, le faisceau des deus droites représentées par l'équation $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$; a, b, c sont des longueurs donées en grandeur et en signe, a étant regardé come positif.
13. Trouver l'angle x doné par la formule $a \sin x + b \cos x = c$. — 31.
14. Placer les deus points de Brocard d'un triangle. — 35.
15. Placer un point de Brocard dans un triangle. — 24.
16. Construire le cercle d'Euler (ou des 9 points) d'un triangle ABC. — 25.
17. Placer les deus centres isodinamiques (intersections des cercles d'Apollonius) en même temps que le point de Lemoine (point de Grebe) d'un triangle ABC. — 29.
18. Placer le point de Steiner d'un triangle ABC. — 22.
19. Tracer un des cercles de Neuberg du triangle ABC. — 31.
20. Étant doné un triangle ABC construire, à la fois, les longueurs $\frac{CA \cdot AB}{BC}$ et $\frac{\overline{CA}^2}{BC}$. — 10.

Digitized by Google

21. Étant donés 2 points A et B (AB n'est pas tracée) placer, avec le compas seul, les points M et M' qui diviseraient AB en moyène et extrême raison (sectio aurea). — 20.
22. Étant donés en grandeur et en position l'un des axes d'une élipse et une tangente à cète élipse trouver la demi longueur de l'autre axe par une simplicité 28 au plus et par conséquent l'axe par 31.
23. Placer les axes d'une élipse conaissant en grandeur et en position deus diamètres conjugués. — 41.
24. Construire un triangle ABC conaissant la base $a = BC$, la médiane $AL = m$ et l'angle $\delta = B - C$; on ne construira qu'un des deus triangles qui peuvent répondre à la question. — 46.
25. On done un cercle, et une conique qui passe par trois points donés A, B, C de ce cercle et par deus autres points D, E, placer le 4ième point où l'élipse coupe le cercle. — 15.[1])

Je termine ces exercices en signalant qu'il y aurait intérêt à prendre toutes les solutions diférentes conues de plusieurs problèmes célèbres, par exemple de celui de la section de raison d'Apollonius, de celui de Pappus généralisé: mener par un point L de la bissectrice d'un angle xCy une droite qui coupe Cx en B, Cy en A et tèle que BA soit de longueur conue l etc. et à les comparer géométrografiquement. Ce seraient des monografies fort intéressantes. J'ai examiné cinq solutions seulement du fameus problème d'Apollonius: tracer les 8 cercles tangents à trois cercles donés. Cèles de Viète, de Bobillier et Gergonne, de M. Mannheim, de Poncelet (réétudiée par M. Fouché) et cèle de M. L. Gérard, le temps me manque pour rechercher le plus grand nombre possible de solutions diférentes conues et pour en faire une monografie de comparaison géométrografique. (Un géomètre italien m'écrivait il y a quelques années qu'il en conaissait 22 solutions). Je doute qu'il y en ait une dont le coéficient de simplicité soit inférieure à 153 auquel M. Gérard est arivé en partant d'une très élégante et très simple solution donée par lui il y a environ trois ans et que j'ai analisée dans mon ouvrage de »Scientia« déjà cité. Ne pouvant le faire moi-même pour toutes les questions qui le mériteraient, je signale au moins ce genre nouveau d'étude aus géomètres qu'il pourait tenter.

Nous voulons encore parler d'un autre travail fort intéressant à entreprendre: On trace les courbes soit par points, soit par tangentes, et pour chaque courbe, il y a un nombre indéfini de ces tracés suivant

1) Les constructions géométrografiques doivent être générales c'est à dire s'apliquer à tous les cas des donées.

Digitized by Google

les éléments donés qui la déterminent dans chaque cas. Si le placement d'un point ou d'une tangente se fait pour un de ces tracés avec la simplicité N, je dirai que la courbe, dans ce cas, se trace avec la simplicité ponctuèle ou avec la simplicité tangentièle N. C'est de l'étude des diverses simplicités ponctuèle et tangentièle d'une courbe qu'il s'agit.

On poura encore, par exemple, examiner quel nombre n il faut avoir de points à placer, d'une conique déterminée par 5 points pour qu'il soit plus avantageus de placer d'abord le grand axe et les foyers en se servant de ces 5 points donés et de placer ensuite les n points demandés par la métode classique quand on conait le grand axe et les foyers, que de placer ces n points par la métode déduite de l'exagrame de Pascal (on trouvera que l'avantage a lieu à partir de $n = 24$), et essayer d'autres recherches analogues.

Géométrografie dans l'espace ou Stéréométrografie.

Je vais seulement définir les simboles que j'ai adoptés et je renvoie pour les détails au mémoire que j'ai présenté en 1900 au congrès de Paris de l'*A.F.A.S* (Association française pour l'Avancement des Sciences. Quand on aura pratiqué la géométrografie plane, il ne peut y avoir de dificulté à édifier soi-même cèle de l'espace; mon mémoire cité n'a d'utilité que pour établir et pour discuter les conventions qui permètent, en s'entendant, de comprendre identiquement de la même façon, les simboles des constructions qui seraient établis par les divers géomètres.

Nous entrons, avec la Stéréométrografie, dans le domaine de la spéculation pure, car aucune aplication immédiate ne vient, comme dans le plan, souligner l'utilité de la téorie, aussi je veus la justifier par quelques explications préalables.

Pour les Grecs la Géométrie était un pur exercice de logique; de donées qui étaient les êtres géométriques, ils voulaient déduire des vérités y relatives par un chainon de raisonements dont les mailles étaient des droites et des cercles. Un téorème était dit simple, si les chaînons se reliaient facilement entre eus et c'était tout; la science moderne qui nous vient d'eus a pris leur esprit et l'édifice qu'ils ont bâti est si admirable qu'èle l'a conservé intact dans la géométrie, en y ajoutant des vérités obtenues par des moyens analogues aus leurs. Ce qui explique même que la géométrografie n'ait pas été créée plus tôt, c'est que les Grecs ne l'avaient pas faite — ils n'en avaient aucun besoin et èle n'aurait répondu à rien pour eus — car la perfection de

Digitized by Google

leur œuvre a empêché de chercher si, tout à la base de l'édifice, ne se trouvait pas quelque chose qu'ils auraient négligée et qui pourait cependant être utile maintenant avec la conception d'aplication qui s'est ajoutée à leur géométrie depuis la renaissance des sciences. Toutes les études nouvèles se sont donc faites en avant; la base didactique est toujours Euclide et il y a des pays come l'Angleterre où son texte, littéralement traduit, fait encore l'éducation de tout le monde.

Nous avons déjà mis en évidence les aplications que peut avoir l'idée géométrografique, mais èle a aussi un autre éfet. Le coté matériel de la construction peut ne pas intéresser outre mesure le géomètre, seulement il est montré aussi par èle qu'il y a, à coté de la simplicité des raisonements — les chaînons dont nous parlions tout à l'heure —, la simplicité due au moindre nombre des droites et des cercles mis en œuvre, c'est à dire des mailles qui sont matérialisées par le tracé d'une droite ou le tracé d'un cercle; et, au fond, trouver le simbole le plus simple d'une construction c'est revenir, spéculativement, à déduire le résultat des donées, en employant le moins de mailles possible, c'est à dire de droites et de cercles. Ce sont deus problèmes tout diférents de l'ancien. L'un est si ancien et l'autre si récemment posé qu'il est clair que l'acord n'existe nulement entre les résultats que done chaque point de vue; aussi, actuèlement au moins, il n'y a aucune raison pour qu'une solution géométrique dite plus simple qu'une autre conduise à un tracé plus simple que cèle-ci; l'expérience de la géométrografie prouve qu'il en est ainsi et avant que je ne sois remonté aus raisons de ces diférences, c'était pour moi, chaque fois, une grande surprise. L'acord complet ne sera probablement jamais absolu, car le raisonement est libre de toute entrave et le tracé doit se soumètre aus exigences matérièles des instruments employés pour l'éfectuer, mais le raprochement est désirable et laisse un champ, encore inexploré, de recherches géométriques. Eh bien! ce coté de la Géométrografie du plan reste tout entier à la Stéréométrografie qui, èle, est purement spéculative. En éfet les mailles s'y composeraient, en plus de droite et des cercles, de plans et de sfères; le nouveau problème que résoudra la Stéréométrografie sera donc de passer des donées au résultat en employant le moins possible de droites, de cercles, de plans et de sfères, problèmes que ne se sont encore jamais posés les géomètres. De même que la règle corespond à la droite spéculative et le compas à la circonférence, j'ai besoin d'instruments qui corespondraient au plan et à la sfère; je vais donc imaginer des organismes idéaus, l'un que j'apèle planque et qui tracerait les plans dans l'espace, l'autre que j'apèle sférètre et qui tracerait les sfères. Je supose que ces instruments se maintiènent dans l'espace

Digitized by Google

pour les tracés et que les tracés éfectués par eus y restent marqués come restent les tracés de la règle et du compas dans le plan.

Apuyer le planque en un point placé sera (P_1).

Faire passer le planque par deus points placés sera $(2P_1)$.

Faire passer le planque par 3 points ou par une droite et un point ou par deus droites qui se coupent, ou l'apuyer sur une ligne plane placée, sera $(3P_1)$.

Tracer le plan sera (P_2).

Fixer une pointe du sférêtre en un point placé sera (S_1).

Fixer une pointe du sférêtre en un point arbitraire d'une ligne ou d'une surface sera (S_2).

Tracer la sfère sera (S_3).

La some des coéficients de toutes les opérations élémentaires R_1, R_2, P_1, P_2, etc. sera dite le coéficient de simplicité ou la simplicité; la some des coéficients des opérations élémentaires R_1, C_1, C_2, P_1, S_1, S_2 sera dite le coéficient de préparation ou la préparation.

$O(\rho^2)$ ou $O(\overline{MN}^2)$ représentera une sfère de centre O et de rayon ρ ou MN.

Nous convenons que le compas ne poura tracer un cercle dans l'espace sans s'apuyer sur son plan tracé.

Je vais seulement doner un exemple de comparaison de deus tracés idéaus du problème suivant pris au hasard.

Par un point C, placé, mener un plan perpendiculaire à une droite placée BA.

(Première construction).

Je fais passer le planque par AB et je trace un plan ABM $(2P_1 + P_2)$, puis en laissant le planque apuyé sur BA, je le fais passer par C et je trace le plan ABC $(P_1 + P_2)$; de C come centre, je trace, dans le plan, ABC un cercle quelconque, il coupe AB en A et B $(C_1 + C_2)$. Je place dans le plan ABC le point C' à égale distance de A et de B $(2C_1 + 2C_2)$; je place dans le plan ABM le point M à égale distance de A et de B $(2C_1 + 2C_2)$; je trace le plan $CC'M$ $(3P_1 + P_2)$ qui est le plan cherché.

op.: $(6P_1 + 3P_2 + 5C_1 + 5C_2)$; simplicité: 19; préparation: 11, 6 plans, 5 cercles.

(Deusième construction).

Je trace une sfère $O(\rho^2)$ qui ait son centre en un point O arbitraire de AB et passe en C $(S_1 + S_2 + S_3)$, j'en trace une seconde $O'(\rho'^2)$ dans les mêmes conditions $(S_1 + S_2 + S_3)$, les 2 sfères placent par leur intersection un cercle passant en C et situé dans un plan

Digitized by Google

perpendiculaire à BA. J'apuie le planque sur ce cercle et je trace le plan $(3P_1 + P_2)$.

op.: $(3P_1 + P_2 + 2S_1 + 2S_2 + 2S_3)$; simplicité: 10; préparation: 7; un plan, 2 sfères.

Refert et historique.

Je ne puis renvoyer ici simplement aus principaus mémoires qui ont édifié la géométrografie sans quelques mots d'explication parceque, dans leur ordre cronologique que suivent les progrès de cèle-ci, ils ont des diférences dont je dois doner la raison.

— 1888 (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, 16 Juillet 1888). Courte note, sorte de simple prise de date. Je n'avais pas encore étudié, d'ailleurs, sufisamment les simboles de l'équère; les deus simboles caractéristiques de l'instrument que j'y admets ont été, depuis, réduits à un seul.

— (Congrès d'Oran, Association Française pour l'Avancement des Sciences, 2 avril). De la mesure de la Simplicité dans les sciences matématiques. Dans ce mémoire il y a deus parts à faire: 1. Cèle qui touche au sujet général qu'indique le titre et à laquèle je ne vois pas un mot à changer; il me semble même que son dévelopement général pourait faire l'objet d'une très importante étude. 2. Cèle qui en présente l'aplication aus constructions; èle est pour ainsi dire inutile à lire maintenant, en ce qui regarde les simboles des constructions, parce que je maniais encore maladroitement la métode naissante, que je n'en conaissais pas les ressources et surtout, parce que considérant come des dogmes les tracés classiques séculairement admis par les géomètres, je n'avais pas songé à y chercher des simplifications.

— Une note insérée au Bulletin de la Société matématique de France où je ne me montre pas plus habile et où, en particulier, j'atribue un simbole beaucoup trop compliqué au simple placement d'un point par ses coordonées cartésiènes.

— Un exposé dans Mathesis; c'est un abrégé de mon mémoire du Congrès d'Oran. J'y ajoute la détermination des simboles de la Construction du Problème d'Apollonius par la métode de Viète et par cèle de Bobillier et Gergonne. Pour doner une idée des progrès faits depuis cète époque, je dirai que dans ce travail les coéficients de simplicité sont respectivement 335 et 500, tandis que dans le mémoire des Nouvèles Annales de 1892 cité plus loin ils sont devenus 234 (il faut lire 235) et 356; nombres dans le même raport

Digitized by Google

d'ailleurs à peu près, que les anciens, le perfectionement ayant réagi à peu près de même façon pour les 2 tracés.

— Jusqu'en 1892 il n'y a que des notes de détail dans diverses publications.

— 1892. Nouvelles Annales de Mathématiques. Aplication d'une métode d'évaluation etc. Ce mémoire done un exposé restreint de la métode, pour l'apliquer à évaluer les simboles déduits de 4 solutions diférentes du Problème d'Apollonius (Viète, Bobillier et Gergonne, MM. Mannheim et Fouché).

— (Congrès de Pau, Assoc. Française etc.). La Géométrografie ou l'Art des Constructions géométriques. Ce mémoire assez dévelopé (65 pages grand in 8°) comprend l'étude de toutes les constructions des éléments, de nombreus exemples d'aplication, une discussion des principes et la réfutation de quelques objections. Un corps de doctrines auquel je donais pour la première fois le nom de géométrografie y est en formation.

— 1893. (Congrès de Besançon, Assoc. Franç. etc.). Ce mémoire est consacré à d'assez nombreuses simplifications des constructions du mémoire de Pau.

— Depuis ce temps j'ai amené, peu à peu, la géométrografie à la forme didactique actuèle et j'ai fait paraître en France et à l'étranger diverses notes, ou quelquefois des exposés plus ou moins abrégés qui m'étaient demandés, parmi lesquels il suffit de citer:

— 1894. (Congrès de Caen, Ass. Franç. etc). Ce mémoire comprend 2 parties. 1° l'étude du raport anharmonique, des points doubles de deus figures directement ou simétriquement semblables et de diverses constructions. 2° J'introduis le simbole de l'équère dont je n'avais point jusque-là doné autre chose, pour ainsi dire, que la définition et j'aplique la géométrografie à la géométrie descriptive.

— 1899. Note didactique assez étendue que j'ai rédigée à la demande de M. Rouché pour être insérée dans la 7ième Edition (parue en Janvier 1900) de son grand Traité de Géométrie en collaboration avec feu de Comberousse. Cet ouvrage a fait depuis 40 ans l'éducation de probablement tous les géomètres français.[1])

— 1901. Il y a, sous presse, (Nov. 1900) chez M. Naud éditeur 3 rue Racine, un ouvrage des Recueils «Scientia» qui est l'exposé le plus complet que j'aie publié, jusqu'ici, de la géométrografie.

Paris, 22 Nov. 1900.

---

1) A ajouter come publié depuis la remise du manuscrit de ce travail:

— 1900. La Géométrografie dans l'espace ou Stéréométrografie. — Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris (3 Décembre).

Digitized by Google

Notes. 1. Les lecteurs qui trouveraient aus constructions que j'ai indiquées come constructions géométrografiques des simplifications, ou qui auraient une solution autre donant un simbole plus simple, rendraient le plus grand service à la géométrografie et me feraient particulièrement beaucoup de plaisir s'ils voulaient bien me les comuniquer soit directement (32 avenue du Maine à Paris), soit par M. Jahnke. Èles seraient insérées dans ce Journal.

2. Tout récemment (avril 1901), le simbole géométrografique de deus des constructions classiques données dans ce travail, a été légèrement réduit. Je ne signale la chose que parce qu'èle devient rare pour èles et qu'èle se raporte à deus constructions importantes, particulièrement et longuement étudiées en vue d'obtenir leur simbole géométrografique définitif en fait. M. G. Tarry a diminué d'une unité le coéficient de simplicité de la construction du segment capable d'un angle doné décrit sur une droite donée. D'autre part M. G. Tarry et le colonel Moreau m'ont adressé, chacun de leur coté et presque en même temps, des tracés pour placer les 4 tangentes à deus cercles donés, avec un coéficient de simplicité 35 au lieu de 36, nombre au-dessous duquel il n'avait pu être abaissé et que j'ai indiqué ici come coéficient géométrografique du problème. Ce sont ces nouvèles constructions qui devièvent maintenant les constructions géométrografiques de ces problèmes.

Digitized by Google

Rezensionen.

Aug. Föppl. Vorlesungen über Technische Mechanik. 4 Bde., Leipzig 1899, 1900, B. G. Teubner.

An den deutschen Technischen Hochschulen werden die Lehren der theoretischen Mechanik gleichzeitig mit ihren Anwendungen auf Gegenstände der Bautechnik entwickelt in Vorlesungen, denen der Name der Technischen Mechanik beigelegt wird. Dem Lehrplan dieser Hochschulen entsprechend fallen diese Vorlesungen in eine Studienzeit, zu welcher die Studierenden eben das Studium der höheren Mathematik begonnen haben, und schreiten mit diesen Studien fort. Die Zweckmäfsigkeit solcher Einrichtung kann in dieser Besprechung nicht erörtert werden.

Der Herr Verfasser hat die von ihm in München über Technische Mechanik gehaltenen Vorlesungen in vier Bänden veröffentlicht. Nur der Inhalt der Bände I, III, IV, in denen analytische Entwickelungen der theoretischen Mechanik zur Geltung gelangen, soll im folgenden besprochen werden. Hinreichende Veranlassung zu solcher Besprechung geben die in den Vorlesungen selbst in fast allen Kapiteln befindlichen Erörterungen von Fragen, die zu dem wissenschaftlichen Inhalt der Mechanik in keiner Beziehung stehen, wohl aber zu ephemeren Tagesmeinungen. In diesen Erörterungen nimmt der Herr Verfasser wiederholt Veranlassung sich seinen Lesern als einen Autor vorzuführen, der, in zwei Sätteln gerecht, eine besondere Beachtung seiner vorgetragenen Auffassungen wohl zu erwarten berechtigt ist.

Wir werden aus folgendem ersehen, wie weit eine solche Berechtigung vorliegt.

Von den vier Bänden der Technischen Mechanik hat der Herr Verfasser den dritten, die Festigkeitslehre, zuerst erscheinen lassen, nach ihm die zwei Bände über Mechanik. Dieser Reihenfolge werden wir uns für unsere Ausführungen anschliefsen, um so mehr, als gerade die Festigkeitslehre bisher stets den technischen Wissenschaften beigezählt wurde und der Herr Verfasser auf seinen wissenschaftlichen Standpunkt in den technischen Wissenschaften Wert legt.

Bei der Beurteilung eines Lehrbuches der Festigkeitslehre, das selbstverständlich vieles seinen Vorgängern zu entlehnen hat, ist in erster Linie mafsgebend derjenige Inhalt, der der Eigenart des Verfassers verdankt wird, die von ihm eingeführte Methode der Untersuchung und die Abweichungen vom Hergebrachten. Wir werden daher nur einige, aber für die Urteilsbildung vollständig ausreichende Beispiele des Verfahrens und der Schlufsweise des Herrn Verfassers vorlegen.

Digitized by Google

Zunächst ihm eigentümlich sind seine Definitionen der Elastizität und der Elastizitätsgrade. Er definiert:

1. *Elastizität* ist allgemein die Fähigkeit eines Körpers, Formänderungsarbeit in umkehrbarer Weise aufzuspeichern.

2. *Vollkommen elastisch* verhält sich ein Körper bei einem gewissen Vorgange, wenn man die ihm durch äufsere Kräfte zugeführte Formänderungsarbeit vollständig wieder in Form von mechanischer Energie aus ihm zurückgewinnen kann (Seite 43).

Zur Erläuterung giebt er an: Die *Umkehrung* der Zugversuche ist die *Zusammenziehung* des Probestabs beim Abnehmen der Belastung. Damit die Formänderungsarbeit umkehrbar sei, mufs der Stab beim *allmählichen Abtragen* der Belastung dieselbe Arbeit wieder nach aufsen hin abgeben, die ihm zuerst zugeführt wurde.

An welches *aufsen* Befindliche diese Arbeit beim allmählichen Abtragen der Belastung abgegeben wird, und wo nach der Umkehrung des Zugversuchs die betreffende mechanische Energie sich „aufgespeichert" befindet, giebt er nicht an. Diese Angabe würde das Verständnis seiner Sätze erleichtert haben.

Der Herr Verfasser benutzt in denjenigen Kapiteln, die nicht hergebrachtes Material der Festigkeitslehre enthalten, häufig den Begriff der Formänderungsarbeit oder Deformationsarbeit zur Entwickelung weiterer Folgerungen. Darin wäre an und für sich ein Vorzug seiner Darstellungen zu erblicken; allein diese Darstellungen selbst sind fehlerhaft und zu Anwendungen nicht geeignet.

Zum Beweise geben wir hier einige seiner Entwickelungen über die Deformationsarbeit wieder. Sie finden sich im Paragraphen 25 (Seite 180) des Werkes, unter der Überschrift: Die Sätze von Castigliano.

Zur Beurteilung der Darstellung, die der Verfasser an dieser Stelle vorträgt, schicken wir einige Bemerkungen über den Begriff der Deformationsarbeit, wie er in der Theorie der Elastizität fester Körper auftritt, voran.

Wenn ein homogener neutraler elastischer Körper, er sei isotrop oder anisotrop von auf seine Teile angreifenden Kräften aus seiner Ruhelage in eine benachbarte neue Lage übergeführt wird, derart dafs in dieser Lage die Geschwindigkeiten sämtlicher Teilchen wiederum Null sind, während die alsdann angreifenden Kräfte unveränderlich geworden sind und sich am Körper das Gleichgewicht halten, so hat der Körper eine dauernde Deformation angenommen. Die Arbeitsgröfse, welche innerhalb der Zeit des erfolgten Übergangs aus der ersten Lage in die zweite Lage durch die äufseren angreifenden Kräfte ausgeübt worden ist, nennt man die Deformationsarbeit. Sie ist mit der gleichzeitig geleisteten Arbeit der inneren elastischen Kräfte gleichwertig. Von der Zeitdauer der Deformation und der Änderung der äufseren Kräfte während derselben ist diese Arbeit unabhängig, aber vollständig bestimmt durch die Angabe des in den Punkten des Körpers schliefslich angreifenden Kräftesystems, das den Bedingungen des Gleichgewichts am festen Körper genügen mufs. Bezeichnet man durch R_i den Wert der am $i$ten Punkte des Körpers angreifenden Kraft, durch δs_i die Gröfse der Verrückung dieses Punktes nach eingetretener Deformation und bestehendem Gleichgewicht, durch θ_i den Winkel zwischen der Richtung von R_i und δs_i,

Digitized by Google

so gilt für den Wert der Deformationsarbeit D, gleichgiltig ob der Körper isotrop oder anisotrop sei, die Gleichung

$$D = \tfrac{1}{2} \sum R_i \cos \theta_i \delta s_i,$$

in welcher Gleichung die Summe über alle durch Kräfte R angegriffenen Punkte des Körpers zu erstrecken ist. Nennt man noch das Produkt $\cos \theta_i \delta s_i$ die *relative Verrückung* des $i$ten Angriffspunktes nach der Richtung der Kraft R_i, so kann man die vorstehende Gleichung durch die folgende ersetzen:

$$D = \tfrac{1}{2} \sum R_i r_i.$$

Will man sich dieser Gleichung zur Berechnung von D bedienen, so ist es augenscheinlich notwendig, *zwei* Lagen des deformierten Körpers zu kennen, die anfängliche und die Endlage, da jedes δs die Kenntnis *zweier* Punkte, des Ausgangs- und des Endpunktes, erfordert.

Das *Endresultat* D aber wird *unabhängig* von der gewählten Anfangslage, da man durch eine andere Anfangslage die *gesamte* zu bildende Summe um eine Gröfse ändert, die in Folge der durch die R befriedigten sechs Gleichgewichtsbedingungen verschwindet. Die Deformationsarbeit ist daher *nur* durch die Endlage bestimmt.

Aber keineswegs findet dieselbe Bestimmtheit statt für die einzelnen Bestandteile jener Summe und für die Gröfsen r_i. Einer gewählten Anfangslage, aus der die schliefsliche Deformation hervorgeht, entspricht ein zugehöriges System der r_i, jeder geänderten ein geändertes System.

Dieser Umstand ist nicht berücksichtigt in dem von Castigliano aufgestellten Satze:

Wenn man die Deformationsarbeit eines elastischen Körpers in einer Funktion der äufseren Kräfte ausdrückt, so giebt der Differentialquotient dieses Ausdrucks in Bezug auf eine dieser Kräfte die relative Verrückung ihres Angriffspunkts. (Castigliano: Theorie des Gleichgewichts elastischer Systeme. Übersetzt von E. Hauffe. Wien, 1886. Verlag von Carl Gerolds Sohn).

Dieser Satz ist daher ohne jeden präzisen Inhalt. Denkt man die Deformationsarbeit als eine bestimmt gegebene eindeutige Funktion der sämtlichen äufseren Kräfte R_i[1]), so sind ihre partiellen Differentialquotienten bestimmte Werte, während die r_i, welche dargestellt werden sollen, unendlich vieldeutig sind, je nach der Anfangslage des deformierten Körpers. Auch sind die sämtlichen R_i durch sechs Gleichungen unter einander verbunden. Man kann daher nicht ein bestimmtes R_i sich ändern lassen, ohne die anderen, oder einzelne, gleichzeitig zu ändern. Von einem Differential der Deformationsarbeit, gebildet durch Änderung nur einer Kraft, also vom *partiellen* Differential der Deformationsarbeit zu sprechen, hat keinen Sinn. Will man aber in den Ausdruck von D nur äufsere Kräfte aufgenommen denken, die in Folge der sechs Gleichgewichtsbedingungen von einander unabhängig bleiben (was Castigliano nicht thut), so kann man diesem Ausdruck je nach Wahl dieser Kräfte viele verschiedene Formen beilegen.

1) *Jede* aus ihr durch Transformation mittelst der Gleichgewichtsbedingungen gewonnene ist gleichberechtigt.

Digitized by Google

Der Satz von Castigliano ist daher inhaltlos und selbst bei präziser gefafstem Inhalt vieldeutig. Dadurch werden alle aus ihm *allein* gezogenen Folgerungen an und für sich hinfällig.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen gehen wir zur Betrachtung der Entwickelungen des Herrn Verfassers über. Er beabsichtigt, die allgemeine Formel für die Gröfse der Deformationsarbeit nur für den Fall eines in zwei Punkten unterstützten Balkens, der durch einzelne Lasten P in Deformationszustand versetzt ist, zu entwickeln, und ist der Meinung, dafs seine Entwickelung Wort für Wort auf den allgemeinen Fall übertragen werden könne. Für die Auseinandersetzung der Verhältnisse für den speziellen Fall des Balkens geht er von der *Annahme* aus, dafs während der stattfindenden Deformation die Einwirkung der Lasten P nur nach Mafsgabe der schon erreichten Einsenkung y der belasteten Stelle unter ihre Anfangslage zur Geltung gelange, derart dafs eine Steigerung der Lasten, die mit dem Werte Null beginnen, bis zu dem im schliefslichen Gleichgewichte auftretenden Endwerte P, während der Deformationszeit eintrete. Die Arbeitsgröfse für eine dieser Lasten betrage daher nach dem Ablauf der Deformationsbewegung nicht Py, sondern nur $\frac{1}{2}Py$, und für die ganze Formänderungsarbeit A ergebe sich die Formel

$$A = \tfrac{1}{2}\sum Py,$$

da überdies in den Auflagerpunkten eine Einsenkung ausgeschlossen sein sollte. Diese Formel ist mit der Fundamentalformel für die Deformationsarbeit identisch.

Tritt man dieser Theorie des „allmählichen Anwachsens der Lasten während der Durchbiegung des Balkens", in der die Proportionalität der Last mit der augenblicklich vorhandenen Einsenkung die Voraussetzung bildet, ein wenig näher, so ergiebt sich Folgendes: Der Wert der Lasten im Anfangsmoment der Durchbiegung ist Null, diesem entspricht die Einsenkung Null, die zunächst bestehen bleibt. So lange die Einsenkung Null besteht, behalten die Lasten nach dem Proportionalitätsgesetz ihren Wert Null, es kommt wiederum zu keiner weiteren Einsenkung, und die Durchbiegung des Balkens bleibt daher *dauernd* Null. Nach der Theorie des Herrn Verfassers kann bei einem nach seinen Vorschriften belasteten Balken daher eine Deformation überhaupt nicht zu Stande kommen. Der Herr Verfasser zieht diesen *allein* möglichen Schlufs *nicht*, sondern sagt (Seite 190, § 29), dafs die für seine *Berechnungen* gemachte Annahme der allmählichen Steigerung der Belastung in *Wirklichkeit* die *Regel* bildet, dafs man aber durch *geeignete Vorrichtungen* erreichen könne, dafs die Last von Anfang an mit ihrer vollen Gröfse auf den Träger einwirke. Wir glauben hiernach auf diese Theorie nicht weiter eingehen zu sollen.

Nachdem der Herr Verfasser auf diesem bedenklichen Wege zu der Fundamentalformel der Deformationsarbeit gelangt ist, versucht er durch Differentialoperationen zu dem schon erwähnten Castiglianoschen Satz von den Differentialquotienten der Deformationsarbeit zu gelangen, den er in der nachstehenden Form ausspricht:

Die Verschiebung des Angriffspunktes einer äufseren Kraft bei der elastischen Formänderung eines dem Hookeschen Gesetz unterworfenen

Digitized by Google

Körpers ist gleich der nach dieser Kraft genommenen partiellen Ableitung der Formänderungsarbeit.

Es würde uns zu weit führen, wenn wir die Schlüsse des Herrn Verfassers, aus denen dieser Satz hervorgeht, ins einzelne hier verfolgen wollten. Wir wollen uns damit begnügen, ihre Unzulänglichkeit an dem *einzigen* Beispiel nachzuweisen, das er für die Berechnung der Stützdrucke eines in drei Punkten unterstützten gleichförmig belasteten Balkens zur Erläuterung der Castiglianoschen Methode auf Seite 188 u. 189 beigebracht hat.

Auf Seite 188 stellt er die Deformationsarbeit für einen solchen Balken als Funktion der in den Endpunkten auftretenden Stützdrucke B und C und der laufenden Belastung q in der Form:

$$A = \frac{1}{2E\theta}\left[\frac{B^2a^3}{3} - \frac{Bqa^4}{4} + \frac{q^2a^5}{20} + \frac{C^2b^3}{3} - \frac{Cqb^4}{4} + \frac{q^2b^5}{20}\right]$$

auf. Bildet man für die rechts stehende Funktion die partiellen Ableitungen nach den Stützdrucken B und C, so erhält man für die *Verschiebungen* der *Auflagerpunkte* nicht etwa Null, sondern von Null verschiedene Werte. Man erkennt leicht, dafs diese Verschiebungen der Deformation des Balkens aus einer *Anfangslage* entsprechen, welche durch Drehung der *Endlage* um den mittleren Stützpunkt gefunden wird. Hätte man für A nur die Funktionsdarstellung durch den Stützdruck B *allein* gewählt, so würde man für die *Verschiebung* desselben gleichfalls nicht Null, sondern die Verschiebung aus einer *Anfangslage* gefunden haben, die der Unverschieblichkeit der Stützpunkte für C und Z entspricht. Jeder *anderen* Darstellung von A, die aus der vorstehenden durch eine Transformation vermöge der Gleichgewichtsbedingungen entsteht, entspricht eine *andere* Verschiebungsweise aller Punkte; der Elimination von B und C und dem Beibehalten des mittleren Stützdrucks Z *allein* aber diejenige, bei welcher die Auflagerpunkte unverschoben bleiben. Der Castiglianosche Satz ist daher *unbestimmt*, und nach der Wahl der Funktionsdarstellung von A unendlich vieldeutig, zu Anwendungen, ohne Voruntersuchungen, keineswegs geeignet.

Mit der *Unbestimmtheit* der Castiglianoschen Vorschrift entfallen aber die sämtlichen vom Herrn Verfasser im § 28 aus ihr gezogenen Folgerungen, so die Folgerung des sogenannten Satzes vom Minimum (der für sich betrachtet *richtig* ist, aber unbewiesen bleibt). Ebenso erweisen sich die scheinbar sehr allgemeinen Vorschriften und aperçus der Seiten 186 (am Ende) und 187 als unzutreffend und der Anwendung bar.

Auf Seite 410 u. ff. in den §§ 63^a und 63^b glaubt der Herr Verfasser auf *Fehler* anderer aufmerksam machen zu sollen, die von einer unzureichenden Beachtung der Voraussetzungen herrühren, welche der Anwendung des Castiglianoschen Satzes zu Grunde liegen. Unter dem Castiglianoschen Satze versteht er hier die bekannte Formel für die Variation der Deformationsarbeit A eines in einem elastischen Körper befindlichen Körperteils, welche die Form hat:

$$\delta A = \sum (X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta),$$

in welcher Gleichung die Summe über *alle* durch äufsere Kräfte (deren

Digitized by Google

Komponenten X, Y, Z) angegriffenen Stellen erstreckt wird, und $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ die willkürlichen Variationen der Verschiebungskomponenten dieser Stellen bezeichnen. Diese Gleichung ist bekanntlich *ohne* jede Beschränkung der Variationen erfüllt. Durch eine fehlerhafte Aufserachtlassung der Bedingungen, welche an der Begrenzung des ausgesonderten Teils des Körpers für die Drucke, welche den äufseren Kräften zuzuzählen sind, statthaben, wird der Herr Verfasser zu der Beschränkung geführt, dafs zur Gültigkeit vorstehender Gleichung die Variationen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ für Punkte dieser Begrenzung als Null angenommen werden müssen. Der gleiche Fehler findet sich bei den Betrachtungen des § 63^b, deren Endresultat schliefslich die *identische* Gleichung Null gleich Null darstellt.

Den mit gesperrtem Druck vorgelegten unzutreffenden Beschränkungen fügt der Herr Verfasser die belehrenden Worte hinzu: „Dagegen ist manchmal gefehlt worden". (Seite 416.)

Von gleicher Hinfälligkeit sind die Entwickelungen des § 65, welche die Eindeutigkeit der Lösung der statischen Probleme nachweisen sollen. Dieser Nachweis geschieht mit Hilfe der *Annahme*, dafs, wenn ein elastischer Körper weder in seinem Innern noch an seiner Oberfläche durch äufsere Kräfte angegriffen wird, in ihm keine inneren Spannungen auftreten können. Aber gerade diese Annahme ist der Ausdruck des aus den Grundgleichungen der Elasticitätslehre zu *beweisenden* Satzes. Nun ist dieser Satz seit langem aus diesen Grundgleichungen abgeleitet worden (z. B. in Clebsch: Elasticitätslehre), unter der Voraussetzung, dafs die Komponenten der Verschiebungen der Körperpunkte sich im ganzen von dem Körper erfüllten Raum nach der *Stetigkeit* ändern. Unter dieser Voraussetzung sind daher *Eigenspannungen* des Körpers, der dem Einfluls *äufserer* Kräfte entzogen ist, unmöglich. Dagegen sind sie möglich bei Flächendiscontinuitäten der Verschiebungen. Die Meinung des Herrn Verfassers, dafs „etwaige" Eigenspannungen durch die Theorie nicht berührt werden, ist daher unzutreffend.

Die im § 50, dessen Überschrift: *Dickwandige Röhren* lautet, beigebrachten Entwickelungen sind gleichfalls unbegründet. Die Lage der Hauptachsen des Spannungszustandes, die der Verfasser angiebt, ist durch „Symmetriegründe" nicht mehr angezeigt als unbegrenzt viele andere. Die Spannungen, welche einer Verschiebung in der Richtung der Röhrenachse entsprechen, können *nicht nachträglich* in Rechnung gebracht werden, da die Spannungen von allen drei Verschiebungskomponenten abhängen, und nicht von zweien allein. Die Endformeln des Verfassers sind längst durch einwandlose Betrachtungen gegeben worden. Ihre Übereinstimmung mit den thatsächlich giltigen Resultaten beweist nur, dafs auch auf unberechtigtem Wege zu denselben gelangt werden kann, um so mehr als dieselben vorher bekannt waren.

Wir gehen nunmehr zu der Besprechung der Eigenart der in den Bänden I und IV von dem Verfasser vorgetragenen Lehren der „Mechanik" über. Die Entwickelung der Lehren der theoretischen Mechanik, die in diesen Bänden vorgelegt werden, zeigt äufserlich einen auffallenden Unterschied von den bisher üblichen Formen des Vortrags. Der Verfasser vertritt die Meinung, dafs in der Mechanik bisher der Begriff der gerichteten Gröfse nicht in der angemessensten Form verwertet worden sei, dafs vielmehr nur

Digitized by Google

die Rechnung mit ungerichteten Gröſsen benutzt worden sei. Die scheinbar geometrische Einführung der imaginären Gröſsen „habe sogar mehr geschadet als genützt." Er hat sich daher entschlossen, mit den gerichteten Gröſsen, „den Vectoren selbst", wie er sagt, zu rechnen, und in seine Entwickelungen die Formen des inneren und äuſseren Produktes einzuführen.

Durch den Gebrauch von Richtungskoeffizienten i, j, k führt er zur Darstellung der Vektoren lineare Ausdrücke in den Komponenten der Vektoren für ein gegebenes Koordinatensystem ein. Alle gerichteten Gröſsen bezeichnet er durch Buchstaben des *deutschen* Alphabets, alle ungerichteten durch solche des *lateinischen*.

Man könnte Veranlassung nehmen, die Frage aufzuwerfen, ob solche rein formale Einführungen dem Unterrichte von Zuhörern, die am Anfange aller mathematischen Studien stehen, nicht ein für sie unverdauliches Material zuführen. Aber der Herr Verfasser enthebt uns jeder weiteren Diskussion dieser Frage durch die eigentümlichen Darlegungen, die er selbst auf dem Gebiete der Rechnung mit gerichteten Gröſsen, den Vektoren selber, im Verlaufe seiner Entwickelungen vorlegt. Wir werden zur Kennzeichnung derselben hier die Resultate des Kapitels: „Dynamik zusammengesetzter Systeme" vorlegen, in welchem die allgemeinen Bewegungsgleichungen von Lagrange, die der zweiten Form, zur Entwickelung gelangen sollen. Der Herr Verfasser meint, daſs die Castiglianosche Methode, Aufgaben der Festigkeitslehre mit Hilfe von Differentiation an der zuvor berechneten Formänderungsarbeit zu lösen, genau dem Zwecke entspräche, der bei der Entwickelung dieser Lagrangeschen Gleichungen beabsichtigt wird (Seite 279. Bd. IV). Wir müssen uns wegen des beschränkten Raumes einer Besprechung versagen, die eigenartigen Ausführungen des Herrn Verfassers über die allgemeinen Sätze der Mechanik hier wiederzugeben, die auf den Seiten 280 etc. gefunden werden können, und gehen zur Reproduktion der Ableitung der Gleichungen über, die der Herr Verfasser als die Lagrangeschen bezeichnet. Es handelt sich um die Bewegungsgleichungen eines Punktsystems, bei welchem die Koordinaten der einzelnen Punkte derart durch eine Anzahl unabhängiger Parameter q, sogenannter allgemeiner Koordinaten, ausgedrückt sind, daſs die Bedingungsgleichungen zwischen den Koordinaten, denen das System unterworfen ist, identisch erfüllt werden. Von diesen Gleichungen sagt der Herr Verfasser nichts, auch vermeidet er die Angabe irgend eines Beispiels, „weil es zum Geiste dieser Betrachtungen gehört, sie so allgemein als möglich darzustellen" (Seite 283).

Er beginnt seine Entwickelung folgendermaſsen (Seite 284):

„Man betrachte ferner ein Massenteilchen m, das zu irgend einem von den Körpern des Systems gehört. Der von einem festen Anfangspunkte nach m gezogene Radiusvector sei mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet. (Deutsche Buchstaben bezeichnen die gerichteten Gröſsen *selbst*.) Während der Bewegung des Systems ist $\mathfrak{r}$ veränderlich, und die augenblickliche Gröſse und Richtung von $\mathfrak{r}$ ist *abhängig von* $\mathfrak{r}_0$, d. h. von dem Werte, den $\mathfrak{r}$ in irgend einer Stellung des Systems, die als seine Normalstellung angesehen wird, einnimmt, und von den Koordinaten q. Wir schreiben also:

$$\mathfrak{r} = f(\mathfrak{r}_0, q_1, q_2, \ldots, q_n). \qquad (169)$$

Die Form der Function f hängt von der besonderen Construction des Systems

Digitized by Google

ab. Wir bilden jetzt den Ausdruck für die lebendige Kraft des Systems. Zunächst erhält man aus der Gleichung für $\mathfrak{r}$

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}, \qquad (170)$$

denn $\mathfrak{r}_0$ ist eine Constante, so lange man dasselbe Massenteilchen betrachtet.

Für die lebendige Kraft L des ganzen Systems hat man nach Definition.

$$L = \tfrac{1}{2}\sum m\mathfrak{v}^2.$$

Nach Gleichung (170) erhält man daraus:

$$L = \tfrac{1}{2}\sum m\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}\right)^2. \qquad (171)$$

Jemand, der mit Gleichung (169) glaubt irgend welchen Sinn verbinden zu können, wird der Meinung sein, dafs die Zeichen $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}$, $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}$ etc. Gröfsen darstellen werden, die von den *Constanten* $\mathfrak{r}_0$ abhängen, und dafs also die lebendige Kraft L abhängig sein mufs von den sämtlichen Konstanten $\mathfrak{r}_0$.

Von der Gleichung (171) aus erreicht der Herr Verfasser, durch Rechnungen, welche denjenigen nachgebildet sind, die gewöhnlich auf die Lagrangeschen Gleichungen führen, die Gleichung

$$F_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad \left(\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}\right), \qquad (174)$$

welche nach ihm *eine* der Lagrangeschen Gleichungen darstellen soll.

Allein in dieser Beziehung ist er in offenbarem Irrtum. Diese Gleichung kann Lagrange nicht zugeschrieben werden; sie ist, so lange L durch Gleichung (171) definiert bleibt, Eigentum des Herrn Verfassers.

Die Gröfse L, welche die Gleichung (174) enthält, ist durch die *Constanten* $\mathfrak{r}_0$ mitbestimmt. Diese Constanten sind die Werte der *Veränderlichen* $\mathfrak{r}$, die für eine gewisse Normallage des Systems statthaben, welche selbst zu einer bestimmten Zeit eintreten kann, und sind also abhängig von den Koordinatenwerten der Systempunkte zu einer bestimmten Zeit. Die Lagrangeschen Gleichungen führen für die lebendige Kraft solche Constanten nicht mit sich. Die Gleichungen (174) sind daher *nicht* die Lagrangeschen, und würden, wenn sie existierten, nichts Geringeres als *Integrale* der allgemeinen Bewegungsgleichungen darstellen.

Als *Anwendungen* dieser Entwickelungen giebt der Verfasser eigentümlicher Weise nicht Anwendungen seiner eigenen Gleichungen (174), sondern Anwendungen der bekannten Lagrangeschen Gleichungen auf zwei Beispiele.

Das erste Beispiel ist das des physikalischen Pendels.

Die zweite Anwendung macht der Herr Verfasser auf ein Problem, das er Problem von *Glocke* und *Klöppel* nennt, welches, wie er sagt, in einem Buche, das sich mit technischer Mechanik beschäftigt, nicht fehlen dürfe. Dabei hätte er vielleicht angeben können, dafs seine Entwickelungen einer Broschüre des Herrn Veltmann entnommen sind. Nur der Fehler, der in der Be-

Digitized by Google

hauptung liegt, dafs, wenn eine veränderliche Gröfse zwei Differentialgleichungen gleichzeitig genügen soll, diese beiden Gleichungen notwendig *identisch* sein müssen, stammt *nicht* von Herrn Veltmann.

Zur weiteren Darlegung der Eigenart dieser Vorlesungen über technische Mechanik geben wir noch einige Beispiele der Behandlung der Hydrodynamik durch den Herrn Verfasser. In einer der breiten, nicht immer glücklichen Auseinandersetzungen von Nebendingen, mit denen der Herr Verfasser seine Entwickelungen ausgestattet hat, erklärt er sein Wohlwollen für die Betrachtungsweisen der „höheren Hydrodynamik." Er sagt, dafs er dieselbe für seine Vorlesungen ganz über Bord geworfen haben würde, wenn er sie trotz ihrer Mängel nicht zu schätzen wüfste (Seite 333).

Er beginnt seine Darstellungen mit einer Einführung des Vektors $\mathfrak{v}$ der Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens, den er, wie bei der Entwickelung der von ihm Lagrange zugeschriebenen Gleichungen, durch die Gleichung

$$\mathfrak{v} = \varphi(\mathfrak{r}, t)$$

als Funktion des Vektors des Teilchens *schreibt*. Aber nach einigen Schritten „sieht er sich vor die Wahl gestellt, entweder auf das Rechnen mit gerichteten Gröfsen *etwas näher* einzugehen" oder aber die üblichen Methoden zu benutzen.

Wenn er auch glaubt, dafs künftighin niemand, der über solche Dinge schreibt, von der Darstellung nach der *Vektormethode* abgehen wird, so möchte er doch vorläufig Mafs halten (Seite 333—343). Der Herr Verfasser kehrt nunmehr zur klassischen Behandlung zurück.

Um dem Leser das Verständnis des Folgenden zu erleichtern, werden wir uns von hier an der in der Hydrodynamik üblich gewordenen Bezeichnungen bedienen, da der Gebrauch der Bezeichnungen des Herrn Verfassers eine längere Erklärung derselben notwendig machen würde.

Es mögen daher u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten eines Flüssigkeitsteilchens am Orte (x, y, z) zur Zeit t bezeichnen.

Der § 39 der Vorlesungen (S. 346) trägt die Überschrift: „Wirbelbewegung und wirbelfreie Bewegung." Nach dieser Überschrift würde man glauben, dafs die Definition einer *wirbelfreien* Bewegung aus dem Begriffe der Wirbelbewegung entnommen werden solle. Der Herr Verfasser aber definiert *zuerst* die *wirbelfreie* Bewegung auf folgende Weise.

„Das Kennzeichen, dem eine wirbelfreie Bewegung genügen mufs, ist dadurch gegeben, dafs das Integral

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = 0 \quad . \tag{215}$$

über *jede* geschlossene Linie innerhalb des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes gleich Null sein mufs" (Seite 347).

Warum man diese besondere Art der Wasserbewegung als eine wirbelfreie bezeichnet, erläutert er aus der Umgangssprache in eigenartiger Weise (Seite 348). *„Diese Definition trägt der Umgangssprache Rechnung. Sie weist uns an, jeden geschlossenen Integrationsweg gewissermafsen als wirbelverdächtig zu betrachten."* Freilich sei das Kennzeichen (215) mit dem Begriffe der Wirbelbewegung der Umgangssprache nicht geradezu identisch;

Digitized by Google

„es widerspricht ihm aber nirgends und kann als eine Verfeinerung oder als eine schärfere Fassung dieses Begriffes betrachtet werden" (Seite 349).

Die Erfüllung der Gleichung (215) durch *jede* geschlossene Linie innerhalb eines Raumes kann nicht wohl für ein „Kennzeichen" der wirbelfreien Bewegung in ihm angesehen werden. Die Benutzung dieses Kennzeichens würde die Nachprüfung des Verschwindens des Linienintegrals für jede geschlossene Kurve erfordern, und sehr zeitraubend sein. Herausgegriffene Stichproben hätten keine Beweiskraft.

Thatsächlich drückt aber Gleichung (215) ein *Theorem* aus, welches aus dem bekannten Kennzeichen der wirbelfreien Bewegung, dafs $udx + vdy + wdz$ das Differential einer Funktion des Orts darstellt, für den Fall der Eindeutigkeit dieser Funktion folgt. In mehrfach zusammenhängenden Räumen, in denen die betreffende Funktion vieldeutig werden kann, bleibt das Theorem ohne Giltigkeit.

Der Herr Verfasser fügt in seinen Erläuterungen Folgendes hinzu:

„Zur Vermeidung von Mifsverständnissen betrachte ich noch die Bewegung einer Flüssigkeit längs eines ringförmig geschlossenen Rohrs." Für einen Integrationsweg, der dem Rohre folgt und sich in dieser Weise schliefst, sagt er, ist die Gleichung (215) natürlich nicht erfüllt.

Der Grund dieses scheinbaren Widerspruchs liegt darin, dafs der *Sitz des „Wirbels"* in diesem Falle *an den Flüssigkeitsgrenzen* liegt. Im *ganzen genommen* ist die Bewegung jedenfalls *nicht wirbelfrei*, wenn sie auch für jeden einfach zusammenhängenden Bezirk im Innern der Flüssigkeit wirbelfrei sein kann."

Unter den *Flüssigkeitsgrenzen* können im Vorhergehenden nur die Rohrwandungen verstanden sein.

Aber jeder Stromfaden von endlicher oder unendlich kleiner Dicke bildet wiederum einen ringförmigen mit bewegter Flüssigkeit gefüllten Raum wie das ganze ursprüngliche Rohr; also ist der Sitz des Wirbels an der Begrenzung *jedes* Wirbelfadens, also *überall* im Innern des Rohrs. Trotzdem ist in jedem einfach zusammenhängenden Raumteil desselben die Bewegung wirbelfrei. Dieser zweite scheinbare Widerspruch bleibt nach den Darlegungen des Herrn Verfassers bestehen und bedarf einer Aufklärung.

Auf Seite 353 giebt der Herr Verfasser eine durchaus fehlerhafte Entwickelung des Lagrangeschen Satzes, dafs, wenn die Gröfse $udx + vdy + wdz$ zu irgend einer Zeit für eine Flüssigkeitsbewegung ein Totaldifferential ist, sie dieselbe Eigenschaft zu jeder Zeit besitzt. Er *beweist*, dafs die Rotationskomponenten für ein Flüssigkeitsteilchen mit der Zeit *unveränderlich* bleiben (Seite 354).

Auf Seite 400—401 *beweist* er die Helmholtzschen Formeln für die Änderungen dieser Komponenten mit der Zeit.

Wie er diese beiden, von ihm bewiesenen Resultate mit einander in Übereinstimmung bringt, bleibt unverständlich. Der Herr Verfasser giebt auf Seite 404 ferner der Meinung Ausdruck, dafs in den Erwägungen von Helmholtz eine für das *Verständnis nutzlose Erschwerung* der Untersuchung liege, die er in seinen Untersuchungen durch *Weglassung* einfach beseitigt habe.

Im § 41 giebt der Herr Verfasser die Darstellung eines partikulären Falls der Dirichletschen Untersuchung der Bewegung einer Kugel in einer

Digitized by Google

unbegrenzten Flüssigkeit. Für den Fall der gleichförmigen Bewegung der Kugel ergiebt sich der Widerstand der Flüssigkeit gegen die Kugel bekanntlich gleich Null.

Der Herr Verfasser giebt eine neue Behandlung des Problems, ohne hydrodynamische Gleichungen, mit Hilfe des *Energieprinzips*.

Er sagt (Seite 366) einfach:

„Da kein Energiebedarf vorliegt, um die Bewegung (des festen Körpers) zu unterhalten, braucht dem bewegten Körper auch keine Energie zugeführt zu werden, d. h. der Widerstand der Flüssigkeit ist gleich Null."

„Diese Überlegung", bemerkt er, „hat zugleich den Vorteil, dafs sie die Gültigkeit der Betrachtung von dem kugelförmigen Körper auf einen *Körper von beliebiger Gestalt* erweitert" (sic.).

Mit diesem Satze glauben wir unsere Besprechung schliefsen zu dürfen.

Auf Grund des vorstehend beigebrachten Materials, welches nur einen kleinen Teil desjenigen umfafst, das den Vorlesungen über technische Mechanik entnommen werden kann, sprechen wir die Überzeugung aus, dafs diese Vorlesungen für das Studium der Mechanik nicht empfohlen werden können.

J. Weingarten.

Entgegnung auf das Referat des Herrn Weingarten.

Durch das freundliche Entgegenkommen der Redaktion dieser Zeitschrift bin ich in den Stand gesetzt, den Ausführungen des Herrn Weingarten einige Bemerkungen folgen zu lassen. Freilich mache ich davon nicht in der Absicht Gebrauch, mich gegen das ungünstige Urteil aufzulehnen, das Herr Weingarten auf Grund des von ihm gewonnenen Gesamteindrucks über mein Werk ausgesprochen hat. Im Gegenteil: wenn ich mich in die Anschauungsweise des Herrn Weingarten hinein zu versetzen versuche, begreife ich recht wohl, dafs ihm meine Arbeit nicht sympathisch sein konnte. Der einzige Zweck meiner Zeilen soll vielmehr darin bestehen, nach Möglichkeit eine Verständigung über die sachlichen Meinungsunterschiede zwischen Herrn Weingarten und mir herbeizuführen. Ich hoffe dieses Ziel dadurch erreichen zu können, dafs ich einerseits an solchen Stellen, bei denen Herr Weingarten mit seinen Einwendungen meiner Meinung nach Recht hat, meinen Fehler zugestehe, und dafs ich andererseits dort, wo mir der Fehler auf seiner Seite zu liegen scheint, dies mit einer kurzen Auseinandersetzung klar zu legen versuche.

Über die „Festigkeitslehre" bemerkt Herr Weingarten zuerst, dafs es ihm namentlich auf solche Stellen in meinem Buche ankomme, die Abweichungen vom Hergebrachten zeigten. Da sich seine Auseinandersetzungen nachher vorwiegend um die von Castigliano in die Festigkeitslehre eingeführten Methoden drehen, möchte ich mir darauf hinzuweisen erlauben, dafs meine Entwickelungen über diese Methoden kaum irgendwo über das hinausgehen und von dem abweichen, was auch in vielen anderen Büchern und namentlich in zahlreichen Abhandlungen zu finden ist, und was schon seit langer Zeit in der laufenden Praxis jeder gröfseren Brückenbauanstalt angewendet wird. Natürlich sage ich dies nicht, um mich durch eine Berufung auf die Autorität meiner in der Praxis stehenden Kollegen zu decken,

Digitized by Google

sondern nur um ein nahe liegendes Mifsverständnis bei dem mit diesen Dingen weniger vertrauten Leser zu vermeiden.

Zu meinen Definitionen über Elastizität u. s. f. sagt Herr Weingarten:

„An welches aufsen Befindliche diese Arbeit beim allmählichen Abtragen der Belastung abgegeben wird . . ., giebt er nicht an."

Die Antwort hierauf hängt von den Umständen ab, unter denen der Belastungsversuch angestellt wird. War z. B. ein Draht durch ein angehängtes Gewicht P um die Strecke y gedehnt, so wird während des Abtragens der Belastung die jeweilig noch zurückgebliebene Belastung gehoben. Hier wird also die im Drahte aufgespeicherte Arbeit an das Belastungsgewicht abgegeben und in potentielle Energie dieses Gewichtes umgesetzt. Ich brauche auch wohl nicht weiter auszuführen, dafs die vorher während des allmählichen Aufbringens der Belastung dem Drahte zugeführte und während des allmählichen Abtragens der Belastung wieder nach aufsen abgegebene Energie den Wert $\frac{1}{2}Py$ hat.

An einer späteren Stelle kommt Herr Weingarten freilich auf diese Frage zurück, indem er von einer mir zugeschriebenen „Theorie" des allmählichen Anwachsens der Lasten während der Formänderung spricht und Schlüsse zieht, von denen er sagt, dafs ich sie eigentlich hätte ziehen müssen, gegen die sich mein Verstand aber entschieden sträubt. Es handelt sich um die Betrachtungen, die mit dem Satze beginnen:

„Der Wert der Lasten im Anfangsmoment der Durchbiegung ist Null, diesem entspricht die Einsenkung Null, die zunächst bestehen bleibt."

So lange kann ich ihm folgen. Wenn er aber nachher sagt, dafs bei einem nach meinen Vorschriften belasteten Balken eine Deformation überhaupt nicht zu Stande kommen könne, so kann ich mir dies nur dadurch erklären, dafs Herr Weingarten die Lasten als die Ursachen, die Durchbiegungen als die Wirkungen betrachtet und annimmt, dafs die Ursachen den Wirkungen vorausgehen müfsten. Ich will mich hier nicht auf das oft behandelte philosophische Thema über das Verhältnis von Ursache und Wirkung einlassen und nur darauf aufmerksam machen, dafs sich das Verhältnis ebenso gut auch umkehren, die Durchbiegung also als Ursache, die Last als Wirkung ansehen läfst. So wie der Versuch in einer Festigkeitsmaschine angestellt wird, ist diese Auffassung sogar die näher liegende und allgemein gebräuchliche. In Band I, S. 285 der 2. Auflage meiner Vorlesungen ist dies näher auseinander gesetzt.

Ferner bemerke ich noch, dafs man überhaupt nicht von einer „Theorie" des allmählichen Anwachsens der Lasten reden kann, sondern nur von einer Beschreibung des thatsächlichen Hergangs, wie er sich bei einem Belastungsversuche in der Regel abspielt. Am wenigsten dürfte aber diese „Theorie" mir zugeschrieben werden, da diese einfache Betrachtung seit Poncelet, der sie zuerst angestellt zu haben scheint, überall in den Lehrbüchern der technischen Mechanik wiederkehrt.

Zu dem, was Herr Weingarten über den Satz von Castigliano sagt, der nach ihm ohne jeden präzisen Inhalt sein soll, mufs ich allerdings bekennen, dafs ich in meiner eigenen Darstellung dieses Satzes insofern gefehlt habe, als ich die stillschweigend auch bei dem „allgemeinen" Falle immer noch beibehaltenen Voraussetzungen nicht ausdrücklich genannt

Digitized by Google

habe. Ich hole dies nach, indem ich bemerke, dafs bei allen Betrachtungen in § 28 ein Körper vorausgesetzt wird, der so gestützt ist, dafs Bewegungen ohne Formänderung ausgeschlossen sind. Zugleich mache ich darauf aufmerksam, dafs unter den „äufseren" Kräften, von denen dort die Rede ist, solche zu verstehen sind, die man — im Gegensatze zu den durch sie mit bedingten Stützkräften — einzeln und unabhängig von den übrigen beliebig zu ändern vermag. Dabei darf man, wenn es zweckmäfsig erscheint, auch von dem Kunstgriffe Gebrauch machen, einzelne der Auflagerkräfte zu den „äufseren" Kräften oder den „Lasten" zu rechnen, falls nur die übrig bleibenden Auflagerkräfte zur Herstellung des Gleichgewichts bei beliebiger Wahl der äufseren Kräfte ausreichen. Freilich entfernt man sich, wenn man so verfährt, zunächst von dem Falle, der untersucht werden sollte; sobald man aber nachträglich die zu den äufseren Kräften gerechneten Auflagerkräfte so wählt, dafs die zugehörigen Auflagerbedingungen erfüllt sind, deckt sich der betrachtete Fall wieder mit dem ursprünglich gegebenen.

Wenn man diese Erläuterungen beachtet, wird man keine Einwendungen gegen meine Darstellung der Castiglianoschen Methode und alles, was damit zusammenhängt, erheben können. Herr Weingarten glaubt zwar, den Satz an dem Beispiele des in drei Punkten unterstützten Balkens widerlegen zu können, indem er den Ausdruck für die Formänderungsarbeit A nach den Auflagerkräften B und C differentiiert und zeigt, dafs man von Null verschiedene Werte für die Differentialquotienten erhält, während man nach dem Castiglianoschen Satze, wie er meint, Null erhalten müfste. Er verstöfst aber dabei gegen den von ihm selbst angeführten Wortlaut des Satzes:

„Wenn man die Deformationsarbeit eines elastischen Körpers in einer Funktion der *„äufseren"* Kräfte ausdrückt, so giebt der Differential-Quotient dieses Ausdrucks in Bezug auf eine *dieser* Kräfte ...."

Man beachte wohl, der Satz spricht hier nur von den „äufseren" Kräften, und Herr Weingarten wendet ihn auf eine der Auflagerkräfte an, die nicht zu den äufseren Kräften gerechnet werden können. Dafs dann ein falsches Resultat herauskommt, kann nicht Wunder nehmen. Offenbar handelt es sich hier nur um ein Mifsverständnis im Wortgebrauche, das entweder von mir durch ungenaue Ausdrucksweise oder von Herrn Weingarten durch flüchtiges Lesen verschuldet ist. In diesem Zweifelsfalle will ich die Schuld immerhin auf mich nehmen.

Die Einwendungen des Herrn Weingarten gegen die §§ 63^a und 63^b sind zu unbestimmt, als dafs ich mich über sie äufsern könnte; ich vermag weder einzusehen, dafs ich selbst einen Fehler begangen hätte, noch, wo sich Herr Weingarten geirrt haben könnte, um zu seinem Widerspruche zu gelangen.

Etwas günstiger liegt die Sache bei § 65, da Herr Weingarten hier eine im Gegensatze zur meinigen stehende, bestimmte Behauptung aufstellt, die ich leicht widerlegen zu können glaube. Herr Weingarten sagt:

„Unter dieser Voraussetzung (dafs sich die Verschiebungskomponenten im ganzen vom Körper erfüllten Raum nach der Stetigkeit ändern) sind daher Eigenspannungen des Körpers, der dem Einflusse äufserer Kräfte entzogen ist, unmöglich. Dagegen sind sie möglich bei Flächen-Diskontinuitäten

Digitized by Google

der Verschiebungen. Die Meinung des Verfassers, dafs „etwaige" Eigenspannungen durch die Theorie nicht berührt würden, ist daher unzutreffend."

Dem gegenüber mache ich darauf aufmerksam, dafs man z. B. in einem Lampencylinder durch einseitige Erwärmung so starke Eigenspannungen hervorrufen kann, dafs der Bruch durch sie herbeigeführt wird. Ähnlich liegt es mit den sogenannten „Gufsspannungen". Glaubt nun Herr Weingarten wirklich, dafs das Auftreten der Eigenspannungen in diesen Fällen nur durch die von ihm genannten Diskontinuitäten erklärt werden könne, oder glaubt er auch nur, dafs es überhaupt physikalisch durchführbar wäre, durch eine darauf eingerichtete Art des Erwärmungsvorgangs solche Diskontinuitäten absichtlich herbeizuführen? Wenn Herr Weingarten die Frage bejaht, sehe ich mich zwar nicht geschlagen, aber jede Möglichkeit zu einer Verständigung mit ihm über diese Frage ausgeschlossen. Denn für mich ist die Festigkeitslehre angewandte Naturwissenschaft und nicht reine Mathematik.

Hinsichtlich der „dickwandigen Röhren" verweise ich der Kürze halber auf die Bemerkungen am Schlusse meiner Entgegnung.

Nun folgt die Besprechung der Dynamik, die in der Kritik der von mir gegebenen Ableitung der Lagrangeschen Gleichungen gipfelt. Da Herr Weingarten hier die Vorführung eines Beispiels vermifst und das später folgende Beispiel des physischen Pendels nicht gelten läfst, weil er meint, dafs ich bei ihm von ganz anderen Gleichungen, als den von mir abgeleiteten, ausgegangen wäre, mögen hier die Entwickelungen, die er kritisiert, von vornherein an der Hand dieses Beispiels durchgegangen werden. Für ein Pendel, dessen Massen in einer zur Aufhängeachse senkrecht stehenden Ebene ausgebreitet sind, lautet Gl. (169)

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 \cos q + V\mathfrak{r}_0\mathfrak{k} \cdot \sin q. \tag{169}$$

Die einzige hier vorkommende allgemeine Koordinate q stellt den Winkel dar, den das Pendel zur gegebenen Zeit mit der Normallage bildet, und $\mathfrak{k}$ bedeutet einen in der Richtung der Aufhängeachse gezogenen Einheitsvektor. Für $\mathfrak{v}$ erhält man

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = (-\mathfrak{r}_0 \sin q + V\mathfrak{r}_0\mathfrak{k} \cdot \cos q)\frac{dq}{dt}. \tag{170}$$

Durch Quadrieren findet man hieraus

$$\mathfrak{v}^2 = (-\mathfrak{r}_0 \sin q + V\mathfrak{r}_0\mathfrak{k} \cdot \cos q)^2 \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \mathfrak{r}_0^2 \left(\frac{dq}{dt}\right)^2,$$

und wenn man dies in den Ausdruck für L einsetzt, erhält man

$$L = \tfrac{1}{2}\sum m\mathfrak{r}_0^2 \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\theta\left(\frac{dq}{dt}\right)^2, \tag{171}$$

falls man unter θ das Trägheitsmoment des Pendels versteht. Ich denke, Herr Weingarten wird jetzt schon erkennen, dafs der Irrtum, der offenbar nur durch Ungewandtheit im Rechnen mit Vektoren zu erklären ist, auf seiner Seite liegt.

Die Rüge, die mir Herr Weingarten bei dem „Problem von Glocke und Klöppel" zu Teil werden läfst, scheint auf einer unvorsichtigen Ausdrucksweise zu beruhen, die mir Herr Weingarten als Fehler angerechnet hat. Dafs ich Herrn Veltmann nicht nannte, steht übrigens in Überein-

Digitized by Google

stimmung damit, dafs ich nur bei besonders wichtigen oder bei ganz neuen Untersuchungen auf die Quellen zurückgriff und sie citierte. Freilich hätte ich, wie sich nachher zeigen wird, durch genauere Quellenangaben Herrn Weingarten vor einem argen Mifsgriffe bewahren können, und ich will daher nicht leugnen, dafs das Unterlassen sorgfältiger Quellenangaben zum mindesten für manche meiner Leser einen Mangel meines Buches bedeutet.

Nun kommt Herr Weingarten zur Hydrodynamik. Zu den Definitionen der Wirbelbewegung und der wirbelfreien Bewegung sagt Herr Weingarten:

„Aber jeder Stromfaden von endlicher oder unendlich kleiner Dicke bildet wiederum einen ringförmigen mit bewegter Flüssigkeit gefüllten Raum wie das ganze ursprüngliche Rohr; also ist der Sitz des Wirbels an der Begrenzung jedes Wirbelfadens, also überall im Rohr."

Dem gegenüber bemerke ich, dafs man eine Definition auf ihre Zulässigkeit nur dadurch prüfen kann, dafs man die nach ihrer Anweisung gebildeten Folgerungen ohne willkürliche und mit ihr im Widerspruche stehende Zuthaten durchführt. Dagegen fehlt Herr Weingarten, indem er bei dem Vergleiche des Stromfadens mit dem ganzen Rohre die ganz verschiedenen Grenzbedingungen aufser Acht läfst, auf die es nach meiner Definition grade ankommt. Steckt man einen rechteckigen Integrationsweg ab, von dem eine Seite diesseits, die gegenüber liegende jenseits der Grenzfläche liegt, so ist das Linienintegral im einen Falle Null, im andern von Null verschieden. Die Folgerungen des Herrn Weingarten können daher aus meiner Definition nicht gezogen werden.

Im übrigen handelt es sich hier um Definitionen, die man nach Belieben so oder auch anders fassen kann, so lange sie nur in sich widerspruchsfrei bleiben. Dafs meine Definition, im Gegensatze zur Meinung des Herrn Kritikers, widerspruchsfrei durchgeführt werden kann, dürfte sich aus den vorhergehenden Bemerkungen bereits erkennen lassen. Ich möchte nur noch darauf hinweisen, dafs der physikalische Hergang einer Wasserströmung längs des einzelnen Stromfadens, sobald dieser, um wirklich gleiche Verhältnisse mit dem ganzen Rohre herzustellen, von festen Wänden (oder auch von ruhendem Wasser) umgeben wird, selbstverständlich ganz anders ausfällt, als wenn der Stromfaden nur einen Bestandteil der ganzen strömenden Wassermasse bildet. Bei der idealen, reibungsfreien Flüssigkeit wäre dies zwar anders; man wird aber immerhin verständlich finden, dafs ein Techniker bei der Auswahl seiner Definitionen, sofern nicht zwingende Gründe dagegen sprechen, auf solche Umstände gern von vornherein Rücksicht nimmt.

Nun folgt eine Einwendung, die ich endlich einmal ohne jede Einschränkung als richtig anerkennen kann. Der Beweis des Lagrangeschen Satzes, von dem Herr Weingarten spricht, war in der That in der 1. Auflage des 4. Bandes, die Herrn Weingarten allein vorliegen konnte, ganz fehlerhaft. In der jetzt gerade erschienenen Neuauflage ist die Stelle geändert, so dafs die durchaus zutreffende Rüge in Zukunft fortfallen kann.

Ganz anders steht es aber wieder mit der Behandlung, die Herr Weingarten dem Satze über die widerstandslose Bewegung eines Körpers von *beliebiger Gestalt* in einer reibungslosen Flüssigkeit zu Teil werden läfst. Er begnügt sich damit, seine Meinung durch ein „sic" kundzugeben, das dem Zusammenhange nach nur dahin gedeutet werden kann, dafs Herr

Digitized by Google

Weingarten nicht nur den Satz und seinen Beweis für falsch hält, sondern ihn auch gar nicht einmal der Mühe einer Widerlegung wert erachtet.

Ich berufe mich, um meine Ansicht zu verteidigen, nur ungern auf das Urteil von anderen. Einer so wegwerfenden Behandlung gegenüber bleibt mir aber kein anderes Mittel. Ich mufs daher erklären, dafs der Satz auch von der Autorität Kirchhoffs getragen wird und längst in die anerkannten Lehrbücher der Hydrodynamik übergegangen ist. Es wird genügen, wenn ich hier eine Stelle aus Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1895, S. 177 anführe:

„Hence, as was first pointed out by Kirchhoff, there are for *any solid* three mutually perpendicular directions of permanent translation; that is to say, if the solid be set in motion parallel to one of these directions, without rotation, and left to itself, it will continue, so to move."

Die Stelle bezieht sich auf die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit und enthält schon eine Seite des von Herrn Weingarten von oben herab behandelten Satzes. Das Weitere möge man dort nachlesen; man wird dann auch finden, dafs selbst mein Beweis dem von Kirchhoff in den Grundzügen nachgebildet ist, wenn er auch, da die ganze Stelle in meinem Buche nur eine halbe Seite einnimmt, mehr andeutet, als streng durchführt.

Herr Weingarten bemerkt zum Schlusse, dafs das von ihm vorgebrachte Material nur einen kleinen Teil dessen ausmache, was in meinem Werke zu tadeln sei. Immerhin darf ich wohl annehmen, dafs er die Auswahl schon so getroffen haben wird, wie sie ihm für seinen Zweck am günstigsten erschien. Ich glaube daher nicht befürchten zu müssen, dafs eine Zusammenstellung anderer Stichproben ein für mich wesentlich ungünstigeres Resultat liefern könnte, als es jetzt vorliegt. Freilich will ich damit keineswegs sagen, dafs nicht an gar manchen Stellen meines Buches Angriffspunkte zu Bemängelungen für einen strengen Beurteiler zu finden wären. Bei der Abfassung eines Lehrbuches für den ersten Unterricht des Lesers (und zumal des für allzu spitzfindige Betrachtungen wenig empfänglichen Technikers) mufs man sich aber von ganz anderen Rücksichten leiten lassen, als von der steten Sorge, einem angriffslustigen Kritiker jede Gelegenheit oder selbst nur den Vorwand zu einem Einwande abzuschneiden. Ich hoffe, der billig denkende Leser wird dies zur Entschuldigung gelten lassen, wenn ihm hie und da eine Stelle wegen unzureichender Strenge nicht recht gefällt. Wirkliche Fehler will ich ja damit natürlich nicht bemänteln; diese werde ich gerne anerkennen und sie späterhin abstellen, sobald ich auf sie aufmerksam gemacht werde. A. Föppl.

Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauſs-Weber-Denkmals in Göttingen, herausgegeben von dem Fest-Komitee. Inhalt: **D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. E. Wiechert, Grundlagen der Elektrodynamik.** 92 und 112 Seiten. Leipzig 1899, B. G. Teubner.

Bei den grofsen Erfolgen, welche im Laufe des letzten Jahrhunderts in der Begründung der Nicht-Euklidischen Geometrie gewonnen wurden, steht zufolge der neuesten historischen Forschungen Gaufs' Name in allererster Reihe der auf diesem Gebiete erfolgreichen Forscher. Es ist deshalb

Digitized by Google

eine sehr passende Ehrung des grofsen Mathematikers, wenn Herr Hilbert bei Gelegenheit der feierlichen Enthüllung seines Denkmals als Festschrift eine Abhandlung darbietet, in welcher die Grundlagen der Geometrie allgemein behandelt werden. Es liegt in der Natur der Sache begründet, dafs das Bestreben, die Geometrie auf Grund eines Systems widerspruchsloser und ausreichender Axiome logisch aufzubauen, später erwachte, als eine entsprechende Behandlung der Grundlagen der Arithmetik. Geometrischerseits stehen diese Untersuchungen noch jetzt im Flusse der Entwicklung, wie die dem letzten Jahrzehnt angehörenden Arbeiten von Killing, Schur, Veronese und zahlreicher weiterer Forscher zeigen. Dafs Herr Hilbert seine eigenen Untersuchungen auf diesem Gebiete allgemein zugänglich gemacht hat, wird bei der ganz hervorragenden logischen und kritischen Begabung, über welche der Verfasser verfügt, allgemein interessieren. Da es sich hierbei um Untersuchungen handelt, welche keine besonderen Vorkenntnisse erfordern, und welche insbesondere auch für den Lehrer der elementaren Geometrie von grundlegender Wichtigkeit sind, so wird es gestattet sein, auf den Inhalt der Hilbertschen Abhandlung noch etwas ausführlicher einzugehen.

Herr Hilbert ordnet die gesamten Axiome der Geometrie in fünf Gruppen an, die er durch die Benennungen „Axiome der Verknüpfung", „Axiome der Anordnung", „Axiome der Parallelen", „Axiome der Kongruenz" und „Axiom der Stetigkeit" bezeichnet. Die dritte und die fünfte Gruppe bestehen hier je nur aus einem einzelnen Axiome, die auch das „Euklidische" bez. das „Archimedische" Axiom heifsen. Die Unabhängigkeit des Euklidischen Axioms von den übrigen und die daraus entspringende Möglichkeit der „Nicht-Euklidischen" Geometrie sind bekannt. Überraschender dürfte die Möglichkeit einer „Nicht-Archimedischen" Geometrie sein. Das Archimedische Prinzip wird so definiert: A_1 sei ein Punkt einer Geraden, der zwischen den Punkten A und B der gleichen Geraden gelegen sei. Weitere Punkte A_2, A_3, $\cdots$ sollen so auf dieser Geraden fixiert werden, dafs A_1 zwischen A und A_2, A_2 zwischen A_1 und A_3 u. s. w. gelegen sind, und dafs die Strecken AA_1, A_1A_2, A_2A_3, $\cdots$ alle einander gleich sind. Das Axiom sagt alsdann aus, es gebe einen Punkt A_n in der fraglichen Reihe, so dafs B zwischen A und A_n liegt.

Es gelingt dem Herrn Verfasser, die Unabhängigkeit dieses Axioms von den übrigen zu zeigen und damit die Möglichkeit einer Nicht-Archimedischen Geometrie darzuthun. Der Verfasser benutzt ganz wie in der gewöhnlichen analytischen Geometrie des Raumes ein System von drei Gröfsen (x, y, z) als Repräsentanten eines Punktes und ein System von vier Gröfsen (u, v, w, r), die nicht durchgängig verschwinden, als Repräsentanten einer Ebene, wobei durch

$$ux + vy + wz + r = 0$$

zum Ausdruck kommen soll, dafs der Punkt (x, y, z) in der Ebene (u, v, w, r) gelegen ist. Die $x, y, \cdots, r$ sind reelle Gröfsen, für welche jedoch die Begriffe des „Gröfser" und „Kleiner" nicht in der gewöhnlichen Weise definiert sind. Man bilde nämlich, unter t eine reelle Variable verstanden, das System aller Gröfsen, welche aus t durch rationale Rechnungen und die irrationale Operation $\sqrt{1 + \omega^2}$ entstehen, wenn ω irgend

Digitized by Google

eine bereits gebildete Größe ist. Das System dieser algebraischen Funktionen von t stellt eine abzählbare Menge dar, in der die rationalen Rechnungen eindeutig ausführbar sind; diesem System von Größen sollen die $x, y, \cdots, r$ entnommen sein. Eine einzelne Größe des Systems hat als algebraische Funktion von t nur endlich viele Nullpunkte und ist infolge dessen für hinreichend große Werte t entweder nur positiv oder nur negativ. Nun soll $a > b$ oder $a < b$ heißen, je nachdem $(a - b)$ für hinreichend große t positiv oder negativ ist. Ist n eine ganze rationale Zahl, so ist hiernach $(n - t)$ beständig negativ, woraus die Nichtgültigkeit des Archimedischen Prinzips sofort entspringt. Dagegen zeigt sich, daß aus den oben definierten „Punkten" und „Ebenen" eine Geometrie entspringt, in welcher die übrigen Axiome gelten.

Bei den weiteren Entwickelungen, welche vornehmlich Euklids Lehre von den Proportionen und die Lehre von den Flächeninhalten betreffen, stehen die Sätze von Pascal und Desargues im Mittelpunkt. Pascals Satz wird nur auf einen in zwei Gerade zerfallenden Kegelschnitt bezogen. Sein Beweis wird zunächst unabhängig vom Axiom der Stetigkeit geführt. Doch ist dieser Satz auch beweisbar, wenn man an Stelle der Kongruenzaxiome das Archimedische Axiom als gültig ansieht. Dagegen fällt der Pascalsche Satz, falls man sowohl von den Kongruenzaxiomen als von dem Stetigkeitsaxiom absieht. Eine „Nicht-Pascalsche" Geometrie, in der die Axiome der Verknüpfung, der Anordnung und der Parallelen gelten, ist demnach auch eine „Nicht-Archimedische".

Der Satz von Desargues sagt aus, daß, wenn die Seiten zweier Dreiecke in der Ebene paarweise parallel sind, die drei Verbindungsgeraden korrespondierender Ecken durch einen Punkt laufen oder parallel sind. Zum Beweise desselben sind, falls man sich auf Betrachtungen in der Ebene beschränkt, die Kongruenzaxiome notwendig. Im weiteren Verfolg der sich an den Desarguesschen Satz anschließenden Untersuchung wird eine Rechnung mit Strecken, die auf zwei sich schneidende Geraden vom gemeinsamen Schnittpunkte aus abgetragen sind, ausgebildet. Der Inbegriff dieser Strecken läßt sich auch als ein System komplexer Zahlen auffassen, für welches sämtliche Rechenvorschriften der elementaren Arithmetik außer dem kommutativen Satze der Multiplikation und dem Archimedischen Satze gelten Dieses Zahlensystem ermöglicht den Aufbau einer räumlichen Geometrie, in der die Axiome der ersten drei Gruppen alle giltig sind. Hier zeigt sich dann das bemerkenswerte Resultat, daß bei den in dieser räumlichen Geometrie enthaltenen ebenen Geometrien der Desarguessche Satz stets gilt, so daß sich der Satz von Desargues für die ebene Geometrie als „Resultat der Elimination der räumlichen Axiome" darstellt.

Der letzte Teil der Abhandlung bespricht geometrische Konstruktionen auf Grund der fünf Axiomgruppen, wobei namentlich die Entwicklung über die Ausführbarkeit geometrischer Konstruktionen mittelst „Lineals und Streckenübertragers" interessieren wird.

In dem zweiten Teile der vorliegenden Festschrift, welcher der Ehrung Wilhelm Webers gilt, hat Herr Wiechert die Grundlagen der Elektrodynamik behandelt, ein Gebiet, in dessen Fortentwicklung der Verfasser selbst als erfolgreicher Forscher eingegriffen hat. Auch die Wahl dieses Themas bei der genannten festlichen Gelegenheit ist eine sehr treffende

Digitized by Google

gewesen. War doch durch die Untersuchungen W. Webers über das Verhältnis der elektrostatischen zur elektrodynamischen Einheit die überraschende und oft genannte Beziehung zur Lichtgeschwindigkeit aufgedeckt worden, wodurch der erste Anstofs zu der glänzenden Entwicklung der modernen Elektrizitätstheorie gegeben war. Es handelt sich dabei um jene Theorie, in welcher Faradays Anschauungen von der dielektrischen Polarisation (zur Vermeidung der Hypothese von der Fernwirkung) und weniger Maxwells Hypothese über das Wesen der Elektrizität als einer inkompressiblen Flüssigkeit, als vielmehr seine ebenso einfachen wie universellen elektrodynamischen Grundformeln und seine Durchführung der Vereinigung von Elektrodynamik und Optik auf der Grundlage der allgemeinen Mechanik das vielbewunderte Fundament abgeben. Aber diese Theorie ist auch heute noch im vollen Flusse der Entwicklung begriffen. Handelt es sich doch bei Maxwell selber nur erst um die Formulierung der Grundprinzipien in hervorragend einfacher Gestalt, während die weiteren Ausführungen und die Fortentwicklung seiner Ideen anderen Forschern überlassen blieb. Die Untersuchungen von Hertz, Helmholtz, H. A. Lorentz, Boltzmann und vielen anderen haben hier wesentliche Fortschritte gebracht. Hier schliefsen sich nun auch die eigenen elektrodynamischen Untersuchungen des Herrn Verfassers an, welche den Entwicklungen von Lorentz am nächsten stehen, aber unabhängig von den letzteren ausgeführt wurden, und welche sich namentlich dadurch von den sonstigen hierher gehörenden Untersuchungen unterscheiden, dafs sie auf die molekulare Konstitution der Materie Rücksicht nehmen. Es wird besonders interessieren, dafs der Verfasser bei seinen weiteren Ausführungen der Maxwellschen Theorie schliefslich wieder zur alten Vorstellung der beiden elektrischen Materien zurückkommt, einer Anschauungsweise, die hier natürlich in sehr vertiefter Gestalt wiederkehrt. Auf die einzelnen und namentlich die mathematischen Ausführungen der Abhandlung, deren Verständnis doch eine gröfsere Reihe von Vorkenntnissen wünschenswert macht, einzugehen, ist hier nicht der Ort. Es möge also genügen, mit den vorstehenden kurzen Andeutungen auf die wertvolle Wiechertsche Abhandlung aufmerksam gemacht zu haben. FRICKE.

Ernst Pascal. Die Variationsrechnung. Autorisierte deutsche Ausgabe von A. Schepp. VI + 146 Seiten. Leipzig 1899, Teubner.

Es handelt sich um eine deutsche Übersetzung des ersten Teiles des in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 43, Seite 147 der historisch-litterarischen Abteilung angezeigten Werkes. Das Erscheinen einer deutschen Ausgabe dieses Werkes ist um so interessanter, als sich dasselbe mit dem jüngst herausgegebenen Lehrbuch der Variationsrechnung von Kneser sehr gut ergänzt. Kommen im letzten Buche in ganz hervorragender Weise die neueren strengen Methoden von Weierstrafs zur Geltung, so steht bei Pascal eine organisch gegliederte Darstellung der älteren Entwicklung der Variationsrechnung im Vordergrunde. Die Übertragung ist durch Herrn Schepp gewandt durchgeführt, und die Verlagsfirma hat das Buch mit bekannter Güte ausgestattet. FRICKE.

Digitized by Google

W. de Tannenberg. Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différentiel. 192 Seiten. Paris 1899, A. Hermann.

Für das Studium der Differentialgeometrie sind in der deutschen Lehrbuchlitteratur verschiedene höchst brauchbare Werke vorhanden. Die von M. Lukat ausgeführte Übersetzung der Vorlesungen von Bianchi ist jüngst vollständig geworden und stellt ein eingehendes Spezialwerk über die Differentialgeometrie dar. Für die Einführung in dieses Gebiet ist Joachimsthals wohlbekanntes Werk „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung" höchst brauchbar.

Ist hiernach ein neues Buch über Differentialgeometrie für unser deutsches Bedürfnis nicht gerade eine Notsache gewesen, so wird man ein Werk, welches den fraglichen Gegenstand noch etwas kompendiöser als Joachimsthal behandelt, immer doch gern willkommen heifsen, wenn es, wie das hier vorliegende Buch, klar und übersichtlich abgefafst ist.

Der Verfasser gruppiert seinen Stoff in fünf Abschnitte, wobei in den beiden ersten die gestaltlichen Verhältnisse der Raumkurven und der krummen Oberflächen besprochen werden, während in den drei letzten Abschnitten die metrischen Eigenschaften der Raumkurven, der Regelflächen und der nichtgeradlinigen Flächen zur Behandlung kommen.

Die beiden descriptiven Abschnitte erstrecken sich auf die Tangenten und osculierenden Ebenen der Raumkurven, auf die Tangentialebenen der Oberflächen und behandeln auch die Herstellung von Oberflächen aus Geraden- bez. Kurvenscharen, sowie auch die einhüllenden Flächen bei einfach und zweifach unendlichen Flächenscharen. Auch werden die ersten Definitionen über abwickelbare Flächen, sowie über Strahlenkongruenzen und Komplexe gegeben.

Die metrische Betrachtung der Raumkurven erstreckt sich auf die doppelte Krümmung derselben, auf den Krümmungskreis, auf die Darstellung der Koordinaten x, y, z der Kurvenpunkte als Funktionen der Bogenlänge s und dergleichen. Als Anwendungen werden diejenigen Kurven betrachtet, bei denen beide Krümmungen konstant sind, sowie diejenigen, bei denen die erste Krümmung eine gegebene Funktion der Kurvenlänge s ist.

Der Abschnitt über Regelflächen zerlegt sich natürlich in zwei Teile, die nicht-abwickelbaren und die abwickelbaren Flächen betreffend. Am umfänglichsten ist der fünfte Abschnitt, welcher die allgemeine Betrachtung der metrischen Eigenschaften der krummen Oberflächen giebt. Es handelt sich zunächst im wesentlichen um die Entwicklung der Gaufsschen Theorie der Flächenkrümmung. Es werden die sechs charakteristischen Funktionen, welche die Koeffizienten der beiden fundamentalen quadratischen Differentialformen, sowie die zwischen ihnen bestehenden Relationen behandelt. Angewandt werden die allgemeinen Ansätze der Krümmungstheorie insbesondere für die Behandlung der nächstliegenden Beispiele von Kurven auf gegebenen Flächen, der geodätischen Linien, der Krümmungslinien u. a.

In den beiden letzten Kapiteln folgen noch zahlreiche spezielle Ausführungen, welche Rotationsflächen, abwickelbare Flächen und Flächen zweiten Grades betreffen, auch noch eingehendere Entwickelungen über die zugehörigen quadratischen Linien und verwandte Gegenstände bringen.

Fricke.

Digitized by Google

Bernhard Riemann. Elliptische Funktionen. Vorlesungen. Mit Zusätzen herausgegeben von **Hermann Stahl.** VIII + 144 Seiten mit Figuren im Text. Leipzig 1899, Teubner.

Mit der Herausgabe einer Reihe bisher unzugänglicher funktionentheoretischer Vorlesungen Riemanns wird einem berechtigten und zweifellos allgemeinen Wunsche der Mathematiker entsprochen. Während sich die Herausgabe von Vorlesungen über Abelsche Funktionen und solche über hypergeometrische Funktionen in Vorbereitung befindet, liegen die Vorlesungen über elliptische Funktionen in der Bearbeitung von Herrn H. Stahl bereits vor. Riemann hat zweimal in verschiedener Form Vorlesungen „über Funktionen einer veränderlichen komplexen Gröfse, insbesondere elliptische und Abelsche" gehalten, nämlich im Wintersemester 1855/56 und Sommersemester 1856, sodann das zweite Mal im Wintersemester 1861/62 und im darauf folgenden Sommersemester. Der Abschnitt über die elliptischen Funktionen ist hierbei so selbständig gefafst, dafs seine gesonderte Herausgabe rätlich erschien.

Der Kenner der Theorie der elliptischen Funktionen wird von der Riemannschen Vorlesung mit dem gröfsten Interesse Einsicht nehmen, obschon die von Riemann geschaffenen funktionentheoretischen Anschauungen und Methoden längst ihr Recht in der Theorie der elliptischen Funktionen gewonnen haben, auch ohne dafs Riemanns eigene Behandlung dieser Funktionen zur allgemeinen Kenntnis gekommen wäre. Der ausgedehnte Gebrauch anschaulicher Überlegungen kommt gleich von Anfang an, wo Riemann an den Begriff der doppeltperiodischen Funktionen anknüpft und dann sogleich in interessantem Übergange zum Integral erster Gattung und zur zweiblättrigen Fläche gelangt, zur vollen Geltung. Die Definition der Perioden durch „beliebige" „geschlossene" Wege auf der zweiblättrigen Fläche kennt man natürlich längst als eine für Riemann wesentliche Auffassung. Bemerkenswert sind vor allem die sehr ausgedehnten Erörterungen über die Abbildung der zweiblättrigen Fläche auf ein Parallelogramm (S. 20 ff.). Die Abbildung der Querschnittränder auf die Parallelogrammseiten nimmt hierbei das Interesse des Autors fast vollständig in Anspruch, während in der Weiterführung der Abbildung auf das Innere des Parallelogramms eine besondere Schwierigkeit nicht erblickt wird. Auch ist charakteristisch, dafs Riemann bei Diskussion dieser Abbildung dem allgemeinen Falle eines beliebigen komplexen Moduls k^2 aus dem Wege geht und die Betrachtung auf reelle k^2 des Intervalls $0 < k^2 < 1$ einschränkt. Freilich ist diese letztere Beschränkung unzweifelhaft nur zur Erleichterung der Auffassung der Vorlesung geschehen; denn es ist ganz selbstverständlich, dafs Riemann in dieser Hinsicht die volle Allgemeinheit der Anschauung besessen hat. Natürlich kommen auch Stellen vor, wo Riemann hinter der Genauigkeit der Überlegung, welche man heute anwenden würde, zurückbleibt. Man vergl. z. B. die Art, wie das Verhalten der elliptischen Funktionen im Unendlichen (S. 3 und 37) zu Schlufsfolgerungen benutzt wird. Als Gestalt des Normalintegrals erster Gattung wird:

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

benutzt, die man eben deshalb mit vollem Rechte als die Riemannsche

Digitized by Google

Normalform des elliptischen Integrals erster Gattung bezeichnet. Die Angriffe, welche gegen diese Terminologie gelegentlich erhoben wurden, erweisen sich daraufhin als unbegründet. Die Entwicklung der Theorie wird von Riemann soweit gefördert, dafs auch die Grundlagen der Lehre von der Transformation der elliptischen Funktionen entwickelt werden. In einem für sich stehenden letzten Teile der Vorlesung wird dann noch einmal die ganze Theorie auf Grundlage der Thetafunktionen entwickelt. Das erinnert natürlich sofort an Jacobis bekannte Vorlesungen; doch hat Riemann nach der Meinung der in dieser Frage kompetentesten Beurteiler die fraglichen Vorlesungen Jacobis nicht gekannt.

Die Art des Riemannschen Vortrags entsprach, wenn auch gegen seinen Willen, öfters der grofsen Schnelligkeit, mit der er befähigt war, Schlufsketten zu übersehen. Herr Stahl hat in dieser Hinsicht durch Einfügung kurzer Fufsnoten sowie durch Erläuterungen im Text das Verständnis sehr erleichtert. Auch erschöpfen natürlich Riemanns Vorlesungen ihren Gegenstand in keiner Weise. Um dieselben in etwas zu ergänzen, sowie namentlich um das Studium der Vorlesungen Riemanns auch solchen Lesern zugänglich zu machen, welche nur erst die Grundlagen der Funktionentheorie kennen, hat der Herr Herausgeber in der zweiten Hälfte des Buches eine Reihe selbständiger Erläuterungen und Ergänzungen verfafst, zu denen er als ausgezeichneter Kenner der elliptischen und Abelschen Funktionen besonders berufen schien. Dieselben schliefsen sich in der Hauptsache dem Gange der Riemannschen Vorlesung an. Für sich steht der letzte Abschnitt der Ergänzungen, in welchem Herr Stahl die Grundlagen der Weierstrafsschen Theorie der elliptischen Funktionen und ihre Beziehung zur Jacobischen Theorie erörtert. FRICKE.

Otto Stolz. Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Dritter Teil: Die Lehre von den Doppelintegralen, eine Ergänzung zum ersten Teile des Werkes. Mit 41 Figuren im Text. VIII + 296 Seiten. Leipzig 1899, Teubner.

In dem in der Überschrift genannten Buche giebt Herr Stolz einen erschöpfenden Bericht über die Untersuchungen zur Theorie der Doppelintegrale. Es ist dies ein Gegenstand, der erst in dem letzten Jahrzehnt zu einem befriedigenden Abschlufs gebracht ist, insbesondere durch die Untersuchungen von de la Vallée-Poussin über die Verwandlung eines uneigentlichen Doppelintegrals in ein zweimaliges Integral. Die ganze Lehre von den mehrfachen Integralen gehört recht eigentlich in das Gebiet der „Präzisionsmathematik", welche neuerdings wieder sehr in den Vordergrund gerückt ist, und der die Untersuchungen des Verfassers von jeher angehört haben. Diesem Standpunkt entspricht es, wenn die Grunddefinitionen hier überall in solcher Weise gegeben werden, dafs über keinen dabei in Betracht kommenden Gesichtspunkt eine Zweideutigkeit übrig bleibt. So wird beim Doppelintegral genau die Natur der Begrenzung desjenigen Bereiches festzulegen sein, auf den sich die Integration bezieht, sowie auch Eigenschaften der Funktion $f(x, y)$, welche zu integrieren ist. Die Existenztheoreme zunächst der eigentlichen Integrale, bei denen der Integrationsbereich ganz im Endlichen liegt, und bei denen Unstetigkeiten der zu

Digitized by Google

integrierenden Funktion weder im Innern noch auf dem Rande des Integrationsbereiches auftreten, werden mit aller Ausführlichkeit entwickelt. Im ersten Abschnitt wird übrigens die Theorie der eigentlichen zweimaligen Integrale $\int_b^{b'}(dy\int_a^{a'}f(x,\,y)\,dx)$ behandelt, bei denen die Grenzen durchaus endlich sind und die Funktion $f(x, y)$ an jeder Stelle des Bereiches $a \leq x \leq a'$, $b \leq y \leq b'$ stetig ist. Ist eine dieser Bedingungen oder sind beide nicht mehr erfüllt, behält aber das Integral dennoch eine (durch einen Grenzübergang zu definierende) feste Bedeutung, so spricht man von einem „uneigentlichen" zweimaligen Integrale, eine Benennung, die entsprechend auch bei den Doppelintegralen Verwendung findet. Die Benennung rechtfertigt sich deshalb, weil die uneigentlichen Integrale Ausdrücke sind, die einen Teil der Eigenschaften der eigentlichen Integrale besitzen. Festzustellen, inwieweit dies der Fall ist, unter welchen Umständen z. B. ein uneigentliches zweimaliges Integral Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Integration gestattet, ist natürlich ein Hauptgegenstand des Interesses. Sind in dem vorliegenden Buche die grundlegenden Entwicklungen über die genannten Fragen der Definition und Existenz etc. namentlich auch bei den uneigentlichen Doppelintegralen als der Hauptgegenstand der Darstellung angesehen, so finden sich daneben doch auch die Anwendungen berücksichtigt. Bei der Theorie der eigentlichen Doppelintegrale lag ein Eingehen auf die Sätze von Green und Cauchy nahe. Außerdem sowie außer einigen beiläufigen Anwendungen auf Eulersche Integrale u. a. sind aber in einem ausgedehnten Kapitel die wichtigen Anwendungen der Doppelintegrale auf Kubatur gesetzmäßig begrenzter Volumina und Komplanation krummer Oberflächen gegeben. Am Schlusse des Bandes sind einige Nachträge zu früheren Teilen des Stolzschen Werkes angefügt. Diese Nachträge betreffen ein paar kurze Mitteilungen aus der Mengenlehre, sowie vor allem ergänzende und verallgemeinernde Sätze über die Definition einfacher reeller Integrale. FRICKE.

Hermann Schubert. Elementare Arithmetik und Algebra. VI + 230 Seiten. Göschen-Leipzig 1899.

Nachdem die Verlagsbuchhandlung G. J. Göschen in Leipzig bereits in einer „Sammlung Göschen" eine größere Reihe „kleiner Leitfäden der Mathematik" herausgegeben hat, geht die gleiche Verlagsanstalt nunmehr im Verein mit Herrn Schubert in Hamburg an die Herausgabe einer weiteren Reihe mathematischer Lehrbücher, welche für einen etwas höheren Standpunkt als die „Sammlung Göschen" bestimmt sind. Von dieser „Sammlung Schubert", welche einstweilen auf zwanzig Bände geplant ist, und zu deren Durchführung die Herren Unternehmer eine Reihe namhafter Fachgenossen gewonnen haben, sind bisher sechs Bände erschienen. Die Ausstattung der in Originaleinband gebundenen Bändchen ist eine recht gefällige, sie sind in Oktavformat gedruckt und die Stärke der sechs erschienenen Teile schwankt zwischen 10 und 24 Bogen. Es ist zu hoffen, daß dies Unternehmen namentlich auch im Kreise der Techniker und Naturwissenschaftler, welche auf den Gebrauch mathematischer Kenntnisse angewiesen sind, für die Verbreitung und Befestigung dieser Kenntnisse sehr nützlich sein wird.

Digitized by Google

Herr Schubert giebt selber im Bande I seiner Sammlung eine Behandlung der elementaren Arithmetik und Algebra. Die reiche Erfahrung und das pädagogische Geschick des Verfassers haben ihn auf diesem Gebiete schon lange zu einem geachteten Schriftsteller gemacht. Die Umgrenzung des Stoffs entspricht ungefähr dem Umfange, in welchem die behandelten Gegenstände an unseren mittleren Schulen gelehrt werden. Der sechste Abschnitt (Potenzen, Wurzeln, Logarithmen) kommt etwas knapp weg. Doch sollen Gegenstände, welche man hier vermifst, wie kubische und biquadratische Gleichungen, geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung u. a., wie der Verfasser in der Vorrede mitteilt, in einem besonderen Bande behandelt werden.

Sehr dankenswert ist es, dafs der Verfasser eine Reihe historischer Notizen (S. 218 ff.) giebt, was sonst in den Büchern über elementare Arithmetik und Algebra nicht die Regel ist. FRICKE.

Gustav Holzmüller. Elemente der Stereometrie, erster Teil, **Lehrsätze und Konstruktionen.** XII + 383 Seiten mit 282 Textfiguren und einer Tafel. Göschen-Leipzig 1899.

Diese Behandlung der Stereometrie gehört zwar auch der „Sammlung Schubert" an (nämlich als Band IV); jedoch weicht dieselbe in ihrer Tendenz von den übrigen bisher erschienenen Bänden dieser Sammlung nicht unerheblich ab. Es ist doch unzweifelhaft der Sinn dieser ganzen Sammlung mit ihrer Gliederung in viele einzelne Bändchen, mathematische Disziplinen, welche inhaltlich als geklärt und dem Umfange nach als wohl abgerundet angesehen werden dürfen, in knapper und namentlich für das einführende und vielleicht auch selbständige Studium faſslicher Gestalt darzubieten. „Methodische Versuche" möchte man hier schon wegen des ausgesprochen pädagogischen Charakters der ganzen Sammlung ausgeschlossen sehen. Ein Buch über das, was man mit Fug und Recht als „Elemente der Stereometrie" ansehen darf, wird man natürlich in der Sammlung Schubert nicht vermissen wollen. Man möchte dasselbe als ein wichtiges Seitenstück der Bohnertschen Trigonometrie anreihen. Der Verfasser versteht indessen unter den „Elementen der Stereometrie" etwas ganz anderes; er wünscht getreu seinem auch bei anderen Gelegenheiten befolgten Standpunkte, mit „elementaren Methoden", d. h. unter Vermeidung der Hilfsmittel der höheren Analysis, in zahlreichen Gebieten der ebenen und räumlichen Geometrie möglichst weit zu kommen. Auf Grund dieses Standpunktes werden nun ausgedehnte Teile der darstellenden Geometrie, der projektiven Geometrie der Ebene und des Raumes, der Geometrie der Flächen und Kurven im Raume, der Krümmungstheorie u. s. w. behandelt, wobei natürlich die einzelnen Gegenstände bei dem knappen zur Verfügung stehenden Raume nicht immer ganz systematisch behandelt werden können. Wie hierbei die Abgrenzung gegen andere Bände der Sammlung, speziell gegen die von Herrn Schröder zu verfassende darstellende Geometrie, gedacht ist, kann erst nach Erscheinen dieser Bände beurteilt werden. Zu vermuten steht, dafs Schröder den gröfsten Teil der von Herrn Holzmüller behandelten Gegenstände auch für sich in Anspruch nehmen wird.

Digitized by Google

Ist hiernach Herrn Holzmüllers Buch mehr für einen schon etwas vorgeschrittenen Studierenden oder für solche Anfänger geeignet, welche sich einer erfahrenen Leitung erfreuen, so erkennt Referent gern an, dafs das Buch wegen seines aufserordentlich reichen und vielseitigen Inhaltes für solche Leser auch sehr interessant ist. Zahlreiche wichtige Anwendungen auf Krystallographie, Perspektive, Kartographie u. a. greifen belebend in die Entwicklung ein. Der Verfasser versteht es zugleich, die ältere und neuere Geschichte der zur Behandlung kommenden Gegenstände in geschickter Weise seiner Darstellung einzuflechten. Auch sind viele Citate auf moderne Autoren gegeben, welche ja freilich für den Leser von sehr ungleichem Werte sind.

Übrigens hat Referent das Fehlen eines Sachregisters namentlich bei dem vorliegenden Bande der Sammlung wiederholt bedauert. Durch Zufügung eines solchen Registers würde die Brauchbarkeit des Buches zum Nachschlagen unzweifelhaft sehr gefördert. Fricke.

P. Volkmann. Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. 370 S. Leipzig 1900, B. G. Teubner.

Die unter vorstehendem Titel herausgegebenen Vorlesungen des Verf., der gegenwärtig die theoretische Physik in Königsberg vertritt, entspricht naturgemäfs inhaltlich zum gröfseren Teile der F. Neumannschen „Einleitung in die theoretische Physik". Sie behandeln zunächst die gewöhnliche analytische Mechanik der Massenpunkte und starren Körper, jedoch nur so weit Anwendung höherer Mathematik (über die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung hinaus) nicht erfordert wird, also z. B. mit Ausschlufs des allgemeinen Rotationsproblems starrer Körper. Ein besonderer, für den Studierenden der Physik überaus nützlicher Abschnitt (IV) ist den „Anwendungen insbesondere der Flächensätze auf Methoden- und Instrumentenlehre der praktischen Physik" gewidmet; es werden darin die Besselschen Pendeluntersuchungen, die Theorie der Hebelwage, sowie die Schwingungen unifilar und bifilar aufgehängter Körper besprochen. — Es folgt dann als V. Abschnitt die Hydrostatik mit Einschlufs der Kapillarität; während Hydrodynamik und Aëromechanik gänzlich fehlen. Der Kapillaritätstheorie ist ein verhältnismäfsig grofser Raum gewidmet; dafs aber der Verf. hier mit der Besprechung seiner eigenen Beobachtungen über Steighöhen eine Polemik gegen andere Beobachter, insbesondere Quincke, verbindet, scheint dem Ref. doch nicht ganz am Platze zu sein. Anerkennenswert ist die Aufnahme eines Abschnittes (VI) über geophysikalische Fragen, worin die Probleme der Erdgestalt, der Schwereverteilung, des Druckes im Erdinnern, des Benzenbergschen Fallversuches sowie die Methoden zur Bestimmung der mittleren Erddichte behandelt werden. Nebenbei sei jedoch bemerkt, dafs bei ersterem Problem S. 313 die unrichtige Voraussetzung gemacht wird, bei relativ geringer Dicke der die starre Kugel bedeckenden Flüssigkeitsschicht könne die gravitierende Wirkung der letzteren vernachlässigt werden.

Digitized by Google

Der letzte Abschnitt (VII) enthält eine kurze Einführung in die allgemeinen Prinzipe der Mechanik, wobei der Verf. zum Schlufs auch zu den Darstellungen der Mechanik von Hertz und Boltzmann Stellung nimmt.

Was nun die im vorliegenden Werke gegebene Darstellung der Mechanik betrifft, so schliefst sich dieselbe, indem überhaupt die geschichtliche Entwicklung stark betont wird, derjenigen in Newtons „Prinzipien" an, welche der Verf. dahin charakterisiert, „dafs ihr Wert und ihre Festigkeit mehr auf einer gegenseitigen Stützung und rückwirkenden Versicherung der einzelnen Teile des Systems beruht, als auf einer einseitigen Aufführung auf ein von vornherein sozusagen gegebenes oder als gegeben angenommenes Fundament". Hiermit ist gemeint, dafs bei der Aufstellung allgemeiner Definitionen und Sätze mannigfaltige Bezugnahmen auf künftige Resultate vorweggenommen werden, wie umgekehrt die mannigfaltigsten Zurückverweisungen auf frühere Verfügungen und Festsetzungen statthaben müssen. So stellt z. B. der Verf. den Satz von der Erhaltung der Energie als allgemeines „Postulat" auf; dieses bietet aber in sich nicht die Mittel, dem Begriff der Energie von vornherein einen reellen Inhalt zu geben, sondern diese Mittel bieten sich erst bei deren Anwendung auf die Mannigfaltigkeit der Naturerscheinungen; und indem sich bei dieser wiederholten Anwendung des Postulats keine inneren Widersprüche zeigen, erhält dasselbe seine „rückwirkende Verfestigung".

Der Verf. legt bei seiner Darstellung den gröfsten Wert auf die erkenntnistheoretischen und methodischen Grundlagen. Er schickt daher der Vorlesung über Mechanik selbst, deren Inhalt oben kurz angegeben wurde, eine „Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis" voran, worin die methodischen Grundlagen und Regeln der Physik eingehend erörtert werden. Die hierin im Zusammenhang niedergelegten Ansichten des Verf. sind von demselben gröfstenteils schon seit 1892 in einer Reihe von Vorträgen und Abhandlungen entwickelt worden, so dafs ein näheres Eingehen darauf an dieser Stelle unterbleiben kann. — Besonders wegen dieser Einleitung und der Durchdringung der ganzen Darstellung der Mechanik mit erkenntnistheoretischer Kritik kann die Lektüre der Volkmannschen Vorlesung den Studierenden der Physik angelegentlichst empfohlen werden.

F. Pockels.

Digitized by Google

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze.

12. Mit dem symmetrischen System der Größen $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ sei die quadratische Form

$$\varphi = \sum_{\mu,\nu}^{1,m} a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

gebildet, deren Variable den Bedingungsgleichungen

$$\sum_{\mu}^{1,m} b_{\varrho\mu} x_\mu = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, r) \tag{1}$$

unterworfen sind; dabei sei $r < m$ und

$$\sum \pm b_{11} \cdots b_{rr} \lesseqgtr 0,$$

sodafs die Form φ durch die Variabeln $x_{r+1}, \cdots, x_m$ allein ausgedrückt werden kann:

$$\varphi = \psi(x_{r+1}, \cdots, x_m).$$

Es ist nun häufig erwünscht, den Charakter der Form ψ, insbesondere ob sie definit ist oder nicht, zu erkennen, ohne erst die Variabeln $x_1, x_2, \cdots, x_r$ eliminiert zu haben. Richelot hat auf Grund von Maximumsbetrachtungen (Astr. Nachr. **48** Nr. 1146, 1858) folgenden Satz bewiesen. Setzt man

$$D_\mu = \begin{vmatrix} 0 \cdots 0 & b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1\mu} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 \cdots 0 & b_{r1} & b_{r2} \cdots & b_{r\mu} \\ b_{11} \cdots b_{r1} & a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1\mu} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1\mu} \cdots b_{r\mu} & a_{\mu 1} & a_{\mu 2} \cdots & a_{\mu\mu} \end{vmatrix},$$

so ist die Form ψ definit, wenn die Größen D_m, D_{m-1}, $\cdots$, D_{r+1}, D_r alle dasselbe oder abwechselnde Vorzeichen haben.

Es wird die Aufgabe gestellt, dieses Resultat direkt und algebraisch abzuleiten; allgemeiner untersuche man die Beziehung zwischen den Vor-

Digitized by Google

zeichen der Grössen D_μ und den Anzahlen positiver und negativer Quadrate, welche auftreten, wenn man die Form ψ in eine Summe von Quadraten linearer Funktionen von $x_{r+1}, \cdots, x_m$ verwandelt.

Es wird also eine Verallgemeinerung der Untersuchungen gewünscht, welche für quadratische Formen mit unabhängigen Argumenten in Webers Lehrbuch der Algebra Bd. 1 (2. Aufl.) § 89 durchgeführt sind.

A. Kneser.

---

13. Die Bezeichnungen der Aufgabe **12.** festgehalten, sei die Form $\psi(x_{r+1}, \cdots, x_m)$ als Summe von P positiven und N negativen Quadraten linearer Funktionen darstellbar; dann nennt man neuerdings $P+N$ den Rang, $P-N$ die Signatur der Form ψ. Wir bezeichnen diese Zahlen auch als Rang und Signatur der Form φ bei den Bedingungsgleichungen (1). Es werde ferner, wenn $m > n > r$ ist, gesetzt

$$E_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} a_{\mu\nu} & b_{1\mu} \cdots b_{r\mu} & a_{\mu 1} \cdots a_{\mu n} \\ b_{1\nu} & 0 \cdots 0 & b_{11} \cdots b_{1n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ b_{r\nu} & 0 \cdots 0 & b_{r1} \cdots b_{rn} \\ a_{1\nu} & b_{11} \cdots b_{r1} & a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ a_{n\nu} & b_{1n} \cdots b_{rn} & a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix};$$

dann untersuche man die Beziehung, in welcher Rang und Signatur der Form φ bei den Bedingungen (1) zu Rang und Signatur der Form

$$\varphi_0 = \sum_{\mu\nu}^{1,n} a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

bei den Bedingungen

$$\sum_{\nu}^{1,n} b_{\varrho\nu} x_\nu = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, r)$$

sowie der Form

$$\Theta = \sum_{\sigma,\tau}^{1,m-n} E_{n+\sigma,\, n+\tau} u_\sigma u_\tau$$

stehen. Diese Beziehung ist für den Fall, dafs die Gleichungen (1) wegfallen, die Variabeln x_μ also unabhängig sind, von Frobenius (Crelles Journal **114**, 191. Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1894 I) angegeben; es zeigt sich dann, dafs die Signatur der Form φ die Summe der Signaturen der Form Θ und der Form

$$\frac{\varphi_0}{\Sigma \pm a_{11} \cdots a_{nn}}$$

ist, und dafs dieselbe Beziehung zwischen den Rangzahlen obwaltet.

Eine Beziehung, welche nach verschiedenen Richtungen als spezieller Fall der oben geforderten erscheint, habe ich zu Zwecken der Variationsrechnung abgeleitet. (Math. Ann. **51**, 329). A. Kneser.

Digitized by Google

14. L'hyperbole d'Apollonius relative à chacun des points d'une ellipse enveloppe une Kreuzcurve. Les points d'intersection des deux hyperboles d'Apollonius relatives à deux points conjugués de l'ellipse sont situés sur une Kreuzcurve homothétique à la précédente. E. N. Barisien.

---

15. La normale en un point M variable d'une ellipse de centre O rencontre le grand axe de l'ellipse en N. Le point N se projette en P sur OM; la perpendiculaire élevée en N à NM rencontre OM en Q. Montrer que chacune des droites NP et NQ est normale à une ellipse fixe. Trouver les lieux des points P et Q et calculer l'aire de ces courbes.

E. N. Barisien.

---

16. Démontrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{(a^2\cos^2\Theta - b^2\sin^2\Theta)^2(a^2\cos^2\Theta + b^2\sin^2\Theta)}{(a^4\cos^2\Theta + b^4\sin^2\Theta)^2}\,d\Theta$$

$$= (a^2+b^2)^2 \int_0^{2\pi} \frac{(a^2\sin^2\Theta + b^2\cos^2\Theta)\sin^2\Theta\cos^2\Theta\,d\Theta}{(a^4\sin^2\Theta + b^4\cos^2\Theta)^2} = \frac{\pi(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}.$$

E. N. Barisien.

---

17. Soit un déterminant, dont on considère une diagonale AB, et les lignes obliques, parallèles à cette diagonale

A . . . . . B

. . . . . .

. . . . . .

. . . . .

. . . .

. .

.

Le déterminant étant du n^e ordre, ces lignes ont $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1 termes.

Ceci posé, soient p, q, r, $\cdots$, z, t des nombres indéterminés quelconques, au nombre de $n-1$.

On multiplie les termes de la première ligne parallèle à AB par p, q, $\cdots$, t; ceux de la 2e, par pq, qr, $\cdots$, zt, et ainsi de suite, jusqu'au dernier terme (de l'angle) qui est multiplié par $pqr\cdots t$. Enfin, on divise chaque terme au-dessus de AB par le même nombre qui a servi de multiplicateur au terme symétrique.

Démontrer que le nouveau déterminant obtenu est équivalent au déterminant donné.

N. B. Cette transformation peut être précieuse dans certaines applications, à cause de l'indétermination des éléments p, q, $\cdots$, t.

C. A. Laisant.

---

18. Giebt es aufser den Achsenparallelen und den durch den Mittelpunkt einer Cassinischen Linie gehenden Geraden noch andere, deren

Digitized by Google

Schnittpunkte mit der Kurve durch quadratische Konstruktionen gefunden werden können? Wo liegen diese Geraden, und welches sind die Konstruktionen zur Bestimmung ihrer Schnitte mit der Cassinischen Linie?

Ed. Janisch-Prag.

19. Sind s', s'' ein Strahlenpaar der Rechtwinkelinvolution um die Ecke A eines Dreieckes ABC, sind ferner B', B'' die Projektionen von B auf s', s'', und heifsen B_1', B_1'' die Schnittpunkte der CA mit den Parallelen zur BC durch B', B'', so schneiden sich die Parallelen durch B_1', B_1'' zu bezw. s'', s' in einem Punkte des Feuerbachschen Kreises von ABC.

Ed. Janisch-Prag.

20. Soient un triangle ABC; x, y, z les coordonées normales d'un point M; X, Y, Z les coordonées tripolaires de ce point, c'est à dire les distances AM, BM, CM. Trouver le lieu des points M tels que $Xx = Yy$.

E. Lemoine.

21. Es seien $a_1, a_2, \cdots, a_{\varphi(n)}$ die $\varphi(n)$ zu einer natürlichen Zahl $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$ teilerfremden Zahlen $< n$; s_i bedeute die Summe der i-ten Potenzen der a, Π das Produkt der p_i, Π' das der Differenzen $p_i - 1$. Vermöge wirklicher Aufstellung der a ist zu zeigen, dafs:

$$2s_1 = n\varphi(n),\ 6s_2 = n\Pi'\left(\frac{2n^2}{\Pi} + (-1)^t\right),\ 4s_3 = n^2\Pi'\left(\frac{n^2}{\Pi} + (-1)^t\right).$$

Hieraus läfst sich folgern:

1) dafs s_1 durch n teilbar ist, excl. für $n = 2$;
2) dafs s_2 durch n teilbar ist, excl. für $n = 2$, 3, und wenn einer der Primfaktoren p gleich 3, die andern von der Form $3h + 2$ sind;
3) dafs s_3 durch n^2 teilbar ist, excl. $n = 2^\alpha$ und $n = 2^\alpha p_2^\beta$.

Zwischen s_1, s_2, s_3 besteht die homogene lineare Relation

$$2s_3 - 3ns_2 + n^2 s_1 = 0,$$

allgemein zwischen $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_{2l+1}$:

$$2s_{2l+1} - \binom{2l+1}{1} n s_{2l} + \binom{2l+1}{2} n^2 s_{2l-1} - \binom{2l+1}{3} n^3 s_{2l-2} + \cdots - \binom{2l+1}{2} n^{2l-1} s_2 + (2l+1) n^{2l} s_1 = 0.$$

W. Fr. Meyer.

22. Mit elementaren Hilfsmitteln ist nachzuweisen, dafs das unendliche Produkt $\lim_{n=\infty} \binom{m}{n}$ für $m + 1 > 0$ den Grenzwert Null, für $m + 1 < 0$ den Grenzwert ∞ besitzt.

Hieraus läfst sich für unendliche Produkte ein spezielles Konvergenzkriterium herleiten, das eine ersichtliche Analogie mit dem Raabeschen Konvergenzkriterium für unendliche Reihen darbietet: „Ist $\Pi_n = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n$ (π_i reell, > 0), so besitzt $\lim_{n=\infty} \Pi_n$ den Grenzwert Null resp. ∞, jenachdem der als existierend vorausgesetzte Grenzwert $\lim_{n=\infty} n \cdot \left(\frac{\Pi_n}{\Pi_{n+1}} - 1\right)$ positiv oder negativ ausfällt".

W. Fr. Meyer.

Digitized by Google

23. Man könnte den Satz des Desargues für zwei perspektive Dreiecke der Ebene derart auf den Raum ausdehnen, dafs es sich gleichfalls nur um das Erfülltsein einer einzigen Bedingung handelte:

Es seien drei Tetraeder mit den Ecken A_i, A_i', A_i'' und den bez. Gegenebenen α_i, α_i', α_i'' $(i = 1, 2, 3, 4)$ vermöge der getroffenen Bezeichnung einander zugeordnet. Man verbinde A_i, A_i', A_i'' durch die Ebene π_i, und schneide dualistisch α_i, α_i', α_i'' im Punkte P_i. Das fragliche Analogon — das dann auch seinen algebraischen Ausdruck in einer durchsichtigen Determinantenidentität fände — würde lauten:

„Liegen die 4 Punkte P_i in einer Ebene, so schneiden sich auch die 4 Ebenen π_i in einem Punkte und umgekehrt".

Trotzdem ist dieser Satz *nicht allgemein giltig*, was geometrisch oder algebraisch nachgewiesen werden soll. W. Fr. Meyer.

---

24. Der Satz über den „Lotpunkt eines Dreiecks" des Herrn stud. math. Cwojdzínski (S. 178) läfst sich nach verschiedenen Richtungen verallgemeinern:

a) auf die Geometrie der Kreise in der Ebene. Gegeben drei Kreise K_i $(i = 1, 2, 3)$ nebst einem vierten K. Man lege durch die Schnittpunkte von K_i, K_k den zu K orthogonalen Kreis und durch das so auf K ausgeschnittene Punktepaar wiederum den zu K_l orthogonalen Kreis; dann gehören die drei letzteren Kreise demselben Büschel an.

b) auf die Geometrie des Tetraeders. Man fälle von der Ecke A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ eines Tetraeders mit der Gegenebene α_i das Lot auf eine Ebene π und von dem Fufspunkte dieses Lotes wiederum das Lot auf die Ebene α_i; dann gehören die vier letzteren Lote derselben Regelschar zweiter Ordnung an.

Für den Beweis von a) empfiehlt sich die Benutzung tetracyklischer Koordinaten, für den von b) die von Linienkoordinaten.

Die Sätze a) und b) lassen sich auf den Raum von n Dimensionen ausdehnen.

c) Der Satz des Herrn Cwojdzínski ist ein besonderer Fall des Kegelschnittsatzes: Gegeben in einer Ebene ist ein Dreieck mit den Ecken A_i $(i = 1, 2, 3)$ und den Seiten a_i, ferner ein Klassenkegelschnitt K und eine Gerade g. Man lege durch A_i die Gerade, die bez. K zu g konjugiert ist und durch deren Schnittpunkt mit g wiederum die Gerade, die bez. K zu a_i konjugiert ist; dann schneiden sich die drei letzteren Geraden in einem Punkte P.

Die Gerade g und der Punkt P sind durch eine Transformation 4. Ordnung mit einander verbunden: es soll diese Transformation aufgestellt und gezeigt werden, dafs sie sich auf eine Transformation 2. Ordnung reduziert, wenn K in ein Punktepaar (also im besondern in das Kreispunktepaar) degeneriert. W. Fr. Meyer.

---

25. Beweist man die Eigenschaften des Lemoineschen Punktes, die Herr Caspary (S. 143—158) auf einen beliebigen Punkt der Ebene übertragen hat, mit Dreieckskoordinaten, so ergiebt sich, dafs die Beweise alle nur von

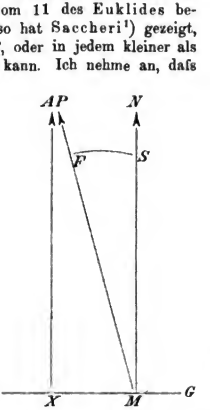
Digitized by Google

der Thatsache Gebrauch machen, dafs die Summe der Winkel α_i $(i = 1, 2\ 3)$ des Koordinatendreiecks gleich $2R$ ist, bleiben also giltig, wenn man die α_i durch drei beliebige Winkel mit der Summe $2R$ ersetzt. Dadurch geht aber der Lemoinesche Punkt (mit den Koordinaten $\sin \alpha_i$) in einen beliebigen Punkt der Ebene über. Die erforderlichen Rechnungen sind im einzelnen für die Erweiterungen des Herrn Caspary durchzuführen, sowie auf andere merkwürdige Punkte des Dreiecks auszudehnen.

W. Fr. Meyer.

2. Anfragen.

3. Dafs in einem sphärischen Dreieck die Winkelsumme gröfser ist als $2R$, wird bekanntlich unabhängig von dem Axiom 11 des Euklides bewiesen. Und was die ebenen Dreiecke betrifft, so hat Saccheri[1]) gezeigt, dafs die Winkelsumme entweder in jedem $= 2R$, oder in jedem kleiner als $2R$ ist, dafs sie in keinem gröfser als $2R$ sein kann. Ich nehme an, dafs diese Summe kleiner sei als $2R$. Dann können, wie Saccheri nachgewiesen hat, zwei gerade Linien zu einander asymptotisch liegen. Von jedem Punkte läfst sich an eine gerade Linie eine Asymptote ziehen.



In nebenstehender Figur soll eine in eine Pfeilspitze endigende gerade Linie eine in der Richtung des Pfeils unendlich verlängerte Linie bedeuten.

Auf einer horizontalen Ebene GG (von der Seite gesehen, so dafs die Ebene als gerade Linie erscheint) nehme man einen Punkt M, errichte in diesem auf GG eine Senkrechte MN. Ferner sei in der Ebene ein beliebiges gleichseitiges Dreieck XYZ mit dem Mittelpunkte M gezeichnet, von welchem die Figur nur den einen Eckpunkt X zeigt. In den Eckpunkten X, Y, Z errichte man auf der Ebene Senkrechte: XA, YB, ZC. Man verbinde je zwei von diesen Linien durch eine Ebene. Diese drei Ebenen umschliefsen einen Raum, den man in der Euklidischen Geometrie einen prismatischen Raum nennt. Ich nenne diesen Raum den Trichterraum, weil er unter den hier angenommenen Voraussetzungen der Nicht-Euklidischen Geometrie nach oben einen immer gröfseren Querschnitt erhält. Der Kantenwinkel dieses Raums ist gleich dem Winkel des Dreiecks XYZ, also um ein Bestimmtes, $= \alpha$, kleiner als $\frac{2}{3}R$.

Vom Punkte M werden an die drei Kanten des Trichterraums Asymptoten gezogen: MP, MQ, MR. Je zwei Asymptoten werden durch eine Ebene verbunden, wodurch eine dreiseitige körperliche Ecke

1) Girolamo Saccheri: Euklides ab omni naevo vindicatus. Mailand 1733. (Stäckel und Engel: die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gaufs.)

Digitized by Google

entsteht. Um den Punkt M als Mittelpunkt wird eine Kugelfläche (in der Figur durch SF angedeutet) mit dem Radius MS gelegt. Aus dieser Kugelfläche schneidet die dreiseitige Ecke ein gleichseitiges sphärisches Dreieck heraus, dessen Winkel gleich dem Kantenwinkel der dreiseitigen Ecke ist. Letzterer Winkel ist also nicht kleiner als $\frac{2}{3}R$.

Man lasse jetzt den Punkt S in die Höhe steigen, während die Kugelfläche stets durch denselben geht, so dafs die Linie MS, der Radius der Kugel, ins Unendliche wächst. Der Winkel des sphärischen Dreiecks ändert sich hierbei nicht; er bleibt stets gleich dem Kantenwinkel der dreiflächigen Ecke. Man kann MS so wachsen lassen, dafs an den Eckpunkten des sphärischen Dreiecks, sowie in beliebiger endlicher Entfernung von denselben die Asymptoten beliebig genau mit den Kanten des Trichter raums zusammenfallen. Der Winkel des sphärischen Dreiecks, gleich oder gröfser als $\frac{2}{3}R$, wird also beliebig nahe gleich dem Kantenwinkel des Trichterraums, kleiner als $\frac{2}{3}R$.

Der Widerspruch, welcher darin liegt, dafs der Kantenwinkel des Trichterraums und derjenige der dreiflächigen Ecke gleich und zugleich nicht gleich sind, beweist, dafs die Voraussetzungen der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht richtig sind, dafs die Winkelsumme im Dreieck gleich $2R$ ist.

Vorstehender Beweis scheint vollkommen einwurfsfrei, ist es aber nicht. Wo liegt der Fehler? W. Veltmann.

---

3. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter dieser Rubrik beabsichtigt die Redaktion, Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in litterarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie aufzunehmen. Die Redaktion hofft vielfach geäufserten Wünschen zu entsprechen, wenn derartige Verbesserungen an dieser Stelle einen Sammelpunkt finden.

Es wird gebeten, diesbezügliche Einsendungen an das Redaktionsmitglied Prof. Dr. W. F. Meyer in Königsberg richten zu wollen.

Die Redaktion.

Zu I A 5: Mengenlehre.

I. S. 190, Z. 16. Die Teilmengen ω und $^{\nu}\omega$ brauchen nicht zugleich in einer transfiniten geordneten Menge enthalten zu sein.

I. S. 193, Z. 7. Auch die Belegungsmenge von M mit einer aus *zwei* Elementen bestehenden Menge hat bereits höhere Mächtigkeit als M.

I. S. 196, Z. 10. Die Ziffer 0 ist zu tilgen.

„ Z. 16 u. 20. Lies $\mathfrak{C}_n$ statt R_n.

„ Z. 23. Die Intervalle d_ν genügen naturgemäfs der Bedingung, dafs zwischen je zweien von ihnen stets andere Intervalle liegen.

I. S. 201, Z. 3 v. u. statt „abzählbare" lies „abzählbare überalldichte."

Königsberg i. P. A. Schœnflies.

Digitized by Google

Zu I A 6: Endliche diskrete Gruppen.

I. S. 217, Anm. Z. 1: statt 1893 ist 1895 zu setzen.
I. S. 222, Anm. 111). „Der Satz ist implizite in N. H. Abels Untersuchungen über Gleichungen enthalten" ist unzutreffend. Abel reduziert die nach ihm benannten Gleichungen nur auf eine Kette *nach* einander, *nicht neben* einander zu lösender einfacher solcher Gleichungen. (Ich habe dies näher ausgeführt in der in Ostwalds Klassikern erschienenen Abelschen Arbeit, Nr. 111, S. 47, 48, Anm. 15.)
I. S. 222, Anm. 111): 1829 statt 1839. A. Lœwy.

Zu I B 1a: Rationale Funktionen einer Veränderlichen; ihre Nullstellen.

I. S. 239, vorletzte Zeile des Textes. Der Eisensteinsche Satz ist von Th. Schoenemann in J. f. Math. **40**, S. 188 für sich reklamiert worden. Das dort angegebene Zitat aber ist falsch gedruckt, es muſs Bd. **32**, S. 93 dieses Journals heifsen. A. Lœwy.

Zu I C 2: Arithmetische Theorie der Formen.

I. S. 593, Z. 6 v. u. wäre neben *„Fundamentalgleichung"* die Bezeichnung *„charakteristische Gleichung* nach Frobenius" hinzuzufügen.
Freiburg i. B. A. Lœwy.

Zu I C 1: Niedere Zahlentheorie.

I. S. 579. Zu Fufsnote 64). Hier fehlt: Jacob Bernoulli mittels der nach ihm benannten Zahlen (siehe über diese II A 3 Nr. 18, Bd. II, S. 182 ff.).
An den anderen Stellen: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Differenzenrechnung ist bereits auf II A 3 hingewiesen worden.
Königsberg i. P. L. Saalschütz.

Zu II A 3: Bestimmte Integrale.

II. S. 183. Zu Fufsnote 160). In der Anmerkung S. 7 f. meiner Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen (Berlin 1893) habe ich bereits hervorgehoben, wie geringen Anteil Moivre an der nach ihm benannten Formel hat.
II. S. 183. Zu Fufsnote 160a). Hinter Sterns Formeln wären meine verkürzten Rekursionsformeln, Ztschr. f. Math. u. Phys., Bd. 37 (1892), S. 378 (oder Vorles. S. 39 u. S. 185) zu erwähnen. (Die 1. Seidelsche und die einfachste von meinen verkürzten Rekursionsformeln stehen schon, wie ich vor kurzem fand, in Raabes Monographie über die Bernoullischen Funktionen, siehe Fufsnote 167a). Sodann meine Mitteilungen in den Schriften der Königsb. Phys. Oek. Ges. 1892, S. [44], worin verkürzte Rekursionsformeln, in denen *Zwischenglieder* fehlen, und auch Aus-

Digitized by Google

wertungen gewisser *Determinanten* durch Bernoullische Zahlen sich finden. — Die Haufsnerschen Arbeiten knüpfen an die Kroneckersche Darstellung der B. Z. (s. Fufsnote 163)) durch Einheitswurzeln an und gelangen zu sehr bemerkenswerten verkürzten Rekursionsformeln, welche — mittels Änderung eines Parameters — einerseits zu vollständigen Rekursionsformeln, andererseits zu independenten Darstellungen der B. Z. führen.

II. S. 184. Zu Fufsnote 163). Unter „anderen" Darstellungen sind hauptsächlich *independente* zu verstehen.

II. S. 184. Zu Fufsnote 165). Unter den Autoren für bestimmte Integrale fehlt Catalan, der sich vielfach mit den B. Z. beschäftigt hat (s. meine Vorles. S. 114—116).

II. S. 185. Zu Fufsnote 167a). Hier fehlt das Zitat: Raabe, die Jacob-Bernoullische Funktion, Zürich 1848. — Raabe hat von ganz anderem Ausgangspunkt und unabhängig von Malmstén gearbeitet. — An der angegebenen Stelle im J. f. Math. stellt Raabe einige bestimmte Integrale auf, die sich durch Bernoullische Funktionen auswerten lassen, wie z. B.:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2m}du}{e^u + e^{-u} - 2\cos(2\pi x)} = \frac{(-1)^{m+1}}{2}(2\pi)^{2m+1}\frac{S_{2m}(x)}{\sin(2\pi x)}.$$

$$(S_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^n}{2} + (n)_1\frac{B_1}{2}x^{n-1} - (n)_3\frac{B_3}{4}x^{n-3} \pm \cdots$$

nach Hermites Bezeichnung). — Vgl. noch über andere Autoren auf gleichem Gebiet (Schlömilch, Schläfli, Glaisher): Renfer, Die Definitionen der Bernoullischen Funktion, Bern 1900 Inaug. Diss.

II. S. 185. Zu Fufsnote 170). Neue Beweise lieferten Schering, Math. Annalen Bd. 52 (1900), S. 171; J. C. Kluyver, ib. Bd. 53 (1900), S. 591. — Im Text mufs in der Gleichung für B_m rechts $(-1)^m A_m$ (statt $(-1)^{m+1}A_m$) stehen, wenn A_m dieselbe Bedeutung wie bei den S. 186 oben angeführten Autoren (Hermite, Stern, Lipschitz) haben soll. — Übrigens ist die rechte Seite, von $m = 7$ an, *positiv*, da B_m viel schneller als $0{,}577 + l(2m+1)$ wächst.

II. S. 186. Zu Fufsnote 173). Bezüglich der zahlentheoretischen Eigenschaften der B. Z. sei noch (da ich in I C 3 nichts darüber gefunden habe) auf die Aufsätze von Kummer, J. f. Math. Bd. 41 (1859), S. 368 und Stern, ib. Bd. 79 (1875), S. 67, sowie ib. Bd. 88 (1880), S. 85 (oder meine Vorl. §§ 19 u. 20) hingewiesen.

Königsberg i. P. L. Saalschütz.

Digitized by Google

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

HERAUSGEGEBEN
VON
E. LAMPE
IN BERLIN
W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.
E. JAHNKE
IN BERLIN

1. BAND. 3. UND 4. (DOPPEL-)HEFT
MIT 4 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.
AUSGEGEBEN AM 15. JUNI 1901.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTR. 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Pariser Strafse 55

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 35, Kurfürstenstrafse 130 und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von gröfseren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine gröfsere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Archivs umfafst 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 12 Mark; jährlich sollen zunächst etwa 6 Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN DOPPELHEFTES.

Seite

Sur la résolution de certaines équations à deux variables à l'aide de fonctions rationnelles et sur un théorème de M. Noether; Par **M. Émile Picard** à Paris 209

Mathematische Probleme. Von **D. Hilbert** in Göttingen. II. (Schlufs.) 213

Über die Helligkeit der Sehorgane bei Menschen und Tieren, insbesondere bei den Knochenfischen. Von **A. Gleichen** in Berlin 238

An Expression of the Number of Primes lying between two given Integers. By **T. Hayashi** in Matsuyama (Japan) 246

On some Theorems concerning with Prime Numbers. By **T. Hayashi** in Matsuyama (Japan) 248

Über die analytische Darstellung zweier Dreiecke, die auf 6 Arten perspektivisch liegen. (Auszug aus zwei Briefen von Herrn S. **Gundelfinger** an Herrn E. Jahnke.) 252

Über Ausartungen von Kreisen in Punktepaare. Von **S. Gundelfinger** in Darmstadt 255

Polygones semi-réguliers dans l'ellipse; Par **M. C. A. Laisant** à Paris 257

Über die partiellen Differentialgleichungen, denen Hermitesche Formen genügen. Von **L. Schlesinger** in Klausenburg 262

Zur neueren Dreiecksgeometrie. Von **F. Caspary** in Charlottenburg. II. (Schlufs.) 269

Über die Strahlung der Gase. Von **E. Pringsheim** in Berlin 289

Sur quelques nouveaux théorèmes relatifs au triangle (suite à un article de M. F. Caspary); Par **M. L. Ripert** à Paris 310

Über einige Verallgemeinerungen des Fermatschen und des Wilsonschen Satzes. Von **K. Hensel** in Berlin 319

Principes de la Géométrografie ou art des constructions géométriques; Par **M. E. Lemoine** à Paris. II. (Fin.) 323

Rezensionen. Von **R. Fricke, F. Pockels** und **J. Weingarten** 342

Föppl, A., Vorlesungen über technische Mechanik. Von **J. Weingarten.** S. 342. — Entgegnung auf das Referat des Herrn Weingarten. Von **A. Föppl.** S. 352. — Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauſs-Weber-Denkmals in Göttingen: Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie. Wiechert, E., Grundlagen der Elektrodynamik. Von **R. Fricke.** S. 357. — Pascal, E., Die Variationsrechnung. Übers. v. A. Schepp. Von **R. Fricke.** S. 360. — de Tannenberg, W., Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différentiel. Von **R. Fricke.** S. 361. — Stahl, H., Vorlesungen über B. Riemanns elliptische Functionen. Von **R. Fricke.**

Digitized by Google

Seite

S. 362. — Stolz, O., Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. III. Von R. Fricke. S. 363. — Schubert, H., elementare Arithmetik und Algebra. Von R. Fricke. S. 364. — Holzmüller, G., Elemente der Stereometrie. I. Von R. Fricke. S. 365. — Volkmann, P., Einführung in das Studium der theoretischen Physik. Von F. Pockels. S. 366.

Vermischte Mitteilungen 368

1. Aufgaben und Lehrsätze. Von E. N. Barisien, Ed. Janisch, A. Kneser, C. A. Laisant, E. Lemoine, W. Fr. Meyer.
2. Anfragen. Von W. Veltmann.
3. Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. A. Loewy, L. Saalschütz, A. Schoenflies.

Eingelaufen sind und zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren: Chr. Beyel, P.A. Bromwich, K. Czwojdziński, E. Cruber, F. Fitting, R. Funck, L. Grossmann, S. Gundelfinger, E. Haentzschel, M. Hamburger, K. Hensel, H. Hertzer, G. Hessenberg, K. Heun, J. Horn, E. Janisch, St. Jolles, K. Isenkrahe, P. Kokott, V. Kommerell, H. Kühne, G. Landsberg, R. Lehmann-Filhés, W. Ludwig, O. Lummer, S. Majcen, P. Mansion, L. Matthiessen, Fr. Meyer, G. Mittag-Leffler, C. Moreau, E. Müller, R. Müller, J. Neuberg, M. d'Ocagne, B. Oster, E. Phragmén, L. Saalschütz, H. Schubert, R. Schüssler, K. Schwering, C. Stephanos, R. v. Sterneck, F. J. Studnička, W. Thienemann, Th. Vahlen, J. Weingarten, E. Wölffing, K. Zindler, H. Züge.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Ahrens, W., mathematische Unterhaltungen und Spiele. [X u. 428 S.] gr. 8. 1901. In Original-Leinwandband mit Zeichnung von P. Bürck in Darmstadt. n. ℳ 10.— (Auch in 2 Hälften broschiert.)

Brückner, Max, Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte. Mit 7 lithographierten und 5 Lichtdruck-Doppeltafeln, sowie vielen Figuren im Text. [VIII u. 227 S.] gr. 4. 1900. geh. n. ℳ 16.—

Cesàro, Ernesto, Vorlesungen über natürliche Geometrie. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. Gerhard Kowalewski. Mit 24 in den Text gedruckten Figuren. [VIII u. 341 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand geb. n. ℳ 12.—

Föppl, Aug., Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bdn. gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. ℳ 44.—

I. Band. Einführung in die Mechanik. (1. Aufl. 1898.) 2. Aufl. [XIV u. 422 S.] 1900. geb. n. ℳ 10.—
II. — Graphische Statik. [X u. 452 S.] 1900. n. geb. ℳ 10.—
III. — Festigkeitslehre. (1. Aufl. 1897.) 2. Aufl. [XVIII u. 512 S.] 1900. geb. n. ℳ 12.—
IV. — Dynamik. (1. Aufl. 1899.) 2. Aufl. [XV u. 506 S.] 1901. geb. n. ℳ 12.—

Fricke, Robert, kurzgefafste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen. Analytisch-functionentheoretischer Teil. Mit 102 in den Text gedruckten Figuren. [IX u. 520 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. ℳ 14.—

Fricke, Robert, und **Felix Klein,** Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. In 2 Bänden. II. Band. 1. Hälfte. Mit 34 in den Text gedruckten Figuren. gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 10.—

Klein, F., und **E. Riecke,** über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an höheren Schulen. Vorträge, gehalten in Göttingen, Ostern 1890, bei Gelegenheit des Ferienkurses. Mit einem Wiederabdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von F. Klein. [VI u. 252 S.] Mit 84 Textfiguren. gr. 8. 1900. geb. n. ℳ 6.—

Koenigsberger, Leo, die Principien der Mechanik. Math. Untersuchungen. [XII u. 228 S.] gr. 8 1901. In Leinw. geb. ℳ 9.—

Kötter, Ernst, die Entwickelung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (1847). A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. V. Band. 2. Heft. [XXVIII u. 486 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 18.80.

Digitized by Google

Kronecker, L., Vorlesungen über Zahlentheorie. 1. Band. Herausgegeben von Kurt Hensel. [XVI u. 393 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 12.—

Lüroth, J., Vorlesungen über numerisches Rechnen. Mit 18 Figuren im Text. gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 8.—

Müller, Felix, mathematisches Vokabularium, französisch-deutsch und deutsch-französisch, enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. [XIV u. 218 S.] Lex.-8. 1901. In Leinw. geb. n. ℳ 20.—

Pascal, Ernst, Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Litteratur). Autorisierte deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals von A. Sconin, Oberlehrer a. D. zu Wiesbaden. In 2 Teilen. Analysis und Geometrie. 1. Teil: Die Analysis. [XII u. 418 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. ℳ 10.— (II: Geometrie unter der Presse.)

Schoenflies, A., die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. VIII. Band. 2. Heft. Mit 8 Figuren im Text. [VI u. 251 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 8.—

Simon, Max, Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XI. Heft. Mit 102 Figuren im Text. [VII u. 181 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 5.—

Stolz, O. und J. A. Gmeiner, theoretische Arithmetik. In 2 Abteilungen. 1. Abteilung. Zweite umgearbeitete Auflage der Abschnitte I—IV des 1. Teiles der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. A. u. d. T.: B. G. Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band IV, 1. [IV u. 298 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 2.40; in Leinwand geb. n. ℳ 3.—

Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. 2 Lieferungen. 1. Lieferung. Mit in den Text gedruckten Figuren. [240 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 7.60.

von Weber, E., Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. A. u. d. T.: Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften. Band II. [XI u. 672 S.] gr. 8. 1900. In Leinw. geb. n. ℳ 24.—

☞ Soeben erschien, Versand gratis und franco:

Cat. 26

Bibliotheca astronomica et mathematica

Astronomie. Astrologie. Sonnenuhren. Kometen. Mathematik. Buchhaltung. Quadratur des Zirkels. Kalender. Physik. Optik. Meteorologie. Nautik. 1242 Nummern.

Jacques Rosenthal

Buch- und Kunst-Antiquariat

Karl-Straße 10

MÜNCHEN.

Illustr. Beilagen von B. G. Teubner in Leipzig.

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 04930 9860

Digitized by Google